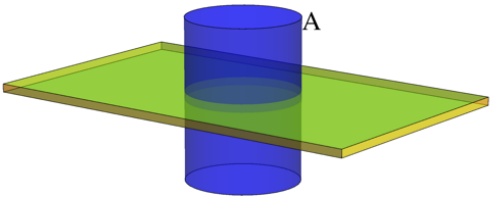
AULA 8: CONDUTORES

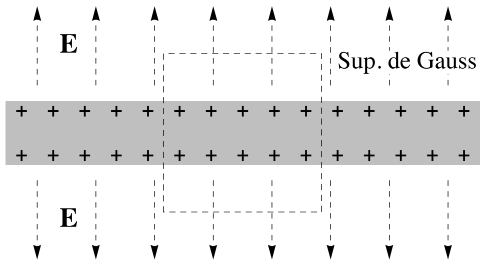
Exercício em sala

Solução

Nesta aula eu quero que você resolva um problema extremamente importante: o campo elétrico gerado por uma placa condutora fina, infinita. O sistema está ilustrado na figura abaixo. A placa está carregada com uma densidade superficial de carga σ (assuma positiva), distribuída uniformemente pelo material. Por ser condutora, as cargas se concentrarão nas superfícies [assim como ilustrado na Fig. (b)]. Mas, como estamos assumindo que ela é suficientemente fina, isso deixa de ser relevante. Queremos saber o campo fora da placa, tanto em cima quanto embaixo dela.



(a) Vista de cima



(b) Vista lateral

(a) Como estamos assumindo que a placa é infinita, a contribuição das cargas em todas as direções serão equivalentes. Por argumentos de simetria, qual deve ser a direção e o sentido do campo elétrico, tanto em cima quanto embaixo da placa? Explique e indique o resultado na Fig. (b).

Por simetria, o campo deve ser vertical pois, para toda a carga $\mathrm{d}q$, haverá outra diametralmente oposta cujo efeito é cancelar a componente x do campo produzido por $\mathrm{d}q$. As componentes y de ambas as cargas, obviamente, se somam. Acima da placa o campo será para cima e abaixo dela, para baixo. Caso a carga na placa fosse negativa a situação se inverteria.

(b) Para calcular o campo usaremos a lei de Gauss: seja S uma superfície **FECHADA**; então o fluxo de campo elétrico através de S é dado por

$$\Phi = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}A = \frac{Q_{\text{interna a S}}}{\epsilon_0} \tag{1}$$

O primeiro e mais importante passo do problema é escolher uma boa superfície da Gauss. Ao longo dessa superfície devemos ter que, ou $\boldsymbol{E} \parallel \hat{\boldsymbol{n}}$, ou $\boldsymbol{E} \perp \hat{\boldsymbol{n}}$. Além disso, $E = |\boldsymbol{E}|$ deve ser constante sobre S. Qual a superfície de Gauss adequada para este problema? Explique o porquê e indique-a na Fig. (b).

Dica: a superfície que você escolheu vai obviamente depender de certos parâmetros, como a sua área por exemplo. No entanto, o resultado final não pode depender da *sua* escolha da superfície de Gauss e, portanto, estes parâmetros devem se cancelar nos cálculos.

A superfície de Gauss ideal é um cilindro (um cubo também funciona) que cruza o material. As suas extremidades possuem área A e estão igualmente distantes da placa. A vantagem desta escolha é que, ao longo do cilindro $\boldsymbol{E} \perp \hat{\boldsymbol{n}}$ e, nas "tampas", $\boldsymbol{E} \parallel \hat{\boldsymbol{n}}$. Além disso, como as placas são infinitas, o campo ao longo de uma das tampas não pode variar já que (exatamente por serem infinitas) não há preferência alguma por uma direção específica.

(c) Calcule o lado esquerdo da Eq. (1) para a superfície de Gauss que você escolheu (ou seja, a integral).

$$\Phi = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}A = \overbrace{\int_{\text{cilindro}} \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}A}^{=0 \text{ pois } \boldsymbol{E} \perp \hat{\boldsymbol{n}}} + \int_{\text{tampa de baixo}} \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}A + \int_{\text{tampa de cima}} \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}A$$

Na tampa de cima, o sentido de $\boldsymbol{E}$ é para cima, assim como o de $\hat{\boldsymbol{n}}$. Na tampa de baixo, apesar do sentido do campo ser para baixo, o mesmo será verdade para $\hat{\boldsymbol{n}}$. Portanto, em ambas as tampas $\boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = E$ Ou seja,

$$\Phi = 2EA$$

(d) Calcule a carga interna a esta superfície.

A parcela da placa englobada pela minha superfície de Gauss tem área total A. Sabendo a densidade superficial de carga, σ, temos portanto

$$Q_{\text{interna a S}} = \sigma A$$

(e) Qual será o campo elétrico, tanto acima quanto abaixo da superfície?

Juntando as respostas dos itens (c) e (d) através da lei de Gauss concluímos que

$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$