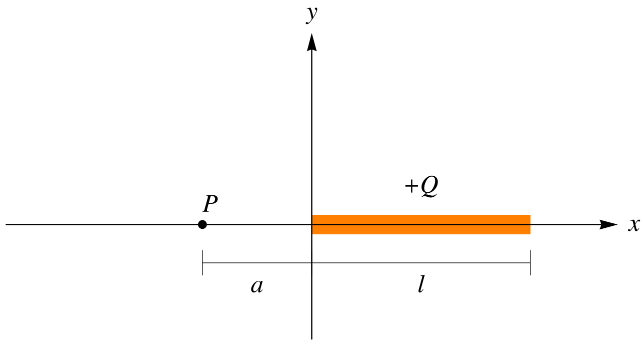
ELETROMAGNETISMO - LISTA 2

Distribuições Contínuas de Carga, Lei de Gauss e Capacitores

Data para entrega: 19 de abril

1. **Distribuições não uniformes de carga**

Considere o problema da figura abaixo, referente a um fio de comprimento l e carga total $+Q$. O fio está carregado com uma densidade linear de carga não uniforme, que varia de acordo com a relação $\lambda(x) = \lambda_0 x$.



(a) Qual a relação entre λ_0, Q e l?

(b) Qual o potencial gerado pelo fio num ponto P, situado a uma distância a do fio, à sua esquerda?

(c) Qual o campo elétrico gerado neste ponto?

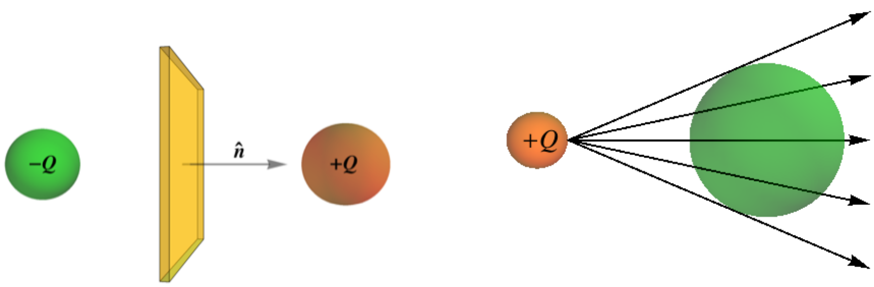
(d) Considere um elétron inicialmente em $x = -2a$ (e $y = 0$). Qual será a diferença na sua energia potencial se ele se mover até o ponto P (distância a do fio)? Se ele partiu do repouso, qual será sua velocidade ao chegar neste ponto?

Dica: no caso de densidades uniformes costumávamos escrever $\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta x}$. Para densidades não uniformes esta relação permanecerá válida somente no limite $\Delta x \to 0$. Portanto, podemos escrever $\lambda = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}$ o que implica em $\mathrm{d}q = \lambda(x)\,\mathrm{d}x$.

2. **Fluxo elétrico**

(a) (Figura da esquerda) O fluxo através da superfície plana (*aberta*) na Fig. (a) abaixo, com o vetor normal definido para a *direita*, é positivo, negativo ou nulo? Explique o seu raciocínio.

(b) (Figura da direita) O fluxo total através da superfície esférica (*fechada*) da Fig. (b) é positivo (fluxo total para fora da esfera), negativo (fluxo total para dentro da esfera) ou nulo? Explique o seu raciocínio.



(a) (b)

(c) Uma carga $+Q$ é colocada exatamente no centro de um cubo cuja aresta é a. Qual o fluxo de campo elétrico através *de cada face* do cubo? Explique o seu raciocínio.

3. **Lei de Gauss I**

Seja S uma superfície *fechada*. De acordo com a lei de Gauss, o fluxo elétrico através desta superfície é

$$\Phi = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}A = \frac{Q_{\text{interna a S}}}{\epsilon_0}$$

Considere então uma esfera maciça, de raio R, feita de um material *não* condutor e carregada homogeneamente com uma carga Q.

(a) Calcule o campo elétrico à uma distância r do centro da esfera (r pode ser maior ou menor que R).

Dica: para calcular o campo quando $r < R$, é útil calcular a densidade *volumétrica* de carga da esfera, que é constante pois a distribuição é uniforme: $\rho = \frac{Q}{V}$, onde V é o volume da esfera. Para cada r a carga interna à superfície de Gauss será diferente, mas pode ser calculada a partir de ρ.

(b) Calcule o potencial eletrostático tomando como referência $V(r \to \infty) \equiv 0$. Lembre-se, a segunda — e até o momento incompleta — equação de Maxwell diz que

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1}$$

Para $r > R$, esta equação se torna

$$V(r) = -\int_\infty^r E(r) \, \mathrm{d}r, \quad \text{para } r > R$$

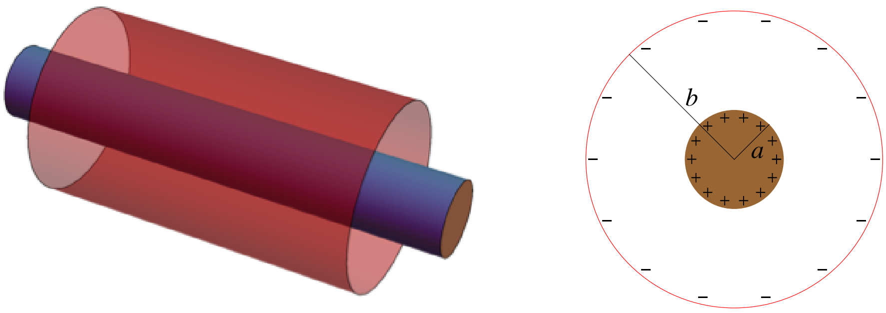
Já para $r < R$, como o campo é diferente dentro e fora da esfera, é necessário separar a integral em duas:

$$V(r) = -\left[\int_\infty^R E(r > R) \, \mathrm{d}r + \int_R^r E(r < R) \, \mathrm{d}r \right], \quad \text{para } r < R$$

Estas são as integrais que você deve calcular.

4. **Lei de Gauss II**

Considere o problema da figura abaixo, referente a um cilindro condutor e uma casca cilindrica, ambos coaxiais. O cilindro (interno) possui raio a e está carregado com uma densidade linear de carga λ. Note que, por ser condutor, a carga está concentrada na superfície, assim como ilustrado na figura (b). A casca cilíndrica (externa; espessura desprezível) possui raio b e está carregada com uma densidade linear de carga $-\lambda$. Calcule o campo elétrico em todo o espaço; ou seja, nas três regiões $r < a$, $a < r < b$ e $r > b$.



(a) Vista lateral

(b) Vista frontal

5. **Capacitor de placas paralelas**

   Em aula vimos que duas placas paralelas suficientemente extensas possuem a seguinte interessante propriedade: o campo elétrico entre as placas vale

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

   Já fora das placas, $E \simeq 0$.

   (a) Calcule a capacitância do sistema (eu fiz este cálculo em aula, mas tente refazê-lo por conta própria, sem consultar suas anotações). Para tal lembre-se que a definição de capacitância é

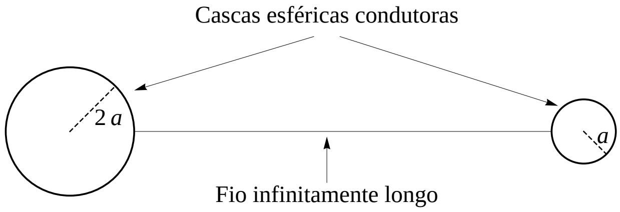
$$C = \frac{Q}{|\Delta V|},$$

   onde Q é a carga *em uma* das placas e ΔV é a diferença de potencial entre elas. Use a Eq. (1) para calcular ΔV e, em seguida, relacione σ com a área das placas (A). Sua resposta deverá conter também a separação entre elas, que é d.

   (b) Tome agora $d = 50$ µm (por sinal, este é o diâmetro médio de um fio de cabelo; informação inútil). Suponha que as placas tem um formato retangular, com a aresta menor valendo $a_1 = 1$ cm. Se a_2 for o comprimento da aresta maior, calcule C para $a_2 = 10$ cm, 1 m e 10 m. Note que, em todos os casos, $a_{1,2} \gg d$ e, portanto, a aproximação de placas infinitas deve permanecer razoável.

6. **Distribuição de carga em condutores**

   Considere o problema na figura abaixo. Inicialmente uma casca esférica condutora de raio $2a$ e carga Q foi conectada através de um fio condutor a outra casca esférica de raio a, inicialmente neutra e localizada a uma distância infinitamente longa. Ao serem conectadas, carga irá fluir pelo fio. Quando o sistema atingir o equilíbrio, qual será a carga na casca de raio $2a$?



7. **Capacitor de placas paralelas**

   Um capacitor de placas paralela é carregado através de uma bateria a uma tensão V_0 e carga Q_0. A bateria é desconectada em seguida. Se a separação entre as placas for reduzida pela metade, o que acontece com:

(a) A carga nas placas?

(b) O campo elétrico?

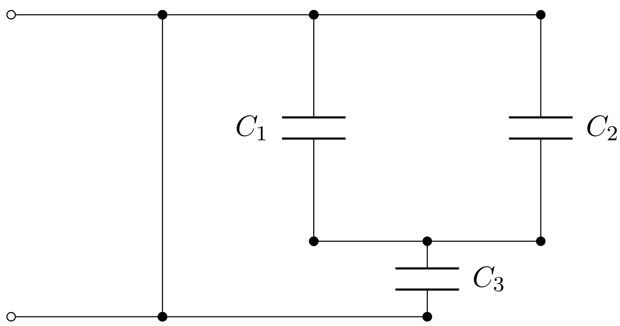
(c) A energia armazenada no sistema?

(d) O potencial?

(e) Qual foi o trabalho que você teve que realizar para reduzir a distância das placas pela metade?

8. **Associação de capacitores**

Encontre a capacitância efetiva do circuito abaixo. **Em seguida**, substitua os valores $C_1 = 5$ nF, $C_2 = 10$ nF e $C_3 = 1$ nF.

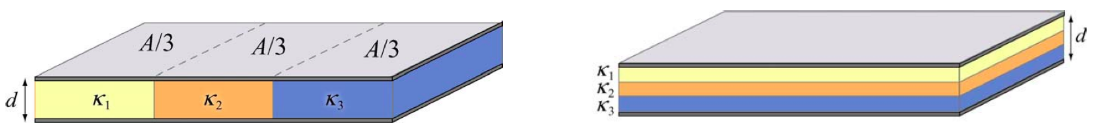


9. **Dielétricos**

Considere um capacitor de placas paralelas com área A e separação d, completamente preenchido com um material com constante dielétrica κ. Para refrescar a memória: qual a capacitância deste sistema?

(a) Considere agora o problema na figura (a) abaixo, onde as placas estão preenchidas com três materiais distintos, cada qual ocupando 1/3 do volume total. Qual a capacitância do sistema? Verifique se o seu resultado tende ao valor correto no limite $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 1$. Dica: considere o sistema equivalente de três capacitores conectados em paralelo.

(b) Faça o mesmo para o sistema ilustrado na figura (b). Dica: considere agora o sistema equivalente de três capacitores em série.



(a) (b)