

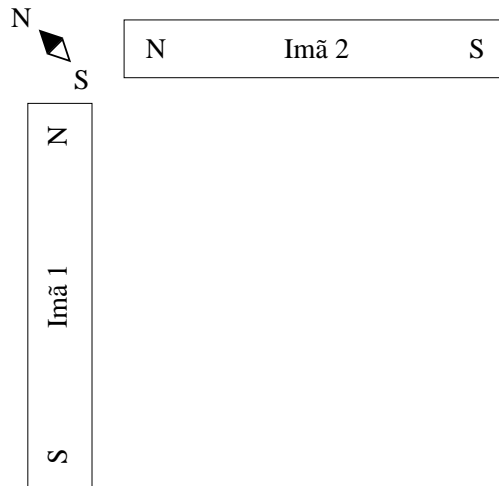
# ELETROMAGNETISMO - LISTA 4 - SOLUÇÃO

## Campos magnéticos

Data para entrega: 24 de maio (quinta-feira)

### 1. Imãs e campo magnético

Considere os dois imãs da figura abaixo, dispostos perpendicularmente um ao outro.

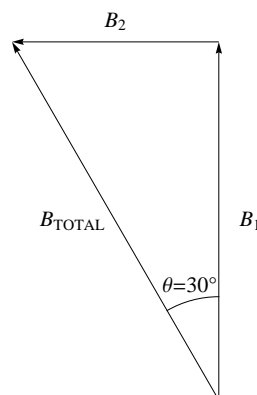


- (a) Suponha que os ímãs são idênticos. Se uma pequena agulha de bússola for colocada no ponto P, para qual direção o lado norte da agulha irá apontar?

Os ímãs são idênticos e a distância deles ao ponto P é a mesma. Portanto, ambos produzem em P um mesmo campo magnético. Como o pólo sul da agulha é atraído para os pólos norte dos ímãs, a agulha da bússola fará um ângulo de  $45^\circ$  no ponto P (vide a figura atualizada).

- (b) Se, por outro lado, você observar que a agulha aponta adicionais  $15^\circ$  no sentido horário, em comparação com a posição que você obteve no item (a), calcule a razão  $B_1/B_2$  entre os campos gerados pelo ímã 1 e 2 no ponto P.

A figura abaixo mostra os vetores relevantes ao problema.



Dela vemos claramente que

$$\frac{B_2}{B_1} = \tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \implies \quad \frac{B_1}{B_2} = \sqrt{3}$$

## 2. Propriedades do campo magnético

Para obter nota nas perguntas abaixo, você *deve* explicar seu raciocínio e mostrar os seus cálculos.

- (a) Um campo magnético constante é capaz de por em movimento um elétron inicialmente em repouso?

Não é possível. A força magnética não realiza trabalho. Ela não é capaz de fornecer energia cinética (ou potencial; ou qualquer tipo de energia) ao sistema. Outra forma de ver isso é simplesmente lembrar que

$$\mathbf{F}_M = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Como  $\mathbf{v} = 0$ , a força sempre será nula.

- (b) É possível que um campo magnético constante altere a energia cinética de uma partícula carregada?

Não. Novamente, o campo magnético é capaz somente de defletir a trajetória da partícula, mas não de realizar trabalho (ou seja, fornecer-lhe energia). A prova deste fato é simples. Pela definição de trabalho:

$$W_M = \int \mathbf{F}_M \cdot d\mathbf{x} = \int \mathbf{F}_M \cdot (\mathbf{v} dt) = \int q\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dt$$

Mas, pela definição de produto vetorial,  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  é um vetor perpendicular tanto à  $\mathbf{v}$  quanto à  $\mathbf{B}$ . Por outro lado, o produto escalar é nulo sempre que dois vetores são perpendiculares. Portanto,  $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$ , *sempre* (para qualquer vetor). Ou seja,  $W_M = 0$ .

- (c) Se uma partícula está se movendo em linha reta em uma certa região do espaço, é possível concluir que o campo magnético nesta região é nulo?

Considere a expressão

$$\mathbf{F}_M = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

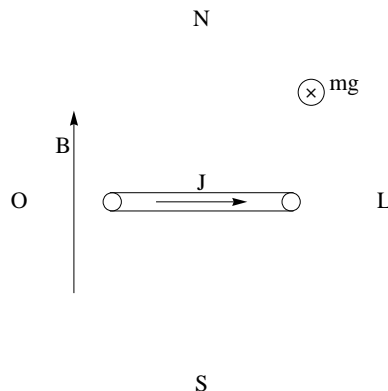
Claramente, se  $\mathbf{B} = 0$ , a força será nula. No entanto, também é possível que tenhamos  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{B}$ . Neste caso,  $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$  e a força se anula da mesma forma. Ou seja, não necessariamente precisamos de  $\mathbf{B} = 0$  para termos  $\mathbf{F}_M = 0$ .

## 3. Fio levitando

Um fio de cobre de diâmetro  $d$ , que carrega uma densidade de corrente  $\mathbf{J}$ , está disposto no equador onde o campo magnético da terra é horizontal, aponta para o norte e tem magnitude  $|\mathbf{B}_T| = 0.5 \text{ G}$ . O fio está em um plano paralelo à superfície da terra, disposto na direção leste-oeste. A densidade do cobre é  $\rho_{\text{massa}} = 8,9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  e a resistividade é  $\rho_R = 1,7 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$  (desculpe-me pelo duplo uso da letra  $\rho$ , mas faltam letras no alfabeto!).

- (a) Qual deverá ser o sentido de  $\mathbf{J}$  para que o fio possa levitar?

As grandezas relevantes estão denotadas na figura abaixo.



Procuramos um sentido para  $\mathbf{J}$  tal que a força magnético no fio seja para cima, compensando a força gravitacional. Como o campo aponta para o norte, vemos que o sentido de  $\mathbf{J}$  deve ser de **Oeste para Leste**.

- (b) Calcule a magnitude de  $\mathbf{J}$ ; use  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

Seja  $a$  o comprimento do fio. Então, a força magnética será

$$F_M = IaB = (JA)aB = J\text{Vol}B$$

onde Vol é o volume do fio. Por outro lado, a força gravitacional é

$$F_g = mg = \rho_m \text{Vol}g$$

Igualando ambas chegamos a

$$J = \frac{\rho_m g}{B} = \frac{(8,9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9,8 \text{ m/s}^2)}{0,5 \times 10^{-4} \text{ T}} \simeq 1,74 \times 10^9 \text{ A/m}^2$$

- (c) Quando o fio estiver flutuando, qual será a potência dissipada por  $\text{m}^3$ ? Expresse sua resposta também em  $\text{kW/cm}^3$ .

Pela definição de potência temos

$$P = RI^2 = \frac{\rho_R a}{A} \times (JA)^2 = \rho_R J^2 (aA)$$

$$\therefore \frac{P}{\text{Vol}} = \rho_R J^2$$

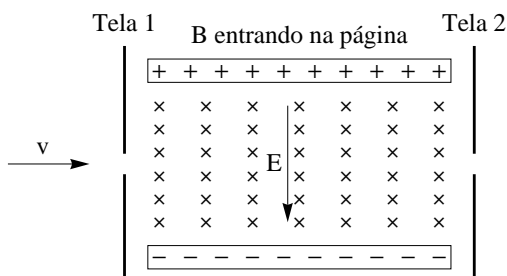
Substituindo valores:

$$\frac{P}{\text{Vol}} = (1,7 \times 10^{-8} \text{ } \Omega \cdot \text{m})(1,74 \times 10^9 \text{ A/m}^2) \simeq 5,2 \times 10^{10} \text{ W/m}^3 = 50 \text{ kW/cm}^3$$

**Conclusão:** o fio vai esquentar à beça.

#### 4. Força de Lorentz

(Para receber crédito você deve explicar o seu raciocínio e mostrar os seus cálculos) Uma partícula com carga  $q$  e velocidade  $\mathbf{v}$  entra em uma região com campos elétrico e magnético cruzados (vide figura). Se  $q < 0$  e  $E > vB$ , então a força na partícula:



- (a) É nula e a partícula se moverá em uma linha reta.
- (b) É constante e a partícula atingirá a segunda tela acima da abertura.
- (c) É constante e a partícula atingirá a segunda tela abaixo da abertura.
- (d) É constante em módulo mas não em direção, fazendo com que a partícula se mova em uma trajetória circular, atingido a segunda tela acima da abertura.
- (e) É constante em módulo mas não em direção, fazendo com que a partícula se mova em uma trajetória circular, atingido a segunda tela abaixo da abertura.
- (f) Muda tanto em magnitude quanto em direção, e a partícula atinge a tela acima da abertura.
- (g) Muda tanto em magnitude quanto em direção, e a partícula atinge a tela abaixo da abertura.

Ao entrar na região da figura a força que a partícula irá sofrer ee

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Por um lado,  $q < 0$  e  $\mathbf{E}$  é para baixo, fazendo com que  $q\mathbf{E}$  seja para cima. Por outro lado,  $\mathbf{B}$  está entrando na página e  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  será para cima; como  $q < 0$ ,  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  será para baixo. Mas  $E > vB$  fazendo com que a resultando seja para cima.

No entanto, note que o campo elétrico realiza trabalho, acelerando a partícula. Por essa razão, a força muda em magnitude e direção ao longo de toda a trajetória.

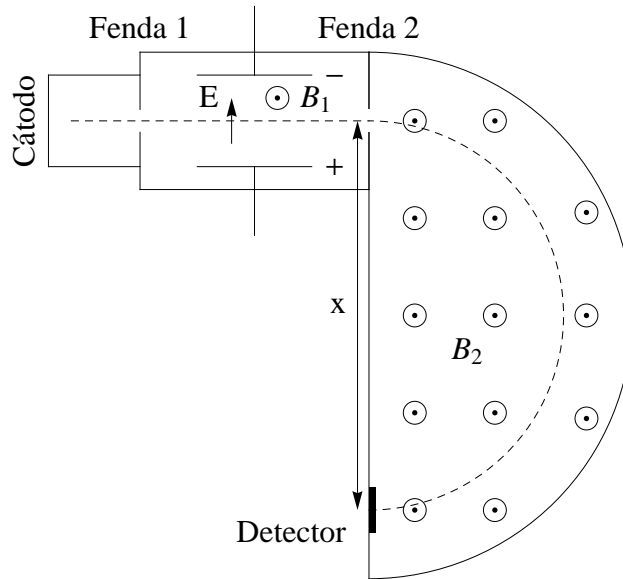
**Resposta correta:** (f)

#### 5. Espectrômetro de massa: enriquecimento de urânio

Na natureza, 99,3% do urânio encontrado é U-238 (ou seja, 92 prótons e 146 nêutrons) e apenas 0,7% é do tipo U-235 (143 nêutrons). Ocorre, no entanto, que o U-235 é o tipo necessário para aplicações envolvendo energia nuclear (pacíficas ou não). Precisamos, portanto, separar os isótopos. É isso que as pessoas usualmente denominam de “enriquecimento de urânio”. Obviamente, não estamos enriquecendo nada, mas simplesmente “jogando fora” o U-238. No entanto, por serem isótopos, suas propriedades químicas são absolutamente idênticas forçando-nos a recorrer para métodos físicos. É por isso que esse processo é tão complexo (e caro). Uma das formas de separar os isótopos de urânio é através de um espectrômetro de massa. Essa, obviamente, é apenas uma das inúmeras aplicações deste instrumento. Outra aplicação, muito mais usual, é na determinação da composição química de uma amostra gasosa. Neste problema você estudará em detalhe o espectrômetro de massa.

A figura abaixo ilustra um desenho esquemático de um espectrômetro de massa. Considere um íon de massa  $m$ , carregado com uma carga  $q = +e$  (ou seja, o átomo perdeu um elétron). Este íon é produzido no cátodo através de uma descarga elétrica que resulta num “vapor” de íons. Entre o cátodo e a primeira fenda aplicamos uma diferença de potencial  $\Delta V$ , que acelera o íon para a direita. Entre a primeira e a segunda fenda há um seletor de velocidades: um sistema com campos elétrico e magnético cruzados. Suponha que o campo  $\mathbf{E}$  é fixo ao passo que o campo  $\mathbf{B}_1$  é variável. Ajustando-o, podemos forçar que apenas partículas com uma certa velocidade,  $v$ ,

passem pela segunda fenda. Estas partículas então adentram uma outra região com um campo  $B_2$  apontando para fora da página. Com isso, a partícula se move em um semi-círculo e atinge um detector à uma distância  $x$  da fenda 2 (vide figura). Suas respostas devem ser expressas em



termos de  $E$ ,  $e$ ,  $x$ ,  $m$ ,  $\Delta V$  e  $B_2$ .

- (a) Calcule a velocidade,  $v$ , que o íon atinge após ser acelerado na região entre o cátodo a primeira fenda.

Igualando a energia cinética adquirida com a diferença em energia potencial, temos

$$\frac{1}{2}mv^2 = e\Delta V$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}}$$

- (b) Qual deve ser a magnitude do campo  $B_1$  no seletor de velocidades para que o íon passe sem ser desviado?

Nesta configuração,  $e\mathbf{E}$  é para cima e  $e\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1$  é para baixo. Em valores absolutos, para que a força total seja nula devemos ter  $E = vB_1$ . Portanto,

$$B_1 = \frac{E}{v} = E\sqrt{\frac{m}{2e\Delta V}}$$

- (c) Encontre uma expressão para a massa da partícula após ela colidir com o detector. Este resultado é bastante geral e serve para outras aplicações do espectrômetro de massa. Por exemplo, se você está interessado em medir a composição química de um gás, então esta fórmula lhe fornece uma relação direta entre a massa da molécula e a distância que ela irá percorrer no espectrômetro.

Ao entrar na região com  $B_2$  a trajetória do íon será um semi-círculo. A força magnética irá atuar como uma força centrípeta, o que nos permite escrever

$$m\frac{v^2}{r} = evB_2 \quad \implies \quad m = \frac{eBr}{v}$$

Mas cuidado:  $v$  depende de  $m$ . Usando o resultado do item (a) teremos

$$m = eBr\sqrt{\frac{m}{2e\Delta V}}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado e resolvendo obtemos:

$$m^2 = (eBr)^2 \frac{m}{2e\Delta V} \implies m = \frac{e(br)^2}{2\Delta V}$$

Finalmente, devemos lembrar que  $x$  é o diâmetro:  $r = x/2$ .

$$\therefore m = \frac{e(Bx)^2}{8\Delta V}$$

- (d) Agora aplique o seu resultado ao problema do enriquecimento de urânio: calcule a razão  $x_{238}/x_{235}$  entre a distância percorrida por um íon de U-238 e um íon de U-235 (sua resposta deve ser um número).

Do resultado anterior, assumindo que  $B_1$  tenha sido ajustado de acordo para cada isótopo, teremos que

$$\frac{m_{238}}{m_{235}} = \left( \frac{x_{238}}{x_{235}} \right)^2$$

Como

$$\frac{m_{238}}{m_{235}} = \frac{238}{235} \simeq 1,01277$$

obtemos

$$\frac{x_{238}}{x_{235}} = 1,00636$$

Ou seja, a diferença é extremamente pequena, ilustrando a dificuldade de implementação deste tipo de processo.

As primeiras bombas nucleares foram desenvolvidas no famoso projeto Manhattan, que começou em 1939 e terminou com o lançamento das bombas sobre Hiroshima, no dia 06 de agosto de 1945, e Nagasaki, no dia 09 de agosto 1945. O projeto custou  $\sim$ \\$2 bilhões (equivalente a  $\sim$ \\$30 bilhões nos dias de hoje), dos quais assustadores 90% foram destinados às fábricas de separação de urânio. Para produzir uma bomba são necessários alguns kg de U-235. Inicialmente, a produção era de alguns  $\mu$ g/dia mas, combinando ao espectrômetro de massa diversas outras técnicas, essa taxa eventualmente atingiu a escala de mg/dia.

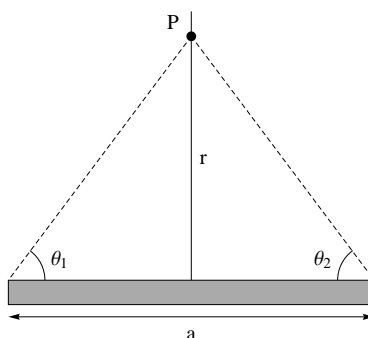
Problemas semelhantes ocorrem na mineração de outros elementos, como as terras raras por exemplo. Devido à sua configuração eletrônica, as propriedades químicas das terras raras são muito semelhantes às dos metais de transição; é daí que elas recebem esse nome — de raras elas na verdade não tem nada. Por essa razão, métodos químicos são menos eficazes e torna-se necessário o uso de técnicas físicas para separá-las dos outros minérios.

## 6. Espira quadrada

Considere um fio de comprimento  $a$ , por onde passa uma corrente  $I$  (vide figura). O campo magnético gerado no ponto  $P$  é

$$B = \frac{\mu_o I}{4\pi r} (\cos \theta_2 + \cos \theta_1)$$

onde  $\theta_1$  and  $\theta_2$  são os ângulos indicados na figura. Calcule o campo magnético no centro de uma espira quadrada de aresta  $a$ . Dica: neste caso,  $\theta_1 = \theta_2 = 45^\circ$ .



Com  $\cos \theta_1 = \cos \theta_2 = \cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  e lembrando que, no centro da espira,  $r = a/2$ , então o campo produzido por cada fio será

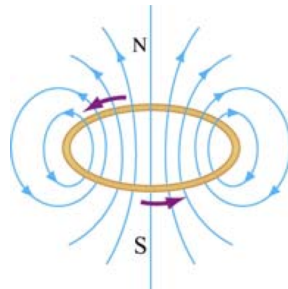
$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{2} \mu_0 I}{2 \pi a}$$

No centro da espira (e somente no centro!) o campo produzido pelos fios são todos na mesma direção. Portanto, o campo total será simplesmente

$$B_{\text{total}} = 4B_1 = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}$$

## 7. Bobina de Helmholtz

A figura abaixo ilustra o campo magnético gerado por uma espira com  $N$  voltas, raio  $R$  e por onde passa uma corrente  $I$  no sentido anti-horário.



Ao longo do seu eixo o campo magnético é dado pela expressão:

$$B_E = \frac{N\mu_0 I R^2}{2} \frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

onde  $z$  é a distância ao centro da espira. Escreva o campo magnético no centro da espira e guarde este resultado; você vai precisar dele depois.

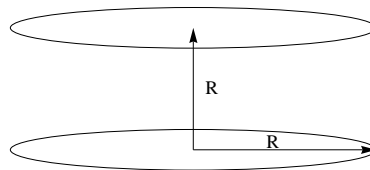
Para simplificar a notação, seja

$$\alpha := \frac{N\mu_0 I}{2}$$

Em  $z = 0$  teremos portanto

$$B_E = \frac{\alpha}{R}$$

Uma **bobina de Helmholtz** corresponde a duas espiras de raio  $R$  separadas por uma distância  $R$ , assim como na figura abaixo. A corrente que passa por ambas as espiras é  $I$  e cada uma tem  $N$  voltas.



- (a) Quando as duas correntes são paralelas dizemos que o sistema está na configuração *Helmholtz*. Tomando a direção da corrente como no sentido anti-horário, calcule o campo magnético ( $B_H$ ) no centro do aparato; ou seja, na distância intermediária entre as duas bobinas. Não se esqueça de indicar a direção e o sentido do campo.

Em  $z = R/2$ , ambas as bobinas geram um campo para cima. Além disso,

$$f := \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \Big|_z = R/2 = \frac{R^2}{(5R^2/4)^{3/2}} = \frac{8}{5^{3/2}R}$$

O campo gerado por cada bobina é

$$B_1 = \alpha f$$

Portanto, o campo total será simplesmente

$$B_H = 2\alpha f = \frac{16}{5^{3/2}} \frac{\alpha}{R}$$

- (b) Calcule a razão  $B_H/B_E$  entre o campo gerado pela bobina de Helmholtz e o campo gerado por uma única espira.

$$\frac{B_H}{B_E} = \frac{\frac{16}{5^{3/2}} \frac{\alpha}{R}}{\frac{\alpha}{R}} = \frac{16}{5^{3/2}} \simeq 1,4$$

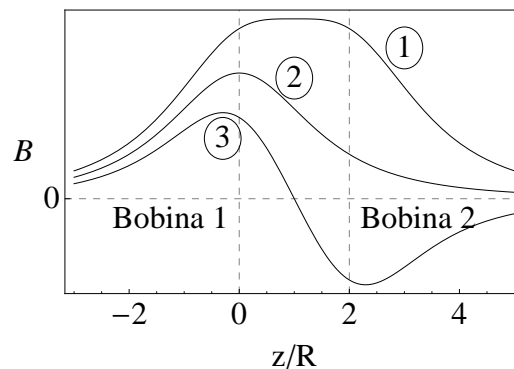
**Essa pergunta foi mal formulada. Peço desculpas. Eu não disse em quais pontos  $B_H$  e  $B_E$  deveriam ser avaliados. O que eu realmente queria, e diversas pessoas perceberam, era a razão entre  $B_H(z = R/2)$  e  $B_E(z = 0)$ . Diversas outras pessoas responderam  $B_H/B_E = 2$ : isso é óbvio demais e não faz muito sentido perguntar algo assim tão simples. De qualquer forma, eu invalidei parcialmente este item: quem respondeu corretamente ganhou um pouco de crédito extra, mas quem errou não foi prejudicado.**

- (c) Se as correntes estão anti-paralelas, dizemos que o sistema está na configuração *anti-Helmholtz*. Calcule o campo magnético no centro do aparato nesta situação.

Neste caso ambos os campos continuam tendo a mesma magnitude em  $z = R/2$ , mas agora apontam em direções opostas. Portanto,

$$B_{AH}(z = R/2) = 0$$

- (d) Considere agora as curvas 1 a 3 no gráfico abaixo. Descreva qual curva corresponde a cada uma das situações acima (Helmholtz, anti-Helmholtz e espira simples). Explique brevemente o seu raciocínio.

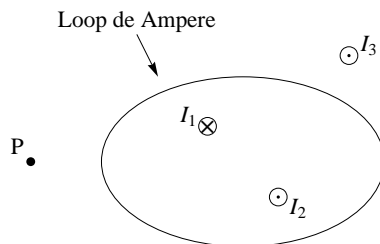


A curva 3 claramente corresponde à configuração **Anti-Helmholtz** já que  $B = 0$  no centro do sistema. A curva 2 corresponde a uma única espira pois seu campo está concentrado em uma dada região e cai rapidamente com a distância. Finalmente, a curva 1 corresponde à configuração de **Helmholtz**. Note como, entre as espiras,  $B \simeq$  constante. Vimos que isso ocorre dentro de um solenóide, que possui diversas espiras; vendo o resultado deste problema, concluímos que apenas duas espiras já possuem um efeito significativo na homogeneidade do campo.



## 8. Lei de Ampere

Considere três fios carregando com correntes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  e um loop de Ampere que engloba as correntes  $I_1$  e  $I_2$ , assim como na figura abaixo. Quais correntes são responsáveis pelo campo



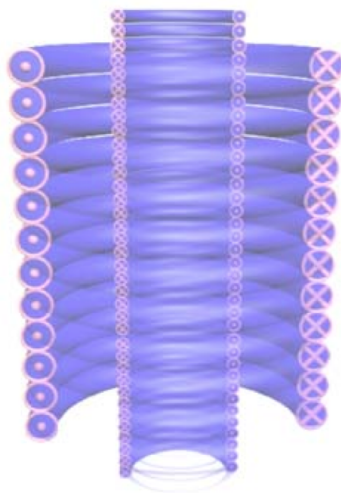
campo magnético no ponto  $P$  desenhado na figura? Explique.

- (a) Apenas  $I_3$ .
- (b)  $I_1$  e  $I_2$ .
- (c)  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ .
- (d) Nenhuma das três
- (e) Irá depender do tamanho e da forma do loop.

O loop de ampere não tem absolutamente nada a ver com o campo magnético! Ele é uma curva matemática que **nós** escolhemos, para **nos** auxiliar nos cálculos. O campo magnético não depende da **nossa** escolha. Portanto, resposta **c**: todas as correntes influenciam no campo magnético produzido em  $P$ .

## 9. Solenóides

Considere dois solenóides concêntricos de raios  $R_1$  e  $R_2$ , com  $R_1 < R_2$ . O primeiro tem  $n_1$  espiras por unidade de comprimento e o segundo,  $n_2$ . A corrente que passa por ambos é a mesma,  $I$ , mas flui em direções opostas assim como ilustrado na figura abaixo.



Usando a lei de Ampere, encontre a direção e a magnitude do campo magnético nas regiões abaixo. Não se esqueça de deixar claro qual o loop de Ampere que você escolheu. Resolva também o problema do ponto de vista do princípio da superposição; ou seja, como você sabe o campo produzido por um solenóide, aplique o princípio da superposição em cada uma das regiões. Obviamente, sua resposta deve ser a mesma em ambos os casos.

- (a)  $0 < r < R_1$

Eu escolho como circuito de Ampere uma espira quadrada, com um lado dentro do solenóide interno e o outro fora do solenóide mais externo. Nesta última,  $B \simeq 0$ . Além disso, nas outras duas arestas

$\mathbf{B} \perp d\mathbf{l}$ . Portanto, apenas a aresta que está dentro do circuito mais interno que irá contribuir. Supondo que ela possua comprimento  $l$ , teremos então

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = Bl$$

Para usarmos a lei de Ampere, precisamos avaliar qual a corrente que penetra a superfície definida por esse circuito. Neste caso haverá duas contribuições, referentes a cada solenóide. Escolhendo a direção de  $B$  positivo como sendo para cima (direção  $\hat{\mathbf{k}}$ ), teremos então

$$I_{\text{int}} = n_2 l I - n_1 l I$$

Portanto,

$$\mathbf{B} = \mu_0 I (n_2 - n_1) \hat{\mathbf{k}}$$

(b)  $R_1 < r < R_2$

Os mesmos argumentos do item anterior também se aplicam neste caso, excepto pelo fato de que a corrente atravessando a minha superfície agora provém somente do solenóide mais externo. Portanto,

$$\mathbf{B} = \mu_0 n_2 I \hat{\mathbf{k}}$$

(c)  $r > R_2$

Neste caso não há corrente atravessando minha superfície e, portanto,

$$B = 0$$

Posso repetir também o problema usando o princípio da superposição. O campo gerado pelo solenóide mais interno é

$$\mathbf{B}_1 = \begin{cases} -\mu_0 n_1 I \hat{\mathbf{k}} & \text{para } 0 \leq r \leq R_1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

ao passo que o campo gerado pelo solenóide mais externo será

$$\mathbf{B}_2 = \begin{cases} \mu_0 n_2 I \hat{\mathbf{k}} & \text{para } 0 \leq r \leq R_2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Portanto, aplicando o princípio da superposição eu obtenho:

$$0 \leq r \leq R_1 : \quad \mathbf{B} = \mu_0 I (n_2 - n_1) \hat{\mathbf{k}}$$

$$R_1 \leq r \leq R_2 : \quad \mathbf{B} = \mu_0 I n_2 \hat{\mathbf{k}}$$

$$r > R_2 : \quad \mathbf{B} = 0$$