AULA 5: CALCULANDO $\vec{E}$ A PARTIR DE V

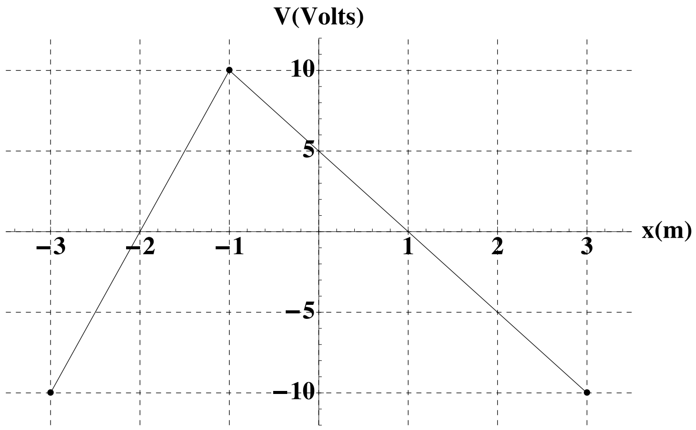
Exercício em sala

Correção: havia um fator "3" faltando nas fórmulas (1) e (2)

SOLUÇÃO:

Exercício 1

A figura abaixo mostra o gráfico do potencial eletrostático medido na direção x. Sabemos que ele não varia nas direções y e z. Nas suas respostas não se esqueça de incluir as unidades e muito cuidado com os sinais do campo elétrico (eles fazem toda a diferença!)



O campo elétrico $\boldsymbol{E}$ pode ser calculado a partir do potencial V através da relação

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\boldsymbol{k}}\right]$$

Mas, de acordo com o enunciado, o potencial não depende das variáveis y e z. Portanto o campo elétrico será

$$\boldsymbol{E} = E_x\hat{\boldsymbol{\imath}}, \quad \text{onde} \quad E_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$$

Note que eu escrevi a derivada como $\mathrm{d}V/\mathrm{d}x$ e não $\partial V/\partial x$, simplesmente para enfatizar que V é uma função de uma única variável: $V(x)$.

Em ambas as regiões de interesse V é uma função linear. A derivada é a inclinação da reta, que é constante. Ou seja, eu posso simplesmente escrever

$$E = -\left[\frac{V_b - V_a}{x_b - x_a}\right]$$

onde a e b são dois pontos quaisquer no intervalo em questão.

(a) Qual o campo E_x na região $x > -1$ m?

Neste intervalo posso escolher, por exemplo, os pontos $x = 0$ e $x = 1$. O resultado é

$$E_x(x > -1 \text{ m}) = -\left[\frac{0-5}{1-0}\right] = 5\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

O campo é positivo, como deveríamos esperar uma vez que as linhas de campo sempre vão de um potencial maior para um potencial menor. Em outras palavras, como a inclinação do potencial é negativa, o campo será positivo (já que $E = -\nabla V$).

(b) Qual o campo E_x na região $x < -1$ m?

Neste intervalo podemos escolher $x = -2$ e $x = -1$, por exemplo. O resultado será

$$E_x = -\left[\frac{10 - 0}{(-1) - (-2)}\right] = -10\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Como esperado, $E_x < 0$. Note também que sua magnitude é o dobro do caso anterior, algo que também é visível da figura uma vez que a inclinação no potencial é maior quando $x < -1$ m.

(c) Uma pequena poeira de massa $m = 10^{-13}$ kg e carga $q = -10^{-12}$ C é colocada no ponto $x = +2$ m. Para qual direção ela se moverá: esquerda ou direita?

Um carga *negativa* na posição $x = 2$ m sofrerá uma força para a *esquerda*. Isso pode ser visto diretamente do gráfico de V vs. x, uma vez que:

Cargas negativas sempre vão de potencial menor para potencial maior

e

Cargas positivas sempre vão de potencial maior para potencial menor

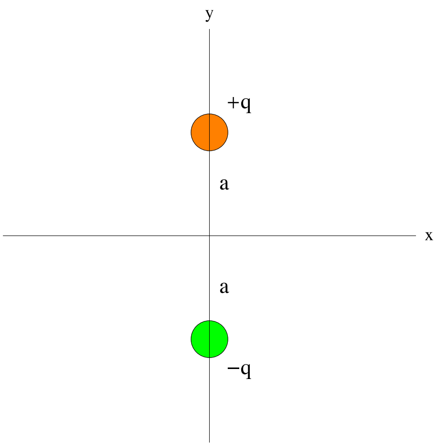
Esta importante propriedade é uma consequência direta do fato que as linhas de campo vão de um potencial maior para um potencial menor. Como a força elétrica exercida numa carga q é

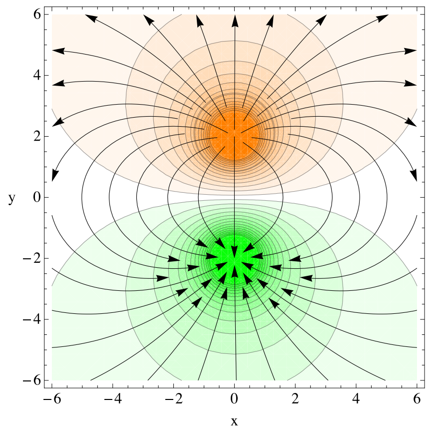
$$\boldsymbol{F}_{\text{el}} = q\boldsymbol{E},$$

vemos que: quando $q > 0$ a força será na mesma direção do campo, ao passo que quando $q < 0$, a força será na direção oposta ao campo.

Exercício 2

A figura abaixo ilustra as linhas de campo e as equipotenciais de um dipolo elétrico. Sabe-se





que, para uma distância $r \gg a$ (a separação entre as cargas é $2a$), o potencial eletrostático do dipolo tem a forma

$$V(x, y, z) = \frac{kpy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

onde $p = 2qa$ é chamado de *momento de dipolo* do sistema. [Note a "preferência" com relação à variável y, que decorre pois as cargas estão dispostas nesta direção; ou seja, as direções x e z devem, por simetria, ser inteiramente equivalentes.] Mostre que o campo elétrico gerado pelo dipolo quando $r \gg a$ é dado por

$$\vec{\boldsymbol{E}} = kp\left[3y\frac{(x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\hat{\boldsymbol{k}})}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] \tag{1}$$

Em geral podemos definir o momento de dipolo como sendo um vetor: $\vec{\boldsymbol{p}} = p\hat{\boldsymbol{\jmath}}$; ou seja, cuja magnitude é p e cuja direção corresponde ao eixo que conecta as duas cargas, apontando da carga $-q$ para a carga $+q$ (para cima). Considere então a seguinte fórmula:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = k\left[3\frac{(\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}})\vec{\boldsymbol{r}}}{r^5} - \frac{\vec{\boldsymbol{p}}}{r^3}\right], \tag{2}$$

onde, *como sempre*, $\vec{\boldsymbol{r}} = x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\hat{\boldsymbol{k}}$. Mostre que este resultado concorda com a Eq. (1). O interessante desta expressão é que ela não depende da sua escolha de sistema de coordenadas.

O campo elétrico $\boldsymbol{E}$ pode ser calculado a partir do potencial V através da relação

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\boldsymbol{k}}\right]$$

Nesse caso o potencial não varia de forma linear e temos que calcular todas as derivadas. Para a componente E_x do campo, tratamos as variáveis y e z como constantes:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ &= -kpy\frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right] \\ &= -kpy(-3/2)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(2x) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad E_x = \frac{3kpyx}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \tag{3}$$

Para a componente E_z o cálculo é análogo, uma vez que o potencial é simétrico com relação à x e z.[1] Podemos, portanto, escrever imediatamente o resultado

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{3kpyz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \tag{4}$$

Note que a única diferença foi mudar x por z no numerador.

Já para a componente E_y, devemos tomar um pouco mais de cuidado. O cálculo que devemos realizar é

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -kp\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] \tag{5}$$

Agora é necessário usar ou a regra do produto para derivadas, ou a regra do quociente. A regra do produto é melhor, pois veremos que parte do cálculo será análogo às derivadas realizadas anteriormente. A regra do produto é

$$\frac{\mathrm{d}[f(y)g(y)]}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}g(y) + f(y)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}$$

Seja então

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ g(y) &= y \end{aligned}$$

[1]Para testar se uma função é simétrica, tente inverter x com z; ela será simétrica se você recuperar sua função original.

Usando este resultado na Eq. (5) vemos que

$$E_y = -kp \left[\underbrace{y \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}_{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} g(y)} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}}_{f(y) \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}} \right] \tag{6}$$

Agora note, o primeiro termo é idêntico às derivadas que já calculamos. No segundo termo, por outro lado, praticamente nada precisa ser feito uma vez que a derivada $\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}y = 1$. Juntando então os resultados nas Eqs. (3), (4) e (6) chegamos então na Eq. (1).

$$\vec{\boldsymbol{E}} = kp \left[3y \frac{(x\hat{\boldsymbol{i}} + y\hat{\boldsymbol{j}} + z\hat{\boldsymbol{k}})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{\hat{\boldsymbol{j}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

Se $\boldsymbol{p} = p\hat{\boldsymbol{j}}$ e $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{i}} + y\hat{\boldsymbol{j}} + z\hat{\boldsymbol{k}}$ então

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r} = py$$

Além disso, lembrando que o módulo de $\boldsymbol{r}$ é

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

teremos que o primeiro termo na Eq. (2) será

$$\frac{3k(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} = 3kpy \frac{(x\hat{\boldsymbol{i}} + y\hat{\boldsymbol{j}} + z\hat{\boldsymbol{k}})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}},$$

que coincide com o primeiro termo da Eq. (1). O segundo termo será

$$-k\frac{\boldsymbol{p}}{r^3} = -\frac{kp\hat{\boldsymbol{j}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

que por sua vez coincide com o segundo.

Outro fato interessante da Eq. (2) é o seguinte: lembre que sempre podemos escrever um vetor unitário na direção de $\boldsymbol{r}$ como

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

Usando este resultado no primeiro termo da Eq. (2) vemos que ela pode ser escrita de forma equivalente como:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = k \left[\frac{3(\boldsymbol{p} \cdot \hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{p}}{r^3} \right]$$

Dessa forma fica evidente que, quando $r \gg a$ (que é a suposição inicial do problema), o campo elétrico de um dipolo será proporcional a $1/r^3$ e não $1/r^2$, como o de uma carga pontual.