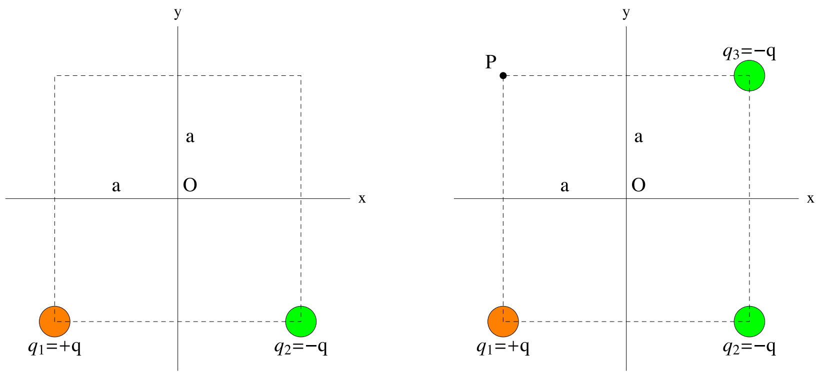
AULA 3: CAMPO ELÉTRICO E ENERGIA ELETROSTÁTICA

Exercício em sala

SOLUÇÃO

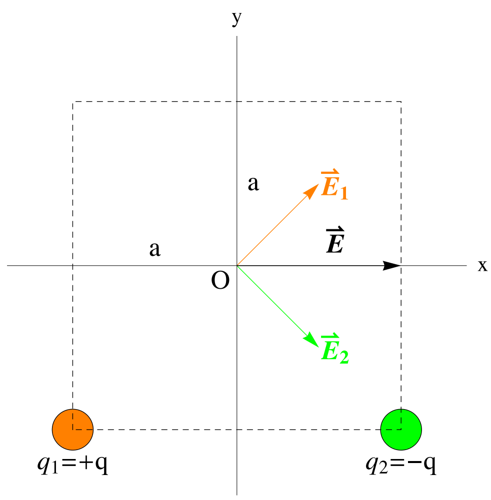
Considere primeiro o desenho da Fig. (a).



(a) Duas cargas (b) Três cargas

(a) Desenhe na própria figura a direção dos campos elétricos, gerado pelas duas cargas q_1 e q_2, no ponto O (origem). Indique tanto os campos devido às cargas individuais, $\boldsymbol{E}_1$ e $\boldsymbol{E}_2$, quanto o campo total $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$.

O campo elétrico na origem está ilustrado na figura abaixo:



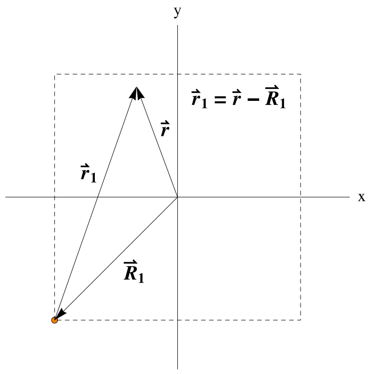
(b) Calcule $\boldsymbol{E}_1$ e $\boldsymbol{E}_2$ em um ponto arbitrário, $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{i}} + y\hat{\boldsymbol{j}}$.

O campo elétrico das cargas q_1 e q_2 serão, respectivamente

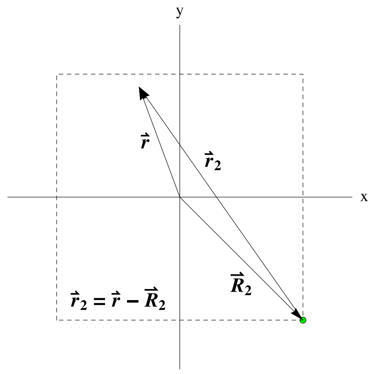
$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{kq_1}{r_1^2}\hat{\boldsymbol{r}}_1 = \frac{k(+q)}{r_1^3}\boldsymbol{r}_1$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \frac{kq_2}{r_2^2}\hat{\boldsymbol{r}}_2 = \frac{k(-q)}{r_2^3}\boldsymbol{r}_2$$

Os vetores relevantes ao problema estão denotados na figura abaixo:



(c) Carga q_1



(d) Carga q_2

A posição da carga q_1 é $\boldsymbol{R}_1 = -a\hat{\boldsymbol{i}} - a\hat{\boldsymbol{j}}$ e, como $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{i}} + y\hat{\boldsymbol{j}}$,

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_1 = (x\hat{\boldsymbol{i}} + y\hat{\boldsymbol{j}}) - (-a\hat{\boldsymbol{i}} - a\hat{\boldsymbol{j}})$$

$$\therefore \boldsymbol{r}_1 = (x+a)\hat{\boldsymbol{i}} + (y+a)\hat{\boldsymbol{j}}$$

O módulo do vetor $\boldsymbol{r}_1$ é

$$r_1 = |\boldsymbol{r}_1| = \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2}$$

Com isso o campo gerado pela carga q_1 será

$$\boldsymbol{E}_1 = kq\frac{(x+a)\hat{\boldsymbol{i}} + (y+a)\hat{\boldsymbol{j}}}{[(x+a)^2 + (y+a)^2]^{3/2}}$$

De forma semelhante, teremos para a carga q_2 que $\boldsymbol{R}_2 = a\hat{\boldsymbol{i}} - a\hat{\boldsymbol{j}}$ e

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_2 = (x\hat{\boldsymbol{i}} + y\hat{\boldsymbol{j}}) - (a\hat{\boldsymbol{i}} - a\hat{\boldsymbol{j}})$$

$$\therefore \boldsymbol{r}_2 = (x-a)\hat{\boldsymbol{i}} + (y+a)\hat{\boldsymbol{j}}$$

O módulo do vetor $\boldsymbol{r}_2$ é

$$r_2 = |\boldsymbol{r}_2| = \sqrt{(x-a)^2 + (y+a)^2}$$

Com isso o campo gerado pela carga q_2 será

$$\boldsymbol{E}_2 = -kq\frac{(x-a)\hat{\boldsymbol{i}} + (y+a)\hat{\boldsymbol{j}}}{[(x-a)^2 + (y+a)^2]^{3/2}}$$

O campo total é obtido pelo princípio da superposição:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$$

$$\therefore \boldsymbol{E} = kq\frac{(x+a)\hat{\boldsymbol{i}} + (y+a)\hat{\boldsymbol{j}}}{[(x+a)^2 + (y+a)^2]^{3/2}} - kq\frac{(x-a)\hat{\boldsymbol{i}} + (y+a)\hat{\boldsymbol{j}}}{[(x-a)^2 + (y+a)^2]^{3/2}}$$

(c) Calcule $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$ e $\boldsymbol{E}$ na origem, $(x, y) = (0, 0)$. O resultado concorda com o desenho no item (a).

Quando $(x, y) = (0, 0)$ obtemos dos resultados do item (b):

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{kqa}{[2a^2]^{3/2}}(\hat{\boldsymbol{i}} + \hat{\boldsymbol{j}}) = \frac{kq}{2\sqrt{2}a^2}(\hat{\boldsymbol{i}} + \hat{\boldsymbol{j}})$$

$$\boldsymbol{E}_2 = -\frac{kqa}{[2a^2]^{3/2}}(-\hat{\boldsymbol{i}} + \hat{\boldsymbol{j}}) = \frac{kq}{2\sqrt{2}a^2}(\hat{\boldsymbol{i}} - \hat{\boldsymbol{j}})$$

Com isso, usando o princípio da superposição chegamos ao campo total:

$$\boldsymbol{E} = \frac{kq}{\sqrt{2}a^2}\hat{\boldsymbol{i}}$$

Como esperávamos do nosso desenho no item (a), este campo está na direção $\hat{\boldsymbol{i}}$; ou seja, as componentes na direção $\hat{\boldsymbol{j}}$ de $\boldsymbol{E}_1$ e $\boldsymbol{E}_2$ se cancelam.

(d) Considere agora o sistema na figura (b), com três cargas. Vamos checar se você ainda lembra do básico: calcule a força que a carga q_2 exerce na carga q_3. Você pode usar a própria lei de Coulomb e, da própria figura, descobrir quem são os vetores e versores em questão.

Usarei a notação $\boldsymbol{F}_{2\to 3}$ para enfatizar que estamos buscando a força que a carga q_2 *exerce* na carga q_3.

A direção da força será ao longo do eixo y, uma vez que a carga q_3 está exatamente sobre a carga q_2. Além disso, a força será repulsiva pois ambas tem o mesmo sinal. Ou seja, a força da carga q_2 na carga q_3 será na direção $+\hat{\boldsymbol{j}}$. A magnitude da força pode ser obtida diretamente da lei de Coulomb:

$$F_{2\to 3} = \frac{kq_2q_3}{\text{distancia entre } q_2 \text{ e } q_3} = \frac{k(-q)^2}{(2a)^2}$$

$$\therefore F_{2\to 3} = \frac{kq^2}{4a^2}$$

(e) Qual a energia eletrostática deste sistema com as três cargas?

Em sala nós vimos que a energia eletrostática de um conjunto de cargas é simplesmente a soma da energia potencial "par a par". Ou seja,

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}}$$

Da própria figura podemos ver que

$$r_{12} = 2a$$

$$r_{13} = 2\sqrt{2}a$$

$$r_{23} = 2a$$

Portanto,

$$U = \underbrace{\frac{k(-q)(q)}{2a}}_{U_{12}} + \underbrace{\frac{k(-q)(q)}{2\sqrt{2}a}}_{U_{13}} + \underbrace{\frac{k(-q)(-q)}{2a}}_{U_{23}}$$

$$\therefore U = -\frac{kq^2}{2\sqrt{2}a}$$

(f) Suponha agora que eu, *malandro que sou*, movo a carga q_3 para o ponto P na figura. Qual a energia eletrostática deste novo sistema?

A única mudança com relação ao item anterior é na distância entre as cargas. Agora temos

$$r_{12} = 2a$$

$$r_{13} = 2a$$

$$r_{23} = 2\sqrt{2}a$$

Com isso, a energia eletrostática se torna

$$U = \underbrace{\frac{k(-q)(q)}{2a}}_{U_{12}} + \underbrace{\frac{k(-q)(q)}{2a}}_{U_{13}} + \underbrace{\frac{k(-q)(-q)}{2\sqrt{2}a}}_{U_{23}}$$

$$\therefore U = -\frac{kq^2}{2\sqrt{2}a}(2\sqrt{2} - 1)$$

(g) Ao mover a carga, o trabalho que **eu** realizei foi (**explique**):

☐ Positivo

☒ Negativo

E a energia eletrostática total do sistema:

☐ Aumentou

☒ Dimnuiu

O trabalho realizado é negativo: a carga q_3 é atraída pela carga q_1 e repelida pela q_2. Como no ponto P ela está mais próxima de q_1 e mais distante de q_2, o trabalho realizado é negativo. Em outras palavras, as cargas realizaram trabalho sobre mim.

A energia total do sistema diminuiu. Em primeiro lugar, isto é evidente dos cálculos nos itens (e) e (f). Basta notar que $2\sqrt{2} - 1 \simeq 1.82 > 1$; ou seja, a energia do sistema com a carga q_3 no ponto P é mais negativa (e portanto menor) que no outro caso. Como a interação entre q_2 e q_3 é repulsiva, o estado onde elas estão mais distantes possui uma energia potencial menor. De forma semelhante, como a interação entre q_1 e q_3 é atrativa, a energia entre elas será sempre negativa e, em módulo, maior quanto mais próximas elas estiverem.