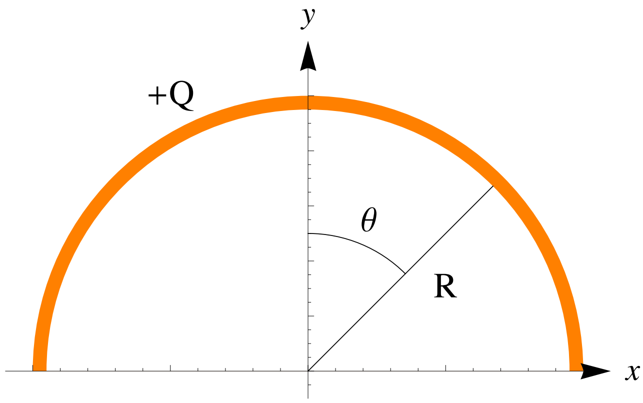
EXERCÍCIOS PARA A SEMANA SANTA

SOLUCÃO

1. Considere o problema na figura abaixo, referente a um fio semicircular com carga total Q e raio R. Calcule o potencial eletrostático e o campo elétrico na origem.



O potencial é simples: basta usar a definição:

$$V = \int \mathrm{d}V = \int \frac{k\,\mathrm{d}q}{R}$$

Como R é o mesmo para todos os elementos de carga $\mathrm{d}q$, ele pode ser tirado da integral:

$$V = \int \frac{k\,\mathrm{d}q}{R} = \frac{k}{R}\int \mathrm{d}q = \frac{kQ}{R}$$

Já para o campo elétrico, devemos tomar um pouco de cuidado. Em primeiro lugar, por simetria é possível inferir que o campo será na direção y, o que nos permite focar somente em:

$$E_y = \int \mathrm{d}E_y = \int \mathrm{d}E\cos\theta \qquad (1)$$

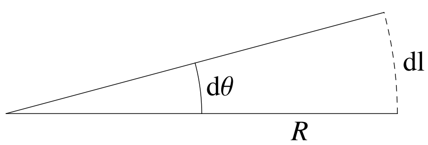
onde o ângulo θ está denotado na figura. Se procedermos como antes encontraremos dificuldades, pois agora θ varia "de $\mathrm{d}q$ para $\mathrm{d}q$". Podemos, no entanto, escrever $\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}l$, onde $\lambda = Q/(\pi R)$ (carga total dividida pelo comprimento do arco). Agora vem o principal detalhe: como relacionar $\mathrm{d}l$ com θ. A resposta está ilustrada na figura abaixo:

$$\mathrm{d}l = R\,\mathrm{d}\theta$$

Esta fórmula pode parecer estranha, mas note: o perímetro deste semi-círculo (por exemplo) nada mais é do que

$$\text{perimetro} = \text{raio} \times \text{ângulo} = R \times \pi$$

Agora podemos voltar à Eq. (1) e escrever



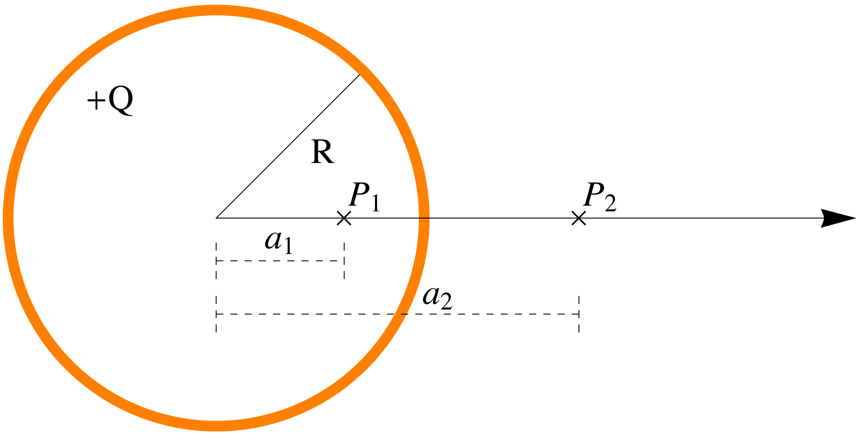
$$E_y = \int \frac{k\,\mathrm{d}q}{R^2}\cos\theta = \int \frac{k}{R^2}\lambda R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{k\lambda}{R}\int \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

De acordo com a figura, o ângulo θ varia de $-\pi/2$ a $\pi/2$:

$$E_y = \frac{k\lambda}{R} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{k\lambda}{R} \underbrace{\sin\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{2}$$

$$\therefore E_y = \frac{2k\lambda}{R}$$

2. Considere o problema na figura abaixo, referente a uma casca esférica muito fina com raio R, que está carregada uniformemente com uma carga Q. Calcule o campo elétrico nos pontos P_1 e P_2, que estão a uma distância a_1 e a_2 da origem, respectivamente.



A parte mais importante do exercício é escolher uma boa superfície de Gauss. Para que a lei de Gauss seja útil, é necessário que o campo possa sair da integral e, por essa razão, uma boa superfície de Gauss deve satisfazer as seguintes propriedades:

(i) O vetor normal à superfície ($\hat{n}$) deve ser paralelo (ou perpendicular) ao campo elétrico;

(ii) A magnitude do campo elétrico deve ser constante ao longo da superfície.

Para ambos P_1 e P_2, escreva claramente qual foi a superfície de Gauss que você escolheu.

As superfícies de Gauss serão sempre esferas concêntricas à casca do problema. Tanto em P_1 como em P_2 o campo deverá, por simetria, ser radial e constante ao longo da superfície de Gauss. Portanto:

$$\Phi = \oint\limits_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\hat{n}} \, \mathrm{d}A = \oint\limits_S E \, \mathrm{d}A = E \oint\limits_S \mathrm{d}A = EA = E(4\pi r^2),$$

onde r é o raio da superfície de Gauss. Agora:

P_1: dentro da casca esférica a carga total será $Q_{\text{interna}} = 0$ o que, pela lei de Gauss, implica em $EA = 0 \longrightarrow E = 0$.

P_2: fora da casca esférica a carga total será simplesmente Q e, portanto, $E(4\pi a_2^2) = Q/\epsilon_0$.

Ou seja, podemos escrever o campo elétrico em todo o espaço como

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{\hat{r}} & \text{para } r > R, \\ 0 & \text{para } r < R \end{cases}$$