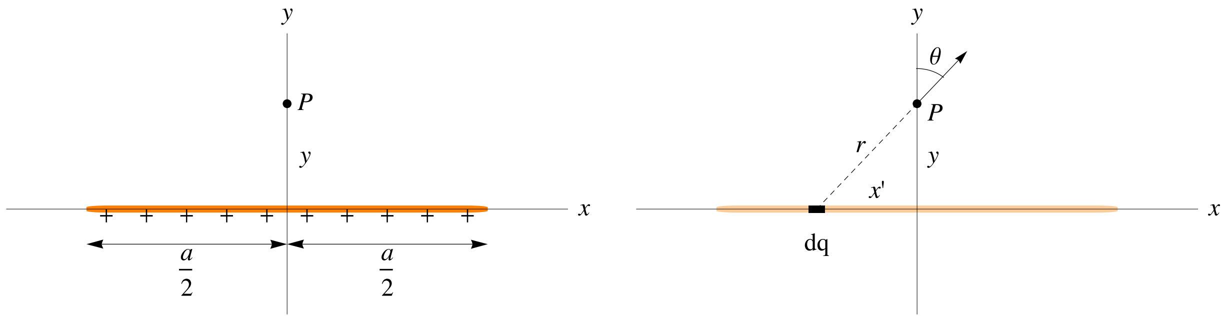
AULA 6: DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS DE CARGA

Exercício em sala

Solução

Considere o problema da figura abaixo. Um fio muito fino de comprimento a está carregado uniformemente com uma densidade linear de carga λ. O objetivo é calcular o campo no ponto P, que se encontra a uma distância y do fio. Esse é um caso onde calcular diretamente o campo é mais fácil do que primeiro calcular V e depois usar relação $\boldsymbol{E} = -\nabla V$.



(a) Qual direção você espera que o campo elétrico tenha no ponto P? Porque?

Por simetria, a componente $\mathrm{d}E_x$ gerada por uma carga $\mathrm{d}q$ será sempre cancelada por outra carga idêntica, diametralmente oposta. Por essa razão, ao integrarmos sobre o fio, o campo total gerado pelo fio será exclusivamente na direção $\hat{\boldsymbol{j}}$.

(b) A figura da direita indica as principais grandezas envolvidas. Escreva explicitamente quem são r, $\cos\theta$ e dq.

- r é a distância da carga $\mathrm{d}q$ ao ponto P; de acordo com a figura,

$$r = \sqrt{x'^2 + y^2}$$

- $\cos\theta$ representa o ângulo que o campo elétrico $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$, gerado pela carga $\mathrm{d}q$, faz com o eixo y. Novamente, pela figura teremos que

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x'^2 + y^2}}$$

(c) Qual a variável de integração; ou seja, qual a variável que muda de um dq para o outro? Quais serão os limites da integração? Note que os mesmos também se aplicam caso quiséssemos calcular o potencial.

As variáveis que mudam durante a integração são x', r e θ. Mas, como é possível expressar as duas últimas em termos de x', esta se torna a variável natural de integração. x' representa a distância da carga $\mathrm{d}q$ à origem. Seus limites correspondem aos extremos do fio, que são $-a/2$ e $a/2$.

(d) Calcule o campo elétrico no ponto P. Expresse o seu resultado em termos de a, y e Q, a carga total no fio. Você pode precisar da seguinte integral:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + c^2)^{3/2}} = \frac{1}{c^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + c^2}},$$

onde c é uma constante.

De acordo com o item (a), teremos que $\boldsymbol{E} = E_y \hat{\boldsymbol{j}}$. Além disso, $E_y = \int \mathrm{d}E_y$, por definição; ou seja, estamos somando os campos produzidos pelas cargas (que assumimos pontuais) $\mathrm{d}q$. A componente $\mathrm{d}E_y$ do campo $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ gerado pela carga $\mathrm{d}q$ é, pela figura

$$\mathrm{d}E_y = \mathrm{d}E\cos\theta = \frac{k\,\mathrm{d}q}{r^2}\cos\theta$$

Note que eu já utilizei o fato que $\mathrm{d}E$ será o campo de uma carga pontual. Agora, utilizando os resultados do item (b), eu posso escrever $\mathrm{d}E_y$ em termos de x' e y:

$$\mathrm{d}E_y = \frac{ky\,\mathrm{d}q}{(x'^2 + y^2)^{3/2}}$$

Finalmente, usando o fato que $\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}x'$ e incluindo os limites de integração desenvolvidos no item (c), eu chego a

$$E_y = k\lambda y \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\mathrm{d}x'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = k\lambda y \frac{1}{y^2} \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y^2}}\Bigg|_{-a/2}^{a/2}$$

$$E_y = \frac{k\lambda}{y}\left[\frac{(a/2)}{\sqrt{(a/2)^2 + y^2}} - \frac{(-a/2)}{\sqrt{(-a/2)^2 + y^2}}\right]$$

$$\therefore E_y = \frac{k\lambda a}{y\sqrt{(a/2)^2 + y^2}}$$

onde $\lambda a = Q$.

(e) Mostre que quando $y \gg a$, o campo se reduz ao de uma carga pontual localizada na origem. Chamaremos este campo de E_{CP}.

Quando $y \gg a$ teremos que

$$\sqrt{(a/2)^2 + y^2} \simeq \sqrt{y^2} = |y|$$

Devemos tomar cuidado com o sinal, caso y seja negativo. Teremos então:

$$E_y = \begin{cases} \frac{kQ}{y^2} & \text{para } y > 0 \\ -\frac{kQ}{y^2} & \text{para } y < 0 \end{cases}$$

(f) Considere agora os seguintes valores: $a = 10$ cm e $\lambda = 1,5$ μC/m. Complete a tabela abaixo (atenção com as unidades):

y(cm)	E(V/m)	E_{CP}(V/m)	E/E_{CP}
1	$2,65 \times 10^6$	$1,35 \times 10^7$	0,196
10	$1,21 \times 10^5$	$1,35 \times 10^5$	0,894
100	$1,35 \times 10^3$	$1,35 \times 10^3$	0,999

Destes resultados, você diria que a uma distância $y = 1$ m, a aproximação de tratar um fio de 10 cm de comprimento como uma carga pontual é razoável?

A razão entre o campo do fio e o campo de uma carga pontual à uma distância de 1 m é 0.999; ou seja, como uma ótima aproximação podemos tomar o fio como sendo uma carga pontual nestas condições. Note também que esta razão não depende da carga total.