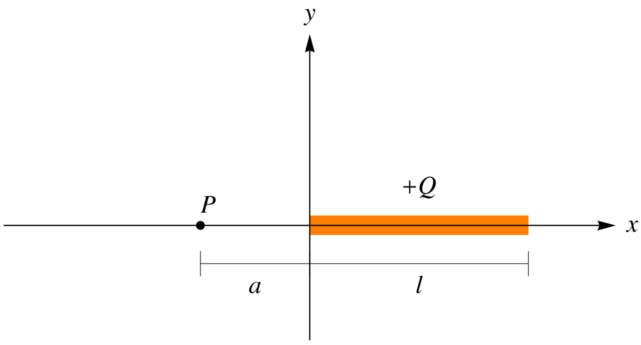
ELETROMAGNETISMO - LISTA 2 - SOLUÇÃO

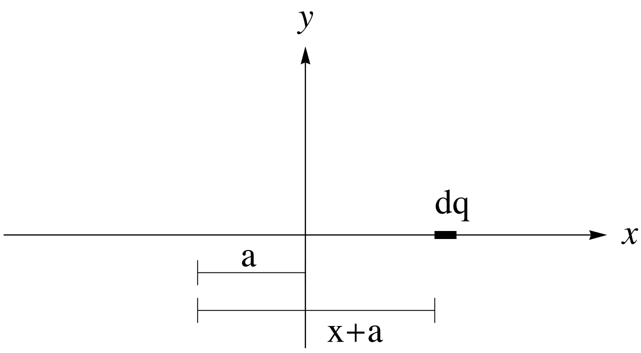
Distribuições Contínuas de Carga, Lei de Gauss e Capacitores

Data para entrega: 19 de abril

1. **Distribuições não uniformes de carga**

Considere o problema da figura abaixo, referente a um fio de comprimento l e carga total $+Q$. O fio está carregado com uma densidade linear de carga não uniforme, que varia de acordo com a relação $\lambda(x) = \lambda_0 x$.





(a) Qual a relação entre λ_0, Q e l?

A carga total é obtida integrando ("somando") as cargas infinitesimais:

$$Q = \int \mathrm{d}q = \int_0^l \lambda(x)\,\mathrm{d}x = \lambda_0 \int_0^l x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lambda_0 l^2$$

(b) Qual o potencial gerado pelo fio num ponto P, situado a uma distância a do fio, à sua esquerda?

O potencial total é obtido somando as contribuições $\mathrm{d}V$ dos potenciais gerados pelas cargas infinitesimais $\mathrm{d}q$. Ou seja,

$$V = \int \mathrm{d}V = \int \frac{k\,\mathrm{d}q}{r} = k\lambda_0 \int_0^l \frac{x\,\mathrm{d}x}{x+a}$$

Para calcular a integral eu somo $0 = a - a$ no numerador:

$$\frac{x}{x+a} = \frac{x+a-a}{x+a} = 1 - \frac{a}{x+a}$$

Com isso,

$$V = k\lambda_0 \left[\int_0^l \mathrm{d}x - a \int_0^l \frac{\mathrm{d}x}{x+a} \right]$$

$$\therefore V = k\lambda_0 \left[l - a \log\left(\frac{l+a}{a} \right) \right]$$

(c) Qual o campo elétrico gerado neste ponto?

Por simetria sabemos que o campo será para a esquerda e, portanto, escrevemos

$$\boldsymbol{E} = E_x(-\hat{\boldsymbol{\imath}}), \qquad E_x > 0$$

Usando a mesma estratégia do item (b) teremos que:

$$E_x = \int \mathrm{d}E_x = \int \frac{k\,\mathrm{d}q}{r^2} = k\lambda_0 \int_0^l \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+a)^2}$$

Novamente,

$$\frac{x}{(x+a)^2} = \frac{1}{x+a} - \frac{a}{(x+a)^2}$$

Assim:

$$E_x = k\lambda_0 \left[\int_0^l \frac{\mathrm{d}x}{x+a} - a \int_0^l \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^2} \right]$$

$$\therefore \qquad E_x = k\lambda_0 \left[\log\left(\frac{l+a}{a} \right) - \frac{l}{l+a} \right]$$

(d) Considere um elétron inicialmente em $x = -2a$ (e $y = 0$). Qual será a diferença na sua energia potencial se ele se mover até o ponto P (distância a do fio)? Se ele partiu do repouso, qual será sua velocidade ao chegar neste ponto?

A diferença de energia será simplesmente:

$$\Delta U = e\,[V(a) - V(2a)] = ek\lambda_0 \left\{ \left[l - a\log\left(\frac{l+a}{a} \right) \right] - \left[l - 2a\log\left(\frac{l+2a}{2a} \right) \right] \right\}$$

$$\therefore \qquad \Delta U = kek\lambda_0 a \left[2\log\left(\frac{l+2a}{2a} \right) - \log\left(\frac{l+a}{a} \right) \right]$$

$$\text{ou,} \qquad \Delta U = ek\lambda_0 a \log\left[\frac{(1+l/2a)^2}{1+l/a} \right]$$

O fio está positivamente carregado e o elétron será atraído na sua direção. Consequentemente, sua energia deve diminuir; ou seja, $\Delta U < 0$, o que de fato é observado uma vez que $e < 0$.

Por conservação de energia, chamando de E_i a energia em $x = -2a$ e E_f a energia em $x = -a$, teremos:

$$E_i = E_f \longrightarrow T_i + U_i = T_f + U_f,$$

onde T é a energia cinética. Como o elétron partiu do repouso, $T_i = 0$ e, portanto,

$$T_f = U_i - U_f = -\Delta U$$

A energia cinética é sempre positiva e, como vemos, o resultado sai naturalmente correto. Lembrando que $T = \frac{1}{2}mv^2$, onde m é a massa do elétron e v a velocidade final, chegamos a

$$v = \sqrt{\frac{m}{2}(-\Delta U)} = \sqrt{\frac{m}{2}|e|k\lambda_0 a \log\left[\frac{(1+l/2a)^2}{1+l/a} \right]}$$

Dica: no caso de densidades uniformes costumávamos escrever $\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta x}$. Para densidades não uniformes esta relação permanecerá válida somente no limite $\Delta x \to 0$. Portanto, podemos escrever $\lambda = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}$ o que implica em $\mathrm{d}q = \lambda(x)\,\mathrm{d}x$.

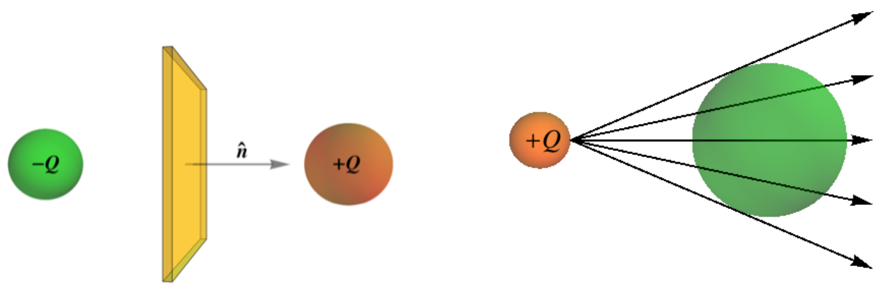
2. **Fluxo elétrico**

(a) (Figura da esquerda) O fluxo através da superfície plana (*aberta*) na Fig. (a) abaixo, com o vetor normal definido para a *direita*, é positivo, negativo ou nulo? Explique o seu raciocínio.

O campo vai da carga positiva para a negativa, portanto da direita para a esquerda. Já o vetor normal vai na direção oposta. Portanto, $\boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} < 0$ ao longo de toda a superfície. Consequentemente, o fluxo $\Phi = \int \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}A$ também será **negativo**. Obviamente, isso depende da escolha para o vetor normal. No entanto, quando a superfície é fechada como no próximo item, esta ambiguidade deixa de existir; para superfícies fechadas o vetor normal sempre aponta para fora da superfície.

(b) (Figura da direita) O fluxo total através da superfície esférica (*fechada*) da Fig. (b) é positivo (fluxo total para fora da esfera), negativo (fluxo total para dentro da esfera) ou nulo? Explique o seu raciocínio.

Neste caso a superfície é fechada e a lei de Gauss pode ser aplicada: $\Phi = Q_{\text{interna a superfície}}/\epsilon_0$. Como a única carga presente se encontra fora da superfície, o fluxo deve necessariamente ser **nulo**.



(a) (b)

(c) Uma carga $+Q$ é colocada exatamente no centro de um cubo cuja aresta é a. Qual o fluxo de campo elétrico através *de cada face* do cubo? Explique o seu raciocínio.

O cubo é uma superfície fechada e podemos, portanto, aplicar a lei de Gauss: $\Phi = Q/\epsilon_0$. Por simetria, como a carga está exatamente no centro do cubo, o fluxo será o mesmo através de cada uma de suas faces. Um cubo possui 6 faces e, portanto,

$$\Phi_{\text{cada face}} = \frac{1}{6}\frac{Q}{\epsilon_0}$$

Cuidado: se a carga não estivesse no centro do cubo, isso não seria verdade: o fluxo *total* através do cubo continuaria sendo Q/ϵ_0, mas o fluxo através de cada face seria diferente.

3. **Lei de Gauss I**

Seja S uma superfície *fechada*. De acordo com a lei de Gauss, o fluxo elétrico através desta superfície é

$$\Phi = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}A = \frac{Q_{\text{interna a S}}}{\epsilon_0}$$

Considere então uma esfera maciça, de raio R, feita de um material *não* condutor e carregada homogeneamente com uma carga Q.

(a) Calcule o campo elétrico à uma distância r do centro da esfera (r pode ser maior ou menor que R).

Dica: para calcular o campo quando $r < R$, é útil calcular a densidade *volumétrica* de carga da esfera, que é constante pois a distribuição é uniforme: $\rho = \frac{Q}{V}$, onde V é o volume da esfera. Para cada r a carga interna à superfície de Gauss será diferente, mas pode ser calculada a partir de ρ.

Para $r > R$, minha superfície de Gauss será uma esfera concêntrica de raio r. Por simetria, o campo será paralelo à normal da superfície e constante. Assim,

$$\Phi = EA = E(4\pi r^2)$$

Usando a lei de Gauss, a carga interna à minha superfície será Q, a carga total da esfera. Portanto,

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{kQ}{R^2}$$

Como esperado, o campo fora da esfera é o mesmo de uma carga pontual concentrada no seu centro. Quando $r < R$ a minha superfície será uma esfera concêntrica de raio r. Os mesmo argumentos de simetria do outro caso podem ser aplicados e, portanto, escrevemos imediatamente que $\Phi = E(4\pi r^2)$. No entanto, a carga interna à superfície será diferente para cada valor de r, pois a esfera está uniformemente carregada. Seja

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3},$$

a densidade volumétrica de carga. A carga dentro de uma esfera de raio $r < R$ será

$$q(r) = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = Q\frac{r^3}{R^3}$$

Assim,

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}\frac{r^3}{R^3} \longrightarrow E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

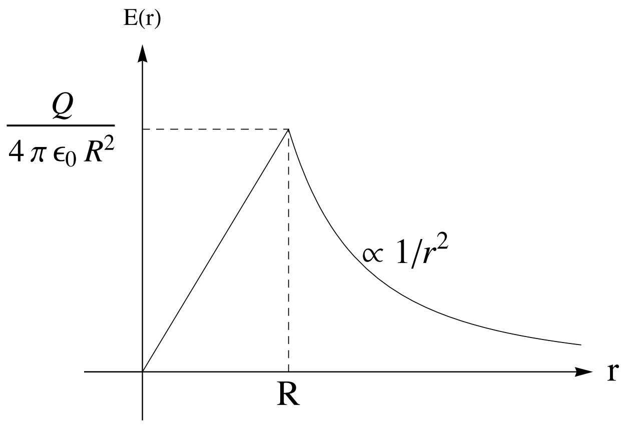
Outra forma de escrever este resultado é

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

Em suma, o campo elétrico em todo o espaço será:

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \frac{kQr}{R^3}\hat{\boldsymbol{r}} & \text{para } r < R, \\ \frac{kQ}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} & \text{para } r > R \end{cases}$$

A figura abaixo ilustra o gráfico do campo elétrico. Note que ele é contínuo, diferentemente do caso de uma esfera condutora. O campo elétrico sofre discontinuidades sempre que atravessa uma região com densidade superficial de carga. Neste caso a densidade e volumétrica e, portanto, não haverão discontinuidades.



(b) Calcule o potencial eletrostático tomando como referência $V(r \to \infty) \equiv 0$. Lembre-se, a segunda — e até o momento incompleta — equação de Maxwell diz que

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1}$$

Para $r > R$, esta equação se torna

$$V(r) = -\int_\infty^r E(r)\,\mathrm{d}r, \quad \text{para } r > R$$

Já para $r < R$, como o campo é diferente dentro e fora da esfera, é necessário separar a integral em duas:

$$V(r) = -\left[\int_\infty^R E(r > R)\,\mathrm{d}r + \int_R^r E(r < R)\,\mathrm{d}r\right], \quad \text{para } r < R$$

Estas são as integrais que você deve calcular.

Para $r > R$ sabemos que o campo se comporta como uma carga pontual e, portanto, o mesmo será verdade para o potencial: $V(r) = kQ/r$. Para $r < R$ teremos duas contribuições. A primeiro, referente à integral de ∞ até R será $V(r) = kQ/R$. A outra ainda precisamos calcular:

$$V(r) = \frac{kQ}{R} - \int_R^r \frac{kQr'}{R^3}\,\mathrm{d}r' = \frac{kQ}{R} - \frac{kQ}{R^3}\left(\frac{r^2 - R^2}{2}\right)$$

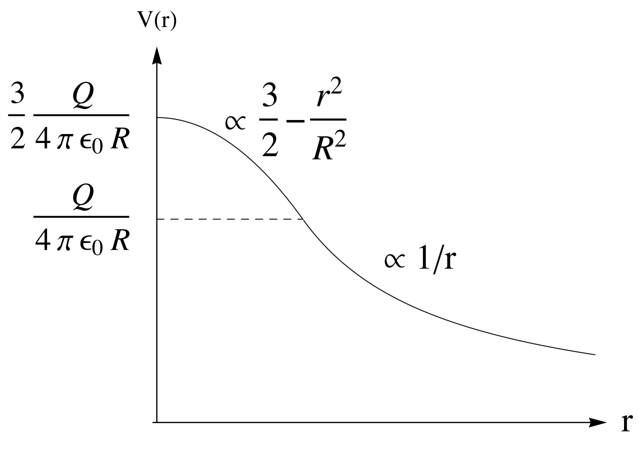
Ou seja,

$$V(r) = \frac{kQ}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Em suma, o potencial em todo o espaço será:

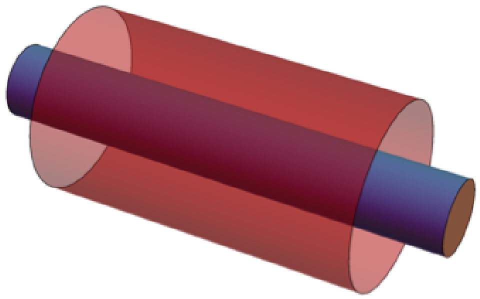
$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{kQ}{2R}\left(3 - \dfrac{r^2}{R^2}\right) & \text{para } r < R, \\ \dfrac{kQ}{R} & \text{para } r > R \end{cases}$$

A figura abaixo mostra o gráfico de $V(r)$.

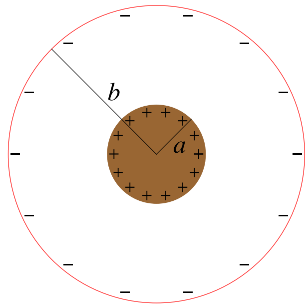


4. **Lei de Gauss II**

Considere o problema da figura abaixo, referente a um cilindro condutor e uma casca cilindrica, ambos coaxiais. O cilindro (interno) possui raio a e está carregado com uma densidade linear de carga λ. Note que, por ser condutor, a carga está concentrada na superfície, assim como



(a) Vista lateral



(b) Vista frontal

ilustrado na figura (b). A casca cilíndrica (externa; espessura desprezível) possui raio b e está carregada com uma densidade linear de carga $-\lambda$. Calcule o campo elétrico em todo o espaço; ou seja, nas três regiões $r < a$, $a < r < b$ e $r > b$.

Quando $r < a$ estamos dentro do cilindro condutor e, como o campo dentro de um condutor estático é sempre nulo (pois se não fosse as cargas continuariam se movendo!), temos que

$$E(r < a) = 0$$

Entre $a < r < b$ escolhemos como superfície de Gauss um cilíndrico concentrico de raio r e comprimento l (se tudo der certo, em algum momento o comprimento deve sair do problema; afinal, se eu escolher $l = 10$ cm e você escolher $l = 20$ cm, o campo deve continuar o mesmo. Por simetria o campo será paralelo à normal da superfície e constante ao longo dela. Ou seja,

$$\Phi = EA = E(2\pi r l)$$

Se você não lembra que a área de um cilindro é $A = 2\pi r l$, não se preocupe, é fácil: basta pensar no cilindro como uma folha enrolada. Se você desenrolá-lo, terá uma folha retangular de arestas $2\pi r$ (o perímetro de um círculo) e l.

A carga interna à superfície é $Q_{\text{int}} = \lambda l$. Usando a lei de Gauss teremos então

$$E(2\pi r l) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$\therefore \quad E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Ufa! os l's se cancelaram. Note que o campo do cilindro cai com $1/r$. Essa talvez seja uma boa hora para eu colocar a seguinte tabela:

Sistema	Campo
Dipolo elétrico	$E \propto 1/r^3$
Carga pontual	$E \propto 1/r^2$
Fio infinito	$E \propto 1/r$
Plano infinito	E const.

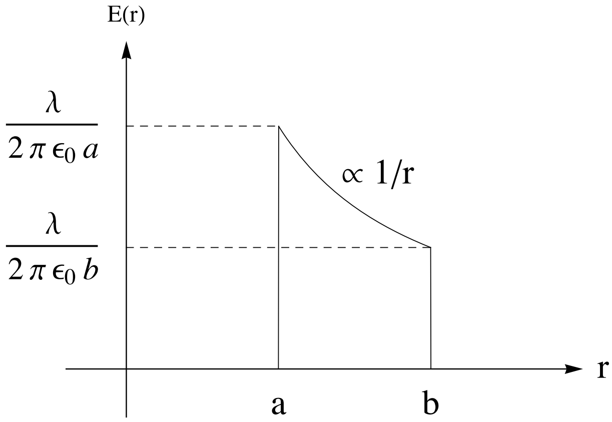
Ainda falta calcularmos o campo para $r > b$. Neste caso minha superfície de Gauss será um cilindro concêntrico de raio r e comprimento l. Os mesmos argumentos de antes me permitem escrever $\Phi = E(2\pi r l)$. No entanto, a carga total interna à minha superfície será

$$Q_{\text{int}} = Q_{\text{Cilindro de raio a}} + Q_{\text{Casca de raio b}} = \lambda l - \lambda l = 0$$

Portanto, o campo fora da casca cilíndrica será $E = 0$. Em suma, o campo em todo o espaço será

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} 0 & \text{para } r < a, \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{\boldsymbol{r}} & \text{para } a < r < b, \\ 0 & \text{para } r > b \end{cases}$$

Aqui $\boldsymbol{r}$ é o vetor radial que sai do cilindro.Um gráfico do campo elétrico em função de r está ilustrado na figura abaixo. Como pode ser observado, ele sofre duas discontinuidades ao atravessar as superfícies de cada cilindro.



Vale mencionar que este cilindro é uma boa aproximação para o cabo coaxial (aquele da TV à cabo). Aquele fiozinho chato que sai dele, que você nunca consegue encaixar atrás da televisão, é representado pelo cilindro interno. O cabo, cujo raio é muito maior que o do fio, é representado pela casca condutora; de fato, ele é condutor (!) pois sua parede interna é revestida com um material metálico (como papel alumínio). Obviamente, neste caso as cargas não estão paradas. Pelo contrário, o sinal é de alta frequência e as cargas oscilam loucamente. Mesmo assim, entender as propriedades estáticas é um bom primeiro passo.

5. **Capacitor de placas paralelas**

Em aula vimos que duas placas paralelas suficientemente extensas possuem a seguinte interessante propriedade: o campo elétrico entre as placas vale

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Já fora das placas, $E \simeq 0$.

(a) Calcule a capacitância do sistema (eu fiz este cálculo em aula, mas tente refazê-lo por conta própria, sem consultar suas anotações). Para tal lembre-se que a definição de capacitância é

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|},$$

onde Q é a carga *em uma* das placas e ΔV é a diferença de potencial entre elas. Use a Eq. (1) para calcular ΔV e, em seguida, relacione σ com a área das placas (A). Sua resposta deverá conter também a separação entre elas, que é d.

A carga é fácil: $Q = \sigma A$. A diferença de potencial será

$$\Delta V = -\int_{+}^{-} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -E \int_{+}^{-} \mathrm{d}x = -Ed$$

Ou seja,

$$|\Delta V| = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

Portanto,

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} d} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

(b) Tome agora $d = 50$ µm (por sinal, este é o diâmetro médio de um fio de cabelo; informação inútil). Suponha que as placas tem um formato retangular, com a aresta menor valendo $a_1 = 1$ cm. Se a_2 for o comprimento da aresta maior, calcule C para $a_2 = 10$ cm, 1 m e 10 m. Note que, em todos os casos, $a_{1,2} \gg d$ e, portanto, a aproximação de placas infinitas deve permanecer razoável.

Para economizar ATPs, posso escrever

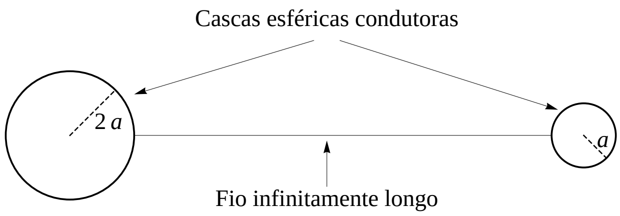
$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{(8,854 \times 10^{-12})(0.01 \times a_2)}{50 \times 10^{-6}} \simeq 1,77 \times 10^{-9} a_2$$

Com isso:

a_2	C (nF)
10 cm	0,177
1 m	1,77
10 m	17,7

6. **Distribuição de carga em condutores**

Considere o problema na figura abaixo. Inicialmente uma casca esférica condutora de raio $2a$ e carga Q foi conectada através de um fio condutor a outra casca esférica de raio a, inicialmente neutra e localizada a uma distância infinitamente longa. Ao serem conectadas, carga irá fluir pelo fio. Quando o sistema atingir o equilíbrio, qual será a carga na casca de raio $2a$?



Ao atingir o equilíbrio, todas as superfícies serão equipotenciais. Chamemos a esfera de raio $2a$ de A e a outra de B. Então:

$$V(A) = \frac{kQ_A}{R_A} = \frac{kQ_B}{R_B} = V(B)$$

Ou seja,

$$Q_A = \frac{R_A}{R_B} Q_B = \frac{2a}{a} Q_B = 2Q_B$$

Portanto, a esfera de raio $2a$ terá duas vezes mais carga que a esfera de raio a. No entanto, a carga total é fixa e vale Q. Ou seja, $Q_A + Q_B = Q$. Como uma é o dobro da outra, concluímos que a carga total na esfera de raio $2a$ será

$$Q_A = \frac{2}{3} Q$$

7. **Capacitor de placas paralelas**

Um capacitor de placas paralela é carregado através de uma bateria a uma tensão V_0 e carga Q_0. A bateria é desconectada em seguida. Se a separação entre as placas for reduzida pela metade, o que acontece com:

(a) A carga nas placas?

Como desconectamos a bateria, a carga está aprisionada e não pode ir a lugar algum. Ou seja, a carga permanece **constante**.

(b) O campo elétrico?

O campo elétrico é $E = \sigma/\epsilon_0$. Como $\sigma = Q/A$ também é constante, o mesmo será verdade para o campo: E permanece **constante**.

(c) A energia armazenada no sistema?

Podemos utilizar a relação $U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$. A carga permanece a mesma, mas a capacitância aumenta por um fator 2 já que $C \propto 1/d$. Portanto, a energia deve **diminuir** por um fator 2.

(d) O potencial?

Vejamos duas formas de resolver este problema: Primeiro, notando que $\Delta V = \frac{Q}{C}$, como a carga permanece a mesma e a capacitância aumenta por um fator 2, a voltagem deverá **diminuir** por um fator 2. Podemos pensar também através da relação $U = Q\Delta V$. Como a carga permanece a mesma, qualquer mudança em ΔV deve ser proporcional às mudanças em U, que diminui por um fator 2.

(e) Qual foi o trabalho que você teve que realizar para reduzir a distância das placas pela metade?

A energia do sistema diminuiu, o que é intuitivo uma vez que as placas se atraem. Portanto, o trabalho que você realizou deve ser negativo (o sistema realizou trabalho em você). Como sempre, o trabalho corresponde à variação na energia potencial. Podemos escrever

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\epsilon_0 A}$$

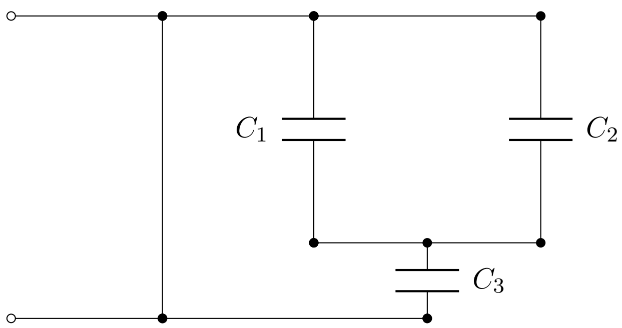
Assim,

$$W = \Delta U = U_{\text{final}} - U_{\text{inicial}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\epsilon_0 A}\left(\frac{d}{2} - d\right) = -\frac{1}{4}\frac{Q^2 d}{\epsilon_0 A}$$

Negativo, como esperado.

8. **Associação de capacitores**

Encontre a capacitância efetiva do circuito abaixo. **Em seguida**, substitua os valores $C_1 = 5$ nF, $C_2 = 10$ nF e $C_3 = 1$ nF.



Os capacitores C_1 e C_2 estão associados em paralelo e, portanto,

$$C_{12} = C_1 + C_2$$

já o capacitor efetivo C_{12} está associado em série com o capacitor C_3 e, portanto,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3}$$

Ou seja,

$$C = \frac{C_{12}C_3}{C_{12} + C_3} = \frac{(C_1 + C_2)C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

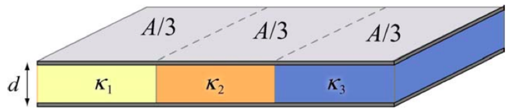
Usando os valores numéricos temos $C_{12} = 15$ nF. Ou seja, a capacitância efetiva é maior. No entanto, ao associarmos C_{12} com C_3 teremos

$$C = \frac{15}{16} \text{ nF} \simeq 0.93 \text{ nF}$$

Ou seja, a capacitância final é menor, inclusive, que a do capacitor C_3.

9. **Dielétricos**

Considere um capacitor de placas paralelas com área A e separação d, completamente preenchido com um material com constante dielétrica κ. Para refrescar a memória: qual a capacitância deste sistema?



(c)

(d)

A capacitância é $C = \epsilon_0 A\kappa/d$.

(a) Considere agora o problema na figura (a) abaixo, onde as placas estão preenchidas com três materiais distintos, cada qual ocupando $1/3$ do volume total. Qual a capacitância do sistema? Verifique se o seu resultado tende ao valor correto no limite $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 1$. Dica: considere o sistema equivalente de três capacitores conectados em paralelo.

Considerando o sistema como três capacitores associados em paralelo, cada um com área $A/3$, teremos que

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = \frac{\epsilon_0 A/3}{d}\kappa_1 + \frac{\epsilon_0 A/3}{d}\kappa_2 + \frac{\epsilon_0 A/3}{d}\kappa_3$$

$$\therefore \qquad C = \frac{\epsilon_0 A}{3d}\left(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3\right)$$

(b) Faça o mesmo para o sistema ilustrado na figura (b). Dica: considere agora o sistema equivalente de três capacitores em série.

Considerando o sistema como três capacitores associados em série, cada um com espessura $d/3$, teremos que

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{d/3}{\epsilon_0 A\kappa_1} + \frac{d/3}{\epsilon_0 A\kappa_2} + \frac{d/3}{\epsilon_0 A\kappa_3}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{d/3}{\epsilon_0 A}\left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_3}\right)$$

$$\therefore \qquad C = \frac{3\epsilon_0 A}{d}\left(\frac{1}{\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_3}}\right)$$