ELETROMAGNETISMO - LISTA 1

Distribuições Discretas de Carga

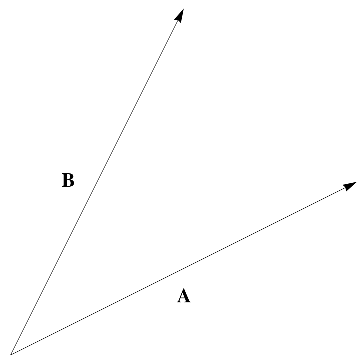
Para nota: (7), (8), (9a) e (10)

NOVA DATA LIMITE: quinta-feira, 29/03 (a data anterior era 22/03)

Parte 1: revisão de matemática

(1) Lei dos cosenos

Considere os vetores $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ na figura abaixo. Seja $a = |\boldsymbol{A}|$ e $b = |\boldsymbol{B}|$.



(a) Calcule $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ em termos de a, b e θ (o ângulo entre $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$).
(b) Indique na figura o vetor $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$.
(c) Calcule $c = |\boldsymbol{C}|$ e mostre que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

(2) Álgebra vetorial

Dados os vetores $\boldsymbol{A} = 3\hat{\boldsymbol{i}} - 2\hat{\boldsymbol{j}} + \hat{\boldsymbol{k}}$ e $\boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{i}} + \hat{\boldsymbol{j}} - 3\hat{\boldsymbol{k}}$, calcule:
(a) $3\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$
(b) $\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{B}$
(c) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$
(d) O ângulo entre $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$
(e) Um vetor unitário na direção de $\boldsymbol{A}$ e um vetor unitário na direção de $\boldsymbol{B}$
(f) Um vetor unitário simultaneamente perpendicular a $\boldsymbol{A}$ e a $\boldsymbol{B}$

(3) Campos vetoriais

Vá ao endereço: `http://web.mit.edu/viz/EM/visualizations/vectorfields/`.

Clique no aplicativo *Field Mapping Application* e em seguida clique na imagem para lançar o aplicativo. No momento, estamos interessados em campos vetoriais, que podem ser desenhados com o comando "Electric Field: Grass Seeds". Neste aplicativo, você pode tanto escrever uma função arbitrária, quanto analisar exemplos pré-definidos e vencedores de concursos (este aplicativo está vinculado ao curso equivalente ao nosso no MIT, lá chamado de 8.02). Faça um gráfico das seguintes funções:

(a) $\boldsymbol{v} = 3\hat{\boldsymbol{i}} - 5\hat{\boldsymbol{j}}$

(b) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{i}} + y\hat{\boldsymbol{j}}$

(c) $\boldsymbol{v} = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$

(d)$\boldsymbol{v} = \frac{3xy}{r^5}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{2y^2-x^2}{r^5}\hat{\boldsymbol{j}}$

Utilize o comando *Save Image to JPG* para guardar uma cópia dos seus resultados. Análise também os vencedores de concursos, há campos interessantíssimos.

(4) Derivadas parciais

Para as funções $f(x,y)$ abaixo, calcule $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$. Lembre-se, derivadas parciais são calculadas tratando a outra variável como uma constante. Por exemplo, se $f(x,y) = xy$, então $\partial f/\partial x = y$.

(a) $f(x,y) = \sin(xy)$

(b) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(5) Gradiente

O gradiente de um campo escalar $f(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é o vetor dado por

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{k}}$$

Aqui, ∇ (lê-se "nabla") é um operador diferencial (a idéia de um triângulo invertido, eu acredito, deve ser para lembrar-nos de Δ, já que se trata de uma diferenciação). Calcule o gradiente das seguintes funções:

(a) $f(x,y,z) = \log(xyz)$

(b) $f(x,y,z) = e^{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}$

(c) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Onde $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{i}} + y\hat{\boldsymbol{j}} + z\hat{\boldsymbol{k}}$ e $\boldsymbol{p}$ é um vetor constante qualquer ($\boldsymbol{p} = p_x\hat{\boldsymbol{i}} + p_y\hat{\boldsymbol{j}} + p_z\hat{\boldsymbol{k}}$)

Parte 2: distribuições discretas de carga

(6) Átomo de hidrogênio

No modelo clássico do átomo de hidrogênio, o elétron orbita em torno do própton com um raio $r = 0,53\times10^{-10}$m. A carga do próton é a mesma que a do elétron e vale, em módulo, $e = 1,6\times10^{-19}$C.

(a) Qual a magnitude da força elétrica que o próton exerce no elétron?

(b) Se esta força é responsável pela aceleração centrípeta do elétron, qual a sua velocidade?

(c) Qual a magnitude do campo elétrico do próton a uma distância r dele?

(d) Qual a razão das magnitudes da força elétrica e gravitacional entre o elétron e o próton? Esse resultado depende da distância entre ambos?

(7) Experimento de Milikan

Robert A. Milikan foi um pesquisador da Caltech (California Institute of Technology), ganhador do prêmio Nobel em física em 1923. O motivo do prêmio: ele mostrou que a carga é quantizada e calculou seu valor fundamental: $e = 1,6 \times 10^{19}$C, a carga do próton ou do elétron. Isso se deu através de um engenhoso experimento, conhecido como *experimento da gota de óleo*, que discutimos agora.

Através de um borrifador, Milikan produzia pequenas gotas de óleo em uma câmara conectada a um microscópio ótico, com o qual ele podia acompanhar sua trajetória. Suponha que o raio de uma gota é $r = 1,64 \times 10^{-6}$m e sua densidade é $\rho = 8,51 \times 10^2 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Em frente ao borrifador, há uma pequena esfera de vidro. Quando as gotas são produzidas, elas colidem com a esfera e podem absorver ou doar elétrons, tornando-se carregadas (carga q). Na câmara onde a gota se encontra, duas placas paralelas produzem um campo elétrico constante na direção vertical, $\boldsymbol{E} = E_y\hat{\boldsymbol{\jmath}}$. Millikan sabia exatamente o valor do campo elétrico; sua estratégia, portanto, era encontrar um valor tal que a força eletrostática se igualasse a força gravitacional. Ou seja, tal que a gota ficasse em repouso.

(a) Qual a massa da gota (supondo-a esférica por simplicidade)?

(b) Faça um desenho da gota e indique a direção e o sentido da força gravitacional. Qual deve ser a direção da força elétrica, para que a partícula fique em repouso? Desenhe-a também na mesma figura.

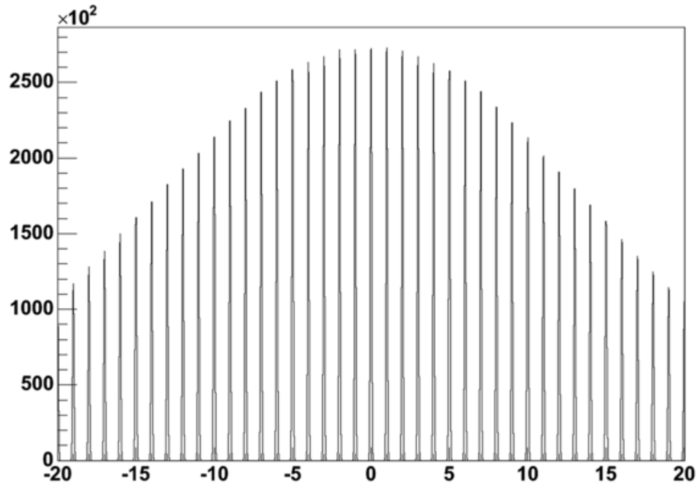
(c) Suponha que $q > 0$. Indique na figura a direção e o sentido do campo elétrico necessário para manter a partícula em repouso. Faça o mesmo para o caso $q < 0$.

(d) Suponha que o campo que Milikan encontrou foi $E_y = 1,92 \times 10^5$N/C, *orientado para baixo*. Sem realizar nenhum cálculo, qual deve ser o sinal da carga da gota de óleo? Ela possui um excesso ou uma deficiência de elétrons?

(e) Calcule a carga da gota.

(f) Divida o seu resultado pela carga fundamental do elétron. O valor que você encontrou não é coincidência.

Realizando esta mesma análise para diferentes gotas é possível construir um gráfico do número de gotas com cada valor de carga, como na figura abaixo. Como pode ser observado, há picos muito bem definidos, com zero contagens entre eles. A distância média entre os picos é portanto a carga elementar.



Esta imagem não corresponde exatamente ao que Milikan observou na sua época, onde a análise de cada gota era bastante trabalhosa. Esta figura na verdade corresponde a um experimento mais moderno, de 2007, da Universidade de Stanford (`http://www.slac.stanford.edu/exp/mps/FCS/FCS.htm`). Neste gráfico foram analisadas mais de 100 milhões de gotas (de forma automatizada obviamente). O objetivo é testar a existência de cargas fracionárias, menores que e. Nós sabemos que elas existem, nos quarks que compõem os prótons e nêutrons (os elétrons não são compostos por sub-partículas). Os diferentes tipos de quarks podem possuir cargas $1/3e$ ou $2/3e$. O problema é que, de acordo com diversas teorias, não é possível para uma carga fracionária existir livre na natureza, mas somente combinada com outras cargas fracionárias, como no núcleo do átomo. No entanto, podemos fazer a seguinte pergunta: a probabilidade de encontrar um quark livre é nula, ou simplesmente baixíssima? É isto que este experimento procura investigar. Até o momento, para as mais de 100 milhões de gotas estudadas, a resposta é: nula.

(8) Campo e potencial de três cargas pontuais II

Considere o sistema da figura abaixo.

(a) Qual o campo elétrico no quarto canto do quadrado (onde há uma carga faltando)?

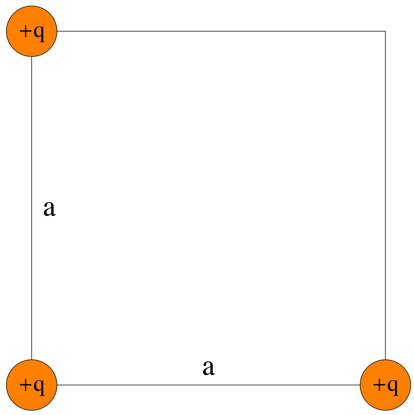
(b) Qual o potencial eletrostático neste canto?

(c) Use a definição $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ para calcular o campo elétrico e verifique se sua resposta concorda com o item (a).

(d) Qual a energia necessária para trazer uma quarta carga q, do infinito, até este canto do quadrado?

(e) Qual foi a energia total necessária para montar o sistema com três cargas?

(9) Calculando $\boldsymbol{E}$ a partir de V



(a) Suponha que em uma certa região do espaço o potencial eletrostático seja dado por

$$V(x,y,z) = V_0 - E_0 z + \frac{E_0 a^3 z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

onde a é uma constante com dimensão de comprimento. Calcule as componentes x, y e z do campo elétrico.

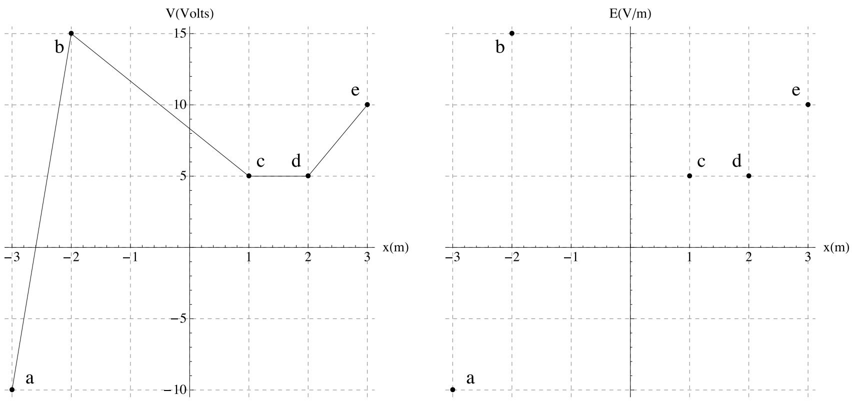
(b) Suponha agora que

$$V(x,y,z) = V_0 e^{-k|z|} \cos kx$$

Calcule as componentes x, y e z do campo elétrico.

(10) Calculando o campo elétrico a partir de um gráfico do potencial

Suponha que em um experimento o potencial eletrostático foi medido em função da posição x (sabemos que ele não varia em y ou em z). Os resultados estão mostrados na figura abaixo



(a) Em qual intervalo E_x possui o seu maior valor (ignore o comportamento nos extremos de cada intervalo)?

(b) E onde ele possui o seu menor valor?

(c) Faça um gráfico de E_x em função de x (na figura da direita). Note que nos pontos a, b, ... o campo sofre uma discontinuidade. Não se esqueça de incluir a escala do eixo vertical.