Ora, matemática é um assunto bonito, e tem seu prós e contras, também, mas nós estamos tentando entender qual é o mínimo que temos que aprender para *os propósitos da física*. Assim, a atitude que é tomada aqui é "desrespeitosa" para a matemática, mas é completamente eficiente. Eu não estou menosprezando a matemática.

O que nós temos que fazer é aprender a diferenciar assim como nós sabemos quanto é 3 e 5, ou quanto é 5 vezes 7, porque esse tipo de raciocínio é tão freqüente que é bom não se confundir com isso. Quando você escrever alguma coisa, você deve saber diferenciar isso imediatamente, sem até mesmo pensar sobre isso, sem cometer nenhum erro. Você verá que será necessário fazer essa operação todo o tempo – não só em física, mas em todas as ciências. Por isso, diferenciação é como a aritmética que você teve que aprender antes de você poder aprender álgebra.

A mesma coisa acontece com a álgebra: há muita álgebra. Nós supomos que você é capaz de usar álgebra quando está dormindo, de cabeça para baixo, sem cometer erro algum. Nós sabemos que isso não é verdade, então você deve praticar muita álgebra: escreva muitas expressões, pratique-as e não cometa erros.

Erros em álgebra, diferenciação e integração são somente tolices; são coisas que somente aborrecem os físicos e aborrecem sua mente enquanto você estiver tentando analisar algo. Você deveria poder fazer cálculos tão depressa quanto possível, e com um mínimo de erros. Isso requer apenas prática – essa é a única maneira para fazer isto. É como você fazer uma tabuada, como fazia na escola primária: eles colocavam um monte de números no quadro e você ia: "Isto vezes isso, vezes aquilo", e assim por diante – Bing! Bing! Bing!

1.4 Diferenciação

Da mesma maneira você deve saber diferenciar. Faça um cartão e neste cartão escreva um número de expressões gerais do seguinte tipo: por exemplo,

$$\begin{aligned}&1+6t\\&4t^2+2t^3\\&(1+2t)^3\\&\sqrt{1+5t}\\&(t+7t^2)^{1/3}\end{aligned}\tag{1.1}$$

e assim por diante. Escreva, digamos, uma dúzia dessas expressões. Então, de vez em quando, tire o cartão do seu bolso, coloque o dedo em uma expressão e leia em voz alta a sua derivada.

Em outras palavras, você deve ser capaz de ver imediatamente:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(1 + 6t) = 6 \; \textit{Bing!} \\
&\frac{d}{dt}(4t^2 + 2t^3) = 8t + 6t^2 \; \textit{Bing!} \\
&\frac{d}{dt}(1 + 2t)^3 = 6(1 + 2t)^2 \; \textit{Bing!}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Viu? Então a primeira coisa a fazer é memorizar como derivar – friamente. Isso é uma prática necessária.

Agora, para diferenciar expressões mais complicadas, a derivada de uma soma é fácil: é simplesmente a soma das derivadas de cada termo da soma, separadamente. Não é necessário neste estágio do nosso curso de física saber como diferenciar expressões mais complicadas que as anteriores, ou somas delas, então no espírito desta revisão, eu não deveria falar mais nada sobre isso. Mas existe uma fórmula para diferenciar expressões mais complicadas que usualmente não é dada nos cursos de cálculo da forma como eu irei passar para vocês, e será muito útil. Você não aprenderá mais isso depois, porque ninguém dirá nada a vocês, mas é uma boa coisa para se aprender a fazer.

Suponha que eu queira diferenciar o seguinte:

$$\frac{6(1 + 2t^2)(t^3 - t)^2}{\sqrt{t + 5t^2}\,(4t)^{3/2}} + \frac{\sqrt{1 + 2t}}{t + \sqrt{1 + t^2}}. \tag{1.3}$$

Agora, a questão é como fazer isso com *rapidez*. Aqui está como você fará isso com *rapidez*. (Isto são só regras; esse é o nível pelo qual eu reduzi a matemática, pois estamos trabalhando com os sujeitos que sabem muito pouco.) Observe!

Você escreve a expressão novamente e após cada termo da soma, você coloca um colchete:

$$\begin{aligned}
&\frac{6(1+2t^2)(t^3-t)^2}{\sqrt{t+5t^2}\,(4t)^{3/2}} \cdot \Bigg[\\
&+\frac{\sqrt{1+2t}}{t+\sqrt{1+t^2}} \cdot \Bigg[
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Agora, você irá escrever alguma coisa dentro dos colchetes, tal que quando você terminar, terá a derivada da expressão original. (Esse é o porquê você escreve novamente a expressão, para não perdê-la.)

Agora, você irá observar cada termo e desenhar uma barra – uma divisão – coloque o termo no denominador: O primeiro termo que vai no denominador é $1 + 2t^2$. A potência do termo vai à frente dele (sua potência é 1) e a derivada do termo (do nosso modo prático), 4t, vai no numerador. Isso é um termo:

$$\frac{6(1+2t^2)(t^3-t)^2}{\sqrt{t+5t^2}\,(4t)^{3/2}}\cdot\left[1\frac{4t}{1+2t^2}\right. \\ +\frac{\sqrt{1+2t}}{t+\sqrt{1+t^2}}\cdot\left[\right. \tag{1.5}$$

(E o 6? Esqueça ele! Qualquer número na frente não faz diferença: se você quiser, pode começar por ele, "o 6 vai no denominador; sua potência é 1, que vai à frente dele; e sua derivada é 0, que vai no numerador".)

O próximo termo: $t^3 - t$ vai no denominador; sua potência, +2, vai na frente; sua derivada $3t^2 - 1$ vai no numerador. O próximo termo, $t + 5t^2$, vai no denominador; sua potência, –1/2 vai na frente (o inverso de uma raiz quadrada é uma potência de meio *negativa*); a derivada, $1 + 10t$, vai no numerador. O próximo termo, $4t$, vai no denominador; sua potência, –3/2, vai na frente; sua derivada 4, vai no numerador. Feche os colchetes. Isso é uma parte da soma:

$$\frac{6(1+2t^2)(t^3-t)^2}{\sqrt{t+5t^2}\,(4t)^{3/2}}\cdot\left[1\frac{4t}{1+2t^2}+2\frac{3t^2-1}{t^3-t}-\frac{1}{2}\frac{1+10t}{t+5t^2}-\frac{3}{2}\frac{4}{4t}\right] \\ +\frac{\sqrt{1+2t}}{t+\sqrt{1+t^2}}\cdot\left[\right. \tag{1.6}$$

O próximo termo da soma. O primeiro termo: sua potência é +1/2. O objeto cuja potência foi tomada é $1 + 2t$; sua derivada é 2. A potência do próximo termo, $t+\sqrt{1+t^2}$ é –1. (Como você vê, é um recíproco.) O termo vai no denominador, sua derivada (que é a única relativamente mais difícil) possui dois pedaços por ser uma soma: $1+\frac{1}{2}\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}$.
Feche os colchetes:

$$\frac{6(1+2t^2)(t^3-t)^2}{\sqrt{t+5t^2}\,(4t)^{3/2}}\cdot\left[1\frac{4t}{1+2t^2}+2\frac{3t^2-1}{t^3-t}-\frac{1}{2}\frac{1+10t}{t+5t^2}-\frac{3}{2}\frac{4}{4t}\right]$$

$$+\frac{\sqrt{1+2t}}{t+\sqrt{1+t^2}}\cdot\left[\frac{1}{2}\frac{2}{(1+2t)}-1\frac{1+\frac{1}{2}\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}}{t+\sqrt{1+t^2}}\right]. \tag{1.7}$$

Essa é a derivada da expressão original. Então, veja, que memorizando esta técnica, você poder diferenciar *qualquer coisa* – exceto senos, co-senos, logaritmos, e assim por diante, mas você pode aprender as regras, ficando mais fácil; elas são muito simples. Assim podendo usar essa técnica até mesmo quando os termos incluírem tangentes e tudo mais.

Eu notei que quando escrevi isso, vocês ficaram preocupados que seja uma expressão muito complicada, mas eu penso que vocês notaram que esse é um método muito poderoso de diferenciação, pois ele dá a resposta – *boom* – sem nenhuma demora, não importa o quão complicada a expressão seja.

A idéia básica aqui é que a derivada de uma função $f = k \cdot u^a \cdot v^b \cdot w^c \ldots$ com respeito a t é

$$\frac{df}{dt} = f \cdot \left[a\frac{du/dt}{u} + b\frac{dv/dt}{v} + c\frac{dw/dt}{w} + \cdots\right] \tag{1.8}$$

(onde k e $a, b, c, \ldots$ são constantes).

Entretanto, neste curso de física, eu duvido que os problemas serão tão complicados, então provavelmente não teremos a oportunidade de usar isso. De qualquer forma, esse é o modo como eu derivo, e estou certo, que será o modo como vocês irão fazer agora.

1.5 Integração

Agora, o processo inverso é a integração. Você deve aprender bem igualmente a integração o mais rápido possível. Integração não é tão fácil como a diferenciação, mas você deve ser capaz de integrar de cabeça expressões simples. Não é necessário saber integrar todas as expressões; por exemplo, $(t + 7t^2)^{1/3}$, não é possível integrar de um modo fácil, mas as outras abaixo são. Então, quando você escolher expressões para praticar integração, tome cuidado e escolha as que podem ser facilmente resolvidas:

$$\int (1+6t)\,dt = t + 3t^2$$

$$\int (4t^2 + 2t^3)\,dt = \frac{4t^3}{3} + \frac{t^4}{2}$$