ELETROMAGNETISMO - LISTA 3

Circuitos e Resistores

Data para entrega: 10 de maio (quinta-feira)

1. **Resistência trans-oceânica**

   As primeiras mensagens telegráficas que cruzaram o oceano atlântico ocorreram em 1858 e se deram por meio de um cabo de 3000 km entre o Canada e a Irlanda. O condutor neste cabo era composto por sete fios de cobre, cada um com diâmetro 0,73 mm, firmemente empacotados e envoltos por uma camada isolante de proteção. Calcule a resistência deste condutor. [Dica: antes de sair multiplicando sua resistência por 7, pare e pense um pouco!]

   A área da seção transversal de cada fio é

   $$A = \frac{\pi D^2}{4} \simeq 4,18 \times 10^{-7} \text{ m}^2$$

   Usando que a resistividade do cobre é $\rho = 1,7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$, a resistência de cada fio será

   $$R = \frac{\rho l}{A} = \frac{(1,7 \times 10^{-8})(3 \times 10^6)}{4,18 \times 10^{-7}} \simeq 122 \text{ k}\Omega$$

   Temos, no entanto, 7 fios empacotados em paralelo. Portanto a resistência efetiva será

   $$R_{ef} = \frac{R}{7} \simeq 17 \text{ k}\Omega$$

   Se você acha estranho que a resistência dos sete fios seja $1/7$ da resistência de cada um, pense nos sete fios como um fio mais grosso com área $7A$. Quanto maior a área, menor a resistência.

2. **Resistência oceânica**

   Inicialmente eu havia colocado $\rho = 25\ \Omega \cdot \text{m}$, mas este valor está errado. O valor correto é $\rho = 25\ \Omega \cdot \text{cm}$, que condiz melhor com a situação.

   A resistividade da água do mar é $\rho = 25\ \Omega \cdot \text{cm}$. Os principais carreadores de carga são os íons de Na^+ e Cl^-. Assuma que a concentração de sal na água é de 3×10^{20}moléculas/cm^3. Se preenchermos um tubo plástico de 2 metros de comprimento com água do mar e conectarmos eletrodos em cada uma das suas extremidades a uma bateria de 12 V, qual será a velocidade de "drift" media dos íons? [Note que há dois carreadores de carga, ambos com a mesma concentração.]

   Começamos lembrando que a relação entre a velocidade de drift e a densidade de corrente é

   $$J = env_d$$

   Já a lei de Ohm na sua versão microscópica lê-se

   $$J = \sigma E = \frac{1}{\rho} E = \frac{1}{\rho}\frac{V}{l}$$

   Juntando ambas as equações chegamos a

   $$v_d = \frac{V}{en\rho l}$$

   Note, no entanto, que há $n = 3 \times 10^{20}$ moléculas de NaCl por cm^3. Na água estas moléculas estarão dissociadas em Na^+ e Cl^-. Lembrando que uma carga positiva andando para a direita é inteiramente equivalente à uma carga negativa indo para a esquerda, podemos concluir que haverão dois carreadores de carga e, portanto, $n_{ef} = 6 \times 10^{20}$ cm^{-3} [10 casais num cinema é equivalente a 20 pessoas!]. Com isso escrevemos então

   $$v_d = \frac{12 \text{ V}}{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(6 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3})(25\ \Omega \cdot \text{cm})(200 \text{ cm})} \simeq 2,5 \times 10^{-5} \text{ cm/s}$$

   Se você tivesse usado $\rho = 25\ \Omega \cdot \text{m}$ [o que, obviamente, eu não daria errado já que o erro foi meu], então o resultado é $v_d \simeq 2,5 \times 10^{-7}$ cm/s.

3. Bateria de carro

Neste problema quero que você estime quanto tempo demora para um elétron que sai da bateria do seu carro chegar no motor de ignição ao dar a partida. Suponha que a corrente é 115 A e que os elétrons se deslocam por um fio de cobre com seção transversal de $31,2\ \text{mm}^2$ e comprimento 85,2 cm.

(a) Qual a densidade de corrente no fio?

$$J = \frac{I}{A} = \frac{115\ \text{A}}{31,2 \times 10^{-6}\ \text{m}^2} \simeq 3,68 \times 10^6\ \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

(b) Qual a velocidade de "drift" dos elétrons (você precisará da densidade de elétrons; olhe na tabela que eu te dei!)

Tomando $n = 8,47 \times 10^{22}$ elétrons/cm^3 e lembrando que $J = env_d$, teremos

$$v_d = \frac{J}{en} = \frac{3,68 \times 10^6\ \text{A/m}^2}{(1,6 \times 10^{-19}\ \text{C})(8,47 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})} \simeq 2,7 \times 10^{-4}\ \text{m/s}$$

(c) Quanto tempo o elétron irá demorar para chegar na bateria?

$$\Delta t = \frac{l}{v_d} = \frac{0.852\ \text{m}}{2,7 \times 10^{-4}\ \text{m/s}} \simeq 52,5\ \text{min}$$

4. Lâmpada

Considere uma lâmpada de 100 W ligada à uma tomada de 110 V. Suponha que a lâmpada está ligada a um tempo suficientemente longo para que as flutuações na sua temperatura tenham se tornado desprezíveis.

(a) Qual a resistência da lâmpada?

$$P = \frac{V^2}{R} \Longrightarrow R = \frac{V^2}{P} = 121\ \Omega$$

(b) Qual a corrente da lâmpada?

$$P = VI \Longrightarrow I = \frac{P}{V} = 0,91\ \text{A}$$

(c) Se você deixar a lâmpada ligada por 31 dias seguidos, quanto terá que pagar para a Eletropaulo? (Você terá que procurar o preço do kWh na sua conta de luz)

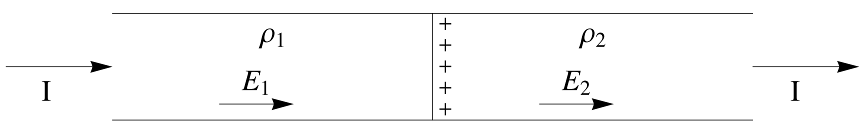
31 dias são 744 horas. Se $P = 100$ W, então a energia consumida em 31 dias será

$$\text{Energia} = 100 \times 744 = 74,4\ \text{kWh}$$

Na minha conta de luz, 1 kWh equivale a R\$ 0,2965. Portanto, terei de pagar aproximadamente R\$ 22.

5. Acúmulo de carga em junções

Mostre que na junção entre dois condutores haverá um acúmulo de carga $q_a = \epsilon_0 I(\rho_2 - \rho_1)$, onde I é a corrente que passa pelo fio e ρ_1 e ρ_2 são as resistividades de cada material. [Dica: calcule o campo elétrico em cada material e em seguida use a lei de Gauss na interface.]



A densidade de corrente é a mesma para ambos os fios, assim como a área da seção transversal. Então, da relação $J = \sigma E = E/\rho$, teremos que

$$E_1 = \frac{I}{A}\rho_1, \qquad E_2 = \frac{I}{A}\rho_2$$

Utilizando como superfície de Gauss um cilindro que engloba a interface entre os fios, vemos que o fluxo de campo será não nulo somente nas extremidades. Ou seja,

$$\Phi = \oint \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}A = AE_2 - AE_1$$

Note que na extremidade que está no material 1, a normal é na direção oposta ao campo e por essa razão o fluxo é negativo. Usando agora a lei de Gauss teremos que $\Phi = Q_{\text{int}}/\epsilon_0$. A carga interna é precisamente q_a, a carga na interface. Ou seja

$$q_a = \epsilon_0 \Phi = \epsilon_0 A(E_2 - E_1) = \epsilon_0 A \left(\frac{I}{A}\rho_1 - \frac{I}{A}\rho_2 \right)$$

$$\therefore \quad q_a = \epsilon_0 I(\rho_2 - \rho_1)$$

6. Pilhas

Todas as pilhas, AAA, AA, A, ..., D, possuem força eletromotriz máxima de 1,5 V. A diferença entre elas está no tempo de vida médio. A pilha AAA possui um tempo de vida médio de aproximadamente 0,5 A-hr ao passo que para uma bateria do tipo D (aquela que é bem, bem grande) este valor sobe para 10 A-hr. Obviamente, estes números variam de fabricante para fabricante, mas são aproximadamente corretos.

Considere, por exemplo, uma lâmpada na sua casa. Compare o quão mais caro é usar uma pilha AAA para alimentá-la, frente à eletricidade comum. Faça o mesmo para a pilha do tipo D (você terá que estimar preços para as pilhas e olhar o valor do kWh da eletricidade comum na sua conta de luz).

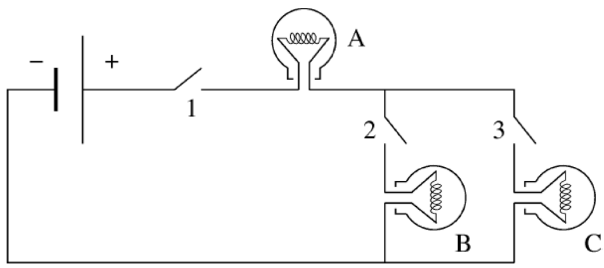
Na minha conta de luz eu pago R\$ 0,2965 pelo kWh. Para as pilhas, usando que $P = VI$, teremos

$$\begin{aligned} \text{AAA:} &\qquad 1,5 \times 0,5 = 0.75 \text{ Wh} \\ \text{D:} &\qquad 1,5 \times 10 = 15 \text{ Wh} \end{aligned}$$

Na Kalunga uma pilha AAA custa ~R\$ 2,20. Ou seja, pago R\$ 2,20 por 0,75 Wh. Então, por um kWh estarei pagando ~R\$ 2933! Já a pilha D, custa na Kalunga ~R\$ 5,00. Ou seja, o preço do kWh neste caso é R\$ 333. Portanto, mesmo para uma pilha do tipo D, a eletricidade custa aproximadamente 1000 vezes mais que a eletricidade convencional.

7. Circuitos e lâmpadas

Considere o circuito abaixo com uma bateria (com resistência interna desprezível) ligada a três lâmpadas incandescentes (A, B e C), todas com a mesma resistência, e três chaves (1, 2 e 3). Assuma que a resistência das lâmpadas seja independente da corrente e que, quando corrente passa por ela, ela brilha; quanto maior a corrente, maior será seu brilho.



Nas situações (a), (b) e (c) abaixo eu quero saber quais lâmpadas estão brilhando (e quais não estão) e qual o brilho relativo de cada (em relação às outras). Em todos os casos, discuta claramente o seu raciocínio.

(a) A chave #1 está fechada; as outras estão abertas;

Com as chaves 2 e 3 abertas, não haverá nenhum caminho para a corrente fluir e, portanto, as três lâmpadas permanecerão apagadas.

(b) As chaves #1 e #2 estão fechadas; a #3 está aberta;

Neste caso apenas as lâmpadas A e B ficarão acesas, ambas brilhando com a mesma intensidade.

(c) As três chaves estão fechadas;

As três lâmpadas estarão acesas. Mas, como a corrente que passa por A se divide para passar por B e C, a luminosidade de A será maior (B e C terão a mesma luminosidade).

(d) Agora compare os resultados dos itens (a), (b) e (c). Qual lâmpada é a mais brilhante de todas e qual a menos brilhante (lâmpadas desligadas não contam).

No item (b) a corrente passando por A e B era $I = \mathcal{E}/2R$ já que a resistência equivalente do circuito em série é $2R$. No item (c) as lâmpadas B e C se associarão em paralelo com resistência efetiva $R/2$. Em seguida, esta deve ser associada em série com A resultando em uma resistência efetiva total $3R/2$. Portanto, a corrente passando por A será $I = 2\mathcal{E}/3R$. Em termos relativos (fazendo $\mathcal{E}/R = 1$) teremos então, da maior para a menor:

- A no item (c): 2/3
- A e B no item (b): 1/2
- B e C no item (c): 1/3

8. Circuito de resistores

Considere o circuito abaixo (você pode ignorar as resistências internas de todas as baterias).

(a) Calcule a corrente através de cada bateria.

Seja I_i a corrente passando pelo resistor R_i. Atravessando o loop da esquerda no sentido horário teremos

$$-I_1R_1 + \mathcal{E}_1 - R_2I_2 - \mathcal{E}_2 = 0$$

Já para o loop da direita, também no sentido horário, obtemos:

$$-I_3R_3 + \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_2 + I_2R_2 = 0$$

Temos também que lembrar da condição auxiliar sobre as correntes, que neste caso lê-se $I_1 = I_2 + I_3$. Isso resulta no sistema de equações

$$\begin{aligned} I_1 + 2I_2 &= -2 \\ I_1 - 3I_2 &= 8 \end{aligned}$$

Subtraindo a segunda da primeira teremos

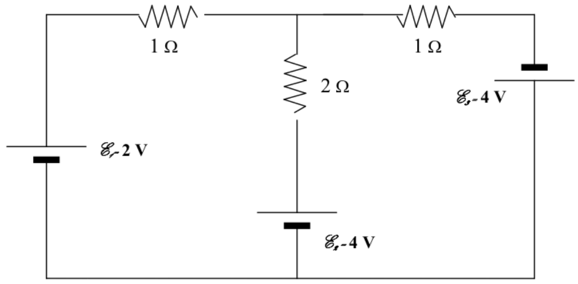
$$5I_2 = -10 \Longrightarrow I_2 = -2 \text{ A}$$

Substituindo de volta na primeira concluímos que $I_1 = 2$ A e, consequentemente, $I_3 = 4$ A.

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \text{ A} \\ I_2 &= -2 \text{ A} \\ I_3 &= 4 \text{ A} \end{aligned}$$

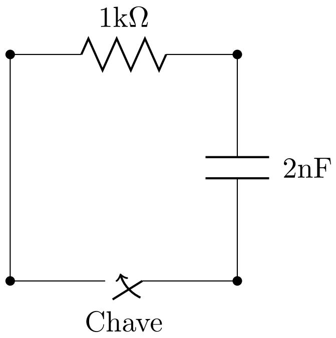
(b) A potência fornecida por uma bateria com emf $\mathcal{E}$, pela qual passa uma corrente I é $P = \mathcal{E}I$. Calcule a a potência fornecida por cada bateria.

$$\begin{aligned} P_1 &= \mathcal{E}_1 I_1 = (2 \text{ V}) \times (2 \text{ A}) = 4 \text{ W} \\ P_2 &= \mathcal{E}_2 I_2 = (4 \text{ V}) \times (2 \text{ A}) = 8 \text{ W} \\ P_3 &= \mathcal{E}_3 I_3 = (4 \text{ V}) \times (4 \text{ A}) = 16 \text{ W} \end{aligned}$$



9. Circuito RC

Considere um circuito formado por um resistor de resistência $R = 1$ kΩ ligado em série com um capacitor de capacitância $C = 2$ nF. O circuito está inicialmente isolado graças a uma chave. Suponha que o capacitor foi inicialmente carregado com uma carga q_0 através de uma bateria que, em seguida, foi removida. Então, a chave é fechada permitindo que corrente flua através do circuito.



(a) Escreva **simbolicamente** (sem números) a equação diferencial que descreve o sistema e resolva-a.

A diferença de potencial total ao atravessarmos o loop será nula. Ou seja,

$$\Delta V_R + \Delta V_C = 0$$

Por um lado, $\Delta V_C = q/C$, onde q é a carga em uma das placas do capacitor. Além disso, $\Delta V_R = -IR$. Portanto

$$RI = \frac{q}{C}$$

Inicialmente nós podemos pensar que $I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ mas isso não é verdade. O capacitor está descarregando-se. Suponha que em algum momento nós medimos por exatamente 1 s a corrente passando pelo resistor, obtendo (por exemplo), 10 C. Ou seja, $I = 10$ C/s $= 10$ A. Essa carga estava no capacitor. Antes de começarmos a cronometrar, suponha que a carga no capacitor fosse 100 C. Então, passado este 1 segundo a carga que restou foi 90 C. Ou seja,

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{90 - 100}{1} = -10 \text{ C/s}$$

Fica evidente então deste exemplo que

$$I = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

Ou seja, a taxa de variação do que passa pelo resistor é o negativo da taxa de variação do que sai do capacitor. Com isso nossa equação se torna

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC}q$$

Seja $\lambda = 1/RC$. Essa equação diz que a taxa de variação de q é um número ($-\lambda$ neste caso) vezes q. A única função cuja taxa de variação é proporcional a ela mesma é a exponencial. Ou seja,

$$q = q_0 e^{-\lambda t}$$

Note que eu coloquei uma constante q_0 pois, para qualquer constante a equação também será satisfeita. Esta constante é facilmente determinada se soubermos a carga inicial do capacitor: como pode ser visto diretamente da solução (lembrando que $e^0 = 1$), $q(t = 0) = q_0$.

(b) Calcule o tempo necessário para a carga no capacitor diminuir pela metade (numericamente neste caso).

Estou buscando o tempo $t_{1/2}$ que corresponde a solução da equação

$$q(t_{1/2}) = \frac{q_0}{2} = q_0 e^{-\lambda t_{1/2}}$$

Cancelando os q_0's e tirando o log de ambos os lados teremos

$$-\lambda t_{1/2} = \log(1/2) = -\log 2$$

Portanto

$$t_{1/2} = \frac{\log 2}{\lambda}$$

Usando que $\log 2 \simeq 0,693$ e $\lambda = 1/RC \simeq 0,5 \times 10^6\ \mathrm{s}^{-1}$, obtemos finalmente que

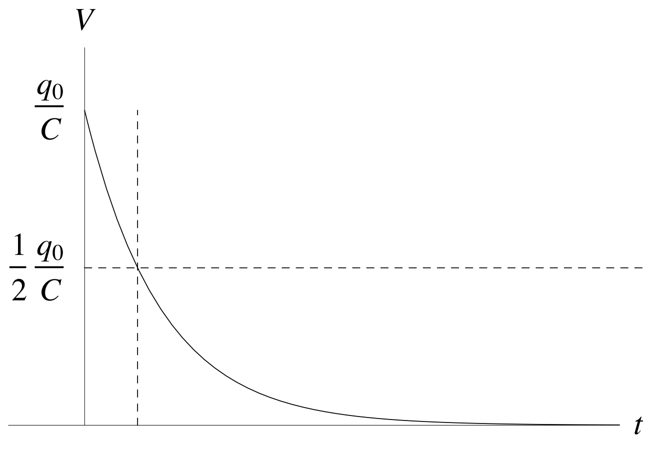
$$t_{1/2} \simeq 1,38 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}$$

(c) Esboçe um gráfico da ddp através do capacitor em função do tempo.

O potencial através do capacitor será simplesmente

$$\Delta V_C = \frac{q(t)}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-\lambda t}$$

Ou seja, seu comportamento é idêntico ao da carga, exceto que ele está multiplicado por um número. Um esboço está ilustrado na figura abaixo.



10. Datação Radiométrica

A idade da terra é estimada em $4,54$ bilhões de anos (vocês são Geólogos, devem saber disso melhor do que eu!). Esse valor é determinado através de medidas que comparam a abundância de isótopos radioativos naturais. Um exemplo é a datação de Urânio-Chumbo, normalmente feita em zircônia ($ZrSiO_4$). A zircônia incorpora átomos de U na sua estrutura cristalina como substitutos para o Zr. Mas, por outro lado, rejeita fortemente o Pb. O U-235 decai para o Pb-207 com vida média de aproximadamente 700 milhões de anos. Já o U-238 decai para o Pb-206 com vida média de aproximadamente $4,5$ bilhões de anos. Isso é útil pois fornece, para uma mesma amostra, duas medidas independentes da sua idade.

(a) O decaimento de um material radioativo é um processo aleatório. Mas, como a amostra em geral possui um número grande de átomos, podemos estudar o número de átomos do elemento radioativo em função do tempo, $N(t)$. Quanto maior o número de átomos, maior é a probabilidade que um deles decaia. Ou seja, maior será a taxa de variação de N. Escreva uma equação diferencial para $N(t)$ contendo um único parâmetro livre, λ.

Da historinha vemos que a quantidade de átomos que decaem por segundo é constante (λ). Então, a taxa de variação será simplesmente uma constante vezes a quantidade de átomos. Quanto mais átomos nós temos, mais átomos perdemos (a quantidade de folhas que caem de uma árvore é proporcional à quantidade de folhas na árvore). Assim,

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$$

(b) Calcule λ para o U-235 e o U-238 a partir do tempo de vida média do material. [Dica: use o resultado do problema anteior.]

No problema anterior encontramos a relação

$$t_{1/2} = \frac{\log 2}{\lambda}$$

Agora temos que utilizá-la na ordem inversa:

$$\lambda = \frac{\log 2}{t_{1/2}}$$

Fazendo a conta chegamos à

$$\lambda_{235} \simeq 10^{-9}\ \text{anos}^{-1}$$
$$\lambda_{238} \simeq 1,5 \times 10^{-10}\ \text{anos}^{-1}$$