AULA 7: FLUXO DE CAMPO E LEI DE GAUSS

Exercício em sala

Solução

(a) Qual a unidade do fluxo de campo? Lembre-se que a unidade de campo elétrico é $[E] = \mathrm{V/m}$.

Por definição, o fluxo de campo elétrico através de uma superfície S é

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}A$$

Ou seja,

$$\text{Fluxo} = \text{Campo} \times \text{Area}$$

Como campo elétrico tem unidades de V/m, obtemos

$$[\Phi] = \mathrm{Vm}$$

Por ter causado um pouco de confusão na sala, eu gostaria de enfatizar o seguinte ponto: o fluxo é um *número*. Ao fazer o produto escalar de $\boldsymbol{E}$ com $\hat{\boldsymbol{n}}$, o resultado é uma função de (x, y, z) que, uma vez integrada sobre a superfície, resulta em um número. Ele pode ser tanto positivo quanto negativo ou zero.

(b) Usando a lei de Gauss, qual será a unidade de ϵ_0?

A lei de Gauss diz que, se S é uma superfície fechada, então

$$\Phi = \frac{\text{carga interna a S}}{\epsilon_0}$$

Portanto

$$[\epsilon_0] = \frac{[q]}{[\Phi]} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}}$$

Se tivéssemos partido da relação

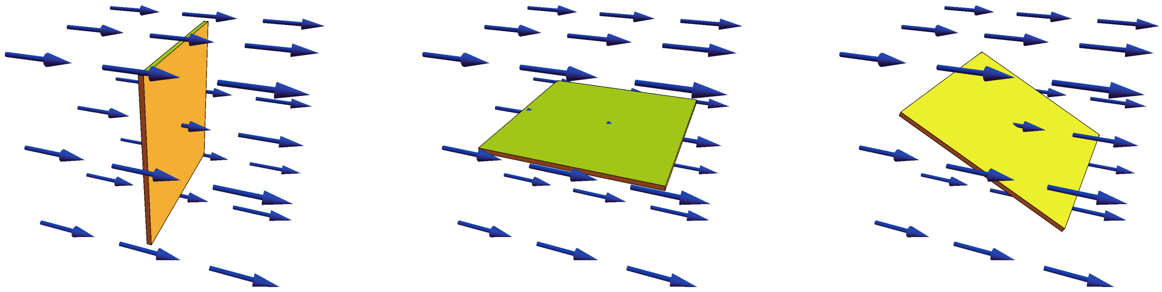
$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

veríamos que, como $[k] = \mathrm{Nm^2/C^2}$, então $[\epsilon_0] = \mathrm{C^2/Nm^2}$. É fácil mostrar que ambas são equivalentes. Basta lembrar que $\mathrm{N} = \mathrm{J/m}$ e $\mathrm{V} = \mathrm{J/C}$.

(c) Lembrando que $k = 9 \times 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}$, calcule ε_0. Anote este resultado no seu caderno, você pode precisar dele nas próximas aulas.

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} \simeq 8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C/Vm}$$

(d) Considere agora os desenhos da figura abaixo, onde as superfícies são quadradas, com aresta $a = 10\mathrm{cm}$. O campo elétrico em todos os casos é constante e tem módulo $E = 10^5\ \mathrm{V/m}$. Calcule o fluxo através das superfícies.



(a) $\theta = 0°$ (b) $\theta = 90°$ (c) $\theta = 60°$

Como $\boldsymbol{E}$ é constante, em todos os casos ele pode ser tirado da integral. Ou seja,

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}A = \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \int_S \mathrm{d}A = \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} A$$

onde $A = a^2 = 10^{-2}$ m^2.

- $\theta = 0°$**:** Neste caso $\boldsymbol{E} \parallel \hat{\boldsymbol{n}}$ e, portanto, $\boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = E$. Obtemos então

$$\Phi(\theta = 0°) = EA = 1000 \text{ Vm}$$

- $\theta = 90°$**:** Neste caso $\boldsymbol{E} \perp \hat{\boldsymbol{n}}$ e, portanto, $\boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 0$. Consequentemente

$$\Phi(\theta = 90°) = 0$$

- $\theta = 60°$**:** Neste caso o ângulo entre $\boldsymbol{E}$ e $\hat{\boldsymbol{n}}$ é $60°$ e, portanto, $\boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = |E||n| \cos\theta = E\cos\theta$. Consequentemente

$$\Phi(\theta = 60°) = EA\cos\theta = 500 \text{ Vm}$$

  O resultado é exatamente a metade do fluxo para $\theta = 0$, uma vez que $\cos 60° = 1/2$.

(e) Considere agora um ovo de páscoa sabor Bis. Devido a um defeito na confeitaria/fábrica, 10 "Bises" de dentro do ovo foram carregados com uma densidade linear de carga $\lambda = 3$ µC/m. Se cada Bis tem 3 cm de comprimento, qual o fluxo através do ovo de páscoa, assumindo que ele esteja fechado (lembre-se: a lei de Gauss só vale para superfícies fechadas)

De acordo com a lei de Gauss, o fluxo através de uma superfície **fechada** S será

$$\Phi = \frac{\text{carga interna a S}}{\epsilon_0}$$

A carga de cada Bis é

$$q_{\text{Bis}} = \left(3\ \frac{\mu\text{C}}{\text{m}}\right)(3 \text{ cm}) = 90 \text{ nC}$$

Portanto, como assumimos que há 10 Bises dentro do ovo, teremos,

$$\Phi_{\text{ovo}} = \frac{10 \times 90 \text{ nC}}{\epsilon_0} \simeq 10^5 \text{ Vm}$$