Definitions, some results, and some exercises

An Overview (Stokey & Lucas (1989): cap. 2)

Jefferson Bertolai

August - 2015

The One-Sector Model

Considere o seguinte problema de alocação de recursos na economia

- população grande
- indivíduos idênticos, vivem para sempre (horizonte infinito)
- somente 1 bem por período, y_t
- dois fatores de produção:
  - capital, k_t
  - trabalho, n_t
- função de produção: $y_t = F(k_t, n_t)$

The One-Sector Model

- Decisão de consumo-poupança: produto pode ser usado para:
  - consumo corrente: c_t
  - investimento bruto: i_t

$$c_t + i_t \leq y_t = F(k_t, n_t) \tag{1}$$

- capital deprecia a taxa constante $\delta \in (0, 1)$

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t \tag{2}$$

- Preferência sobre consumo

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t), \qquad \beta \in (0, 1) \tag{3}$$

  - SPG, suponha que $n_t = 1$ para todo t

Modelo sem incerteza

Considere o problema de crescimento ótimo sem incerteza:

- função de produção: $y_t = F(k_t, n_t)$
- a função $F : \mathbb{R}^2_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ é
    - continuamente diferenciável
    - estritamente crescente
    - homogênea de grau 1
    - estritamente quase-côncava
    - tal que

$$F(0,n) = 0, \qquad F_k(k,n) > 0, \qquad F_n(k,n) > 0, \qquad \forall k, n > 0$$

$$\lim_{k \to 0} F_k(k,1) = \infty, \qquad \lim_{k \to \infty} F_k(k,1) = 0$$

- População cte e força de trabalho$= 1$

$$0 \leq n_t \leq 1, \quad \forall t \tag{1a}$$

- dada a taxa de depreciação $\delta \in [0,1]$

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t \leq F(k_t, n_t), \quad \forall t \tag{2a}$$

- Ver Simon & Blume, pg. 523

Definition

A function f defined on a convex subset U of $\mathbb{R}^n$ is quasiconcave if for every real number a,

$$C_a^* \equiv \{x \in U : f(x) \geq a\}$$

is a convex set.

Modelo sem incerteza

Demonstre o teorema a seguir:

Theorem (21.12)

Let $f : U \mapsto \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$. Then, the following statements are equivalent to each other:

(a) *f is a quasiconcave function on U*

(b) *for all $x, y \in U$ and all $t \in [0, 1]$,*

$$f(x) \geq f(y) \quad \Rightarrow \quad f[tx + (1-t)y] \geq f(y)$$

(c) *for all $x, y \in U$ and all $t \in [0, 1]$,*

$$f[tx + (1-t)y] \geq \min\{f(x), f(y)\}$$

Modelo sem incerteza

- Preferences

$$u(c_0, c_1, c_2, \cdots) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) \tag{3a}$$

  - a função $U : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ é
    - função limitada
    - continuamente diferenciável
    - estritamente crescente
    - estritamente côncava
    - satisfaz Inada Condition

$$\lim_{c \to 0} U'(c) = \infty$$

- Observe que o indiíduo não preza por lazer

Modelo sem incerteza

O problema do planejador benevolente é

$$\max_{\{(c_t,k_t,n_t)\}_{t=0}^{\infty}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) : \; s.t. \; (1a), \; (1b), \; k_0 \; dado \right\}$$

No ótimo tem-se $n_t = 1$ e $(1b)$ ativa

- y_t: produto agregado/total e produto por trabalhador/per capita
- k_t: capital agregado/total e capital por trabalhador/per capita

Defina a oferta agregada de bens

$$f(k) = F(k,1) + (1-\delta)k$$

O problema do planejador se torna

$$\max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U[f(k_t) - k_{t+1}] \right\} \tag{3}$$

$$s.t. \; 0 \leq k_{t+1} \leq f(k_t) \; e \; k_0 \; dado \tag{4}$$

Modelo sem incerteza

Resolva o exercício a seguir:

Exercise

Mostre que $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ é

- continuamente diferenciável
- estritamente crescente
- estritamente côncava.

Adicionalmente, demonstre que

$$f(0) = 0 \qquad f'(k) > 0, \qquad \lim_{k \to 0} f'(k) = \infty, \qquad \lim_{k \to \infty} f'(k) = 1 - \delta$$

Modelo sem incerteza

Para lidar com um problema de otimização familiar

Considere o problema em horizonte finito T

$$\max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{T}} \left\{ \sum_{t=0}^{T} \beta^t U[f(k_t) - k_{t+1}] : \ s.t.\ 0 \leq k_{t+1} \leq f(k_t)\ e\ k_0\ dado \right\}$$

cuja variável de escolha é

$$(k_1, k_2, \cdots, k_{T+1}) \in \mathbb{X} \equiv \{x \in \mathbb{R}^{T+1} : 0 \leq x_{t+1} \leq f(x_t)\}$$

Como

- $\mathbb{X}$ é fechado, limitado e convexo
- e $\sum_{t=0}^{T} \beta^t U[f(k_t) - k_{t+1}]$ é contínua e estr. côncava

Então

- existe solução maximizadora (Teo. 4.2.5)
- ela é única e satisfaz as condições de KKT

Modelo sem incerteza

- Demonstre o lema a seguir

Lemma

Sob a alocação ótima, a restrição

$$0 \leq k_{t+1} \leq f(k_t), \qquad t = 0, 1, \cdots, T$$

é inativa para todo $t < T$ e $k_{T+1} = 0$.

Conclui-se que a solução ótima satisfaz

$$\beta f'(k)U'[f(k_t) - k_{t+1}] = U'[f(k_{t-1}) - k_t], \qquad t = 1, 2, \cdots, T \tag{5}$$

$$k_{T+1} = 0 \qquad e \qquad k_0 \ dado \tag{6}$$

Modelo sem incerteza

- (5) é uma CPO é (6) são condições de contorno
- A equação (5) define uma equação em diferenças de ordem 2

Remark

O exercício 2.2 (resolvido em sala) mostra uma forma de resolver tal equação. Ela é dada por

$$k_{t+1} = \alpha\beta \left(\frac{1-(\alpha\beta)^{T-t}}{1-(\alpha\beta)^{T-t+1}} \right) k_t^{\alpha}, \qquad t = 0, 1, 2, \cdots, T \tag{7}$$

- Tomando o limite em T para o infinito na equação (7), obtém-se

$$k_{t+1} = \alpha\beta k_t^{\alpha}, \qquad t = 0, 1, 2, \cdots \tag{8}$$

Modelo sem incerteza

A solução (8) sugere que as soluções para casos mais gerais (em U e f) assumem a forma

$$k_{t+1} = g(k_t), \qquad t = 0, 1, 2, \cdots \tag{9}$$

em que $g : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ é uma função poupança fixa!

- A estratégia (5) e (6) não nos ajuda nesta conjectura.
- Propõe-se uma estratégia alternativa:

Modelo sem incerteza

Após resolver o problema do *planner* ((3) e (4)) para cada k_0,

- pode-se definir $v : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$
- como o valor da função objetivo no ótimo
- tal função é chamada **função valor**

Então o problema no período $t = 0$ é

$$\max_{c_0, k_1} \{U(c_0) + \beta v(k_1)\} \tag{10}$$

$$s.t. \begin{cases} c_0 + k_1 \leq f(k_0) \\ c_0 \geq 0, \ \ k_1 \geq 0, \ \ e \ k_0 \ dado \end{cases}$$

- se (c_0^*, k_1^*) é solução de (10) para cada k_0
- defina $g : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ tal que $g(k_0) = k_1^*$ e $f(k_0) - g(k_0) = c_0^*$

Modelo sem incerteza

Na verdade, a função valor v não é conhecida *a priori*, mas ela satisfaz

$$v(k_0) = \max_{0 \leq k_1 \leq f(k_0)} \{U[f(k_0) - k_1] + \beta v(k_1)\}$$

Como tal lógica vale para cada período, então

$$v(k) = \max_{0 \leq y \leq f(k)} \{U[f(k) - y] + \beta v(y)\} \tag{11}$$

- a incógnita aqui é a função v
- essa equação é chamada de **Equação Funcional**

Programação Dinâmica: estudo de problemas de otimização dinâmica usando equações funcionais do tipo (11)

Modelo sem incerteza

Se soubéssemos que v é diferenciável e y ótimo $(g(k))$ é interior, teríamos

- CPO:
$$U'[f(k) - g(k)] = \beta v'[g(k)]$$
- Teorema do Envelope:
$$v'(k) = U'[f(k) - g(k)]f'(k)$$

Remark

O exercício 2.3 *(resolvido em sala) mostra que a função valor do problema do planejador,* (3) *e* (4)*, obtida da solução* (8)*, safisfaz* (11)

Modelo sem incerteza

- em geral, não é possível calcular explicitamente a solução $g(\cdot)$
  - recorre-se então a aproximações numéricas!
- mas é possível caracterizar propriedades gerais de $g(\cdot)$ e $\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$

Remark

O exercício 2.4 (resolvido em sala) mostra que existe um ponto k^* para o qual a sequência $\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ converge, qualquer que seja $k_0 > 0$. Este ponto é único e ponto fixo de g, i.e., $g(k^*) = k^*$.

Modelo sem incerteza

A equação (11) proporciona uma estratégia para análise de problemas de horizonte infinito

- precisamos estabelecer que as soluções do problema (3) e (4) e do problema (11) coincidem
- desenvolver ferramentas para estudar equações do tipo (11)
  - existência e unicidade de v
  - propriedades de v e g, e como isso afeta $\{k_t\}$

Modelo Estocástico

Suponha um choque tecnológico z_t tal que

$$y_t = z_t f(z_t), \qquad \text{em que } \{z_t\} \text{ é uma sequência de v.a. iid}$$

- Factibilidade:

$$k_{t+1} + c_t \leq z_t f(k_t), \qquad c_t, k_{t+1} \geq 0, \qquad \forall t \ e \ \forall \{z_t\} \tag{1}$$

- Preferences:

$$E\left[u(c_0, c_1, c_2, \cdots)\right] = E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)\right] \tag{2}$$

  em que $E(\cdot)$ é tomada em relação a $\{c_t\}$

- Timing:
  - z_t é revelado no início do período
  - (k_t, z_t) é o **estado da economia**

Modelo Estocástico

No **problema sequencial** o planejador escolhe uma sequência de planos contingentes

- a cada período, (c_t, k_{t+1}) é contingente a $(z_0, z_1, z_2, \cdots, z_t)$
- trata-se de uma sequência de funções $(c_t(\cdot), k_{t+1}(\cdot))$

Remark

O exercício 2.5 (resolvido em sala) ilustra a dimensionalidade do problema sequencial já no caso de horizonte finito.

Modelo Estocástico

No problema recursivo, defina $v(k,z)$ a função valor de (2). Então

$$v(k,z) = \max_{0 \leq y \leq zf(k)} \{U[z.f(k) - y] + \beta E[v(y,z')]\} \tag{3}$$

- a solução aqui será $y^* = g(k,z)$
  - similar ao caso determinísta (sem incerteza)
- Como calcular a política ótima $g(\cdot)$?
  - supondo v diferenciável e solução interior, tem-se

$$U'[zf(k) - g(k,z)] = \beta E\left\{v_1[g(k,z),z']\right\}$$

Modelo Estocástico

- a trajetória ótima do capital será dada por

$$k_{t+1} = g(k_t, z_t) \tag{4}$$

uma *equação em diferenças estocástica*

Remark

O exercício 2.6 (resolvido em sala) mostra que a função objetivo (2) *avaliada sob*

$$k_{t+1} = \alpha\beta z_t k_t^{\alpha}, \qquad \forall t, \forall \{z_t\} \tag{5}$$

satisfaz a equação funcional (3).

- Equação (4) é uma equação em diferenças estocástica
- A v.a. $\{k_t\}$ gerada por (4) é um *Processo de Markov* de 1ª ordem

Exercício 2.7 calcula a convergência de 2 momentos da distribuição de $\{k_t\}$

Exercise (2.7)

Given k_0, $\{\ln(k_t)\}_{t=1}^{\infty}$ is a sequence of normally distributed random variables with means $\{\mu_t\}_{t=1}^{\infty}$ and variances $\{\sigma_t\}_{t=1}^{\infty}$. Find these means and variances and show that

$$\lim_{t\to\infty} \mu_t = \frac{\mu + \ln(\alpha\beta)}{1-\alpha} \qquad \textit{and} \qquad \lim_{t\to\infty} \sigma_t^2 = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}$$

if $\ln(z_t)$ has mean μ and variance σ^2.

Modelo Estocástico

É possível mostrar a convergência de toda a distribuição de $\{k_t\}$, todos os seus momentos, para um caso mais geral:

- suponha G, função distribuição acumulada de z_t
- dado k_0, seja ψ_t função distribuição acumulada de k_t

$$\begin{aligned} \psi_1(a) &= \Pr(k_1 \leq a) = \Pr(\alpha\beta z_0 k_0^{\alpha} \leq a) \\ &= \Pr(z_0 \leq a/\alpha\beta k_0^{\alpha}) = G(a/\alpha\beta k_0^{\alpha}), \qquad \forall a > 0 \end{aligned}$$

note que $\psi_1(a)$ é condicional em k_0

Modelo Estocástico

- similarmente, dado $k_t = b$, tem-se a **função de transição** H

$$H(a,b) \equiv \Pr(k_{t+1} \leq a | k_t = b) = G(a/\alpha\beta b^{\alpha}), \qquad \forall a,b > 0 \quad (6)$$

- Portanto,

$$\psi_{t+1}(a) = \Pr(k_{t+1} \leq a) = \int H(a,b) d\psi_t(b) \qquad (7)$$

em que $\psi_0(b) = 1$ se $b \geq k_0$ e $\psi_0(b) = 0$ caso contrário

Modelo Estocástico

Se $g(\cdot)$ e $G(\cdot)$ são de uma certa família, então

- $\{\psi_t\}$ converge (em certo sentido) para uma distribuição limite ψ tal que

$$\psi(k') = \int H(k', k) d\psi(k) \tag{8}$$

Remark

Uma distribuição ψ que satisfaz (8) é chamada de **distribuição invariante** *da função de transição H.*

Uma distribuição invariante é um análogo estocástico do ponto estacionário no caso sem incerteza.

Suponha

- $g(\cdot)$ e $G(\cdot)$ dadas
- H possui uma única distribuição estacionária ψ
- dado k_0, ψ_t converge para ψ

Seja ϕ uma função contínua

Remark

Uma Lei dos Grandes Números estabelece que

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} \phi(k_t) = \int \phi(k) d\psi(k) \tag{9}$$

- serve para econometria
- serve para calibração

Crescimento sob Equilíbrio Competitivo

Remark

A solução do problema do planejador (em certos casos) pode ser interpretado como uma predição sobre o comportamento de economias de mercado.

- relação entre equilíbrio competitivo e Ótimo de Pareto
  - visto em Microeconomia

Hipóteses:

- grande número de indivíduos
- firmas idênticas (msm f. produção com ret. cte. de escala)
- simplificação: horizonte finito e não há incerteza
- os indivíduos
  - possuem todos os fatores de produção
  - são donos das firmas
  - possuem a mesma dotação de riqueza
- transações ocorrem todas em $t = 0$ (*once-for-all markets*)
  - tds são capazes de se comprometer com promessas futuras

Crescimento sob Equilíbrio Competitivo

Dado $\{(c_t^*, k_{t+1}^*)\}$, solução do problema do planejador

- quer-se calcular preços que suportem estas qtdes como de equilíbrio competitivo

Seja,

- p_t: preço de 1 unidade de bem entregue em $t \in \{0, 1, \cdots\}$
- w_t: preço de 1 unidade de trabalho em t (em unidades de bem de t)
  - salário real
- r_t: taxa de aluguel do capital em t (em unidades de bem de t)

Crescimento sob Equilíbrio Competitivo

O problema da firma representativa é, para dados $\{(p_t, w_t, r_t)\}_{t=0}^{T}$,

$$\max_{\{k_t, n_t, y_t\}_{t=0}^{T}} \left\{ \sum_{t=0}^{T} p_t \left(y_t - r_t k_t - w_t n_t \right) \right\} \tag{1}$$

$$s.t.\ y_t \leq F(k_t, n_t), \qquad t = 0, 1, 2, \cdots, T \tag{2}$$

Crescimento sob Equilíbrio Competitivo

O problema do indivíduo representativo, para dados $\{(p_t, w_t, r_t)\}_{t=0}^{T}$, é

$$\max_{\{(c_t, i_t, x_{t+1}, k_t, n_t)\}_{t=0}^{T}} \left\{ \sum_{t=0}^{T} \beta^t U(c_t) \right\} \tag{3}$$

sujeito a

$$\sum_{t=0}^{T} p_t(c_t + i_t) \leq \sum_{t=0}^{T} p_t(r_t k_t + w_t n_t) + \pi \tag{4}$$

$$x_{t+1} = (1-\delta)x_t + i_t, \qquad t = 0, 1, \cdots, T, \; x_0 \; dado \tag{5}$$

$$0 \leq n_t \leq 1, \qquad 0 \leq k_t \leq x_t, \qquad t = 0, 1, \cdots, T \tag{6}$$

$$c_t \geq 0, \; x_{t+1} \geq 0, \qquad t = 0, 1, \cdots, T \tag{7}$$

em que x_t denota o estoque de capital em t e k_t a oferta de capital em t

Crescimento sob Equilíbrio Competitivo

Definition

Um equilíbrio competitivo consiste de

- um conjunto de preços $\{(p_t, w_t, r_t)\}_{t=0}^T$
- uma alocação $\{(k_t^d, n_t^d, y_t)\}_{t=0}^T$ para a firma
- uma alocação $\{(c_t, i_t, x_{t+1}, k_t^s, n_t^s)\}_{t=0}^T$ para o indivíduo

tais que

(a) $\{(k_t^d, n_t^d, y_t)\}_{t=0}^T$ é solução de (1) e (2), dados $\{(p_t, w_t, r_t)\}_{t=0}^T$

(b) $\{(c_t, i_t, x_{t+1}, k_t^s, n_t^s)\}_{t=0}^T$ é solução de (3)-(7), dados $\{(p_t, w_t, r_t)\}_{t=0}^T$

(c) todos os mercados se equilibram

$$k_t^d = k_t^s, \qquad n_t^d = n_t^s, \qquad c_t + i_t = y_t, \qquad \forall t$$

- Conjecturas (a ser confirmadas)
  - $p_t > 0$, pois $U'(\cdot) > 0$
  - $w_t, r_t > 0$, pois $F_k(\cdot) > 0$ e $F_n(\cdot) > 0$
  - $k_t = k_t^s = k_t^d$ e $n_t = n_t^s = n_t^d$, as qtdes transacionadas

O problema da firma é estático e não há desperdício do produto

$$\max_{k_t, n_t} \left\{ p_t \left[F(k_t, n_t) - r_t k_t - w_t n_t \right] \right\}, \qquad t = 0, 1, \cdots, T \tag{8}$$

- As CPO's são:

$$r_t = F_k(k_t, n_t), \qquad t = 0, 1, \cdots, T \tag{9}$$

$$w_t = F_n(k_t, n_t), \qquad t = 0, 1, \cdots, T \tag{10}$$

Remark

Como F é homogênea de grau 1, então pelo Teo. de Euler

$$\pi_t = p_t \left[F(k_t, n_t) - F_k(k_t, n_t) k_t - F_n(k_t, n_t) n_t \right] = 0$$

O consumidor oferta inelasticamente os fat. de produção, $n_t = 1, k_t = x_t$

$$\max_{\{(c_t, k_{t+1})\}_{t=0}^{T}} \left\{ \sum_{t=0}^{T} \beta^t U(c_t) \right\} \tag{11}$$

$$s.t. \ \sum_{t=0}^{T} p_t \left[c_t + k_{t+1} - (r_t + 1 - \delta) k_t - w_t \right] \leq 0 \tag{12}$$

$$c_t \geq 0, \ k_{t+1} \geq 0, \qquad t = 0, 1, \cdots, T, \ k_0 = x_0 \ dado \tag{13}$$

- no ótimo $c_t \geq 0$ é inativa e $k_{T+1} = 0$

- se λ é o multiplicador de lagrange na R.O. (12), as CPOs são

$$\beta^t U'(c_t) - \lambda p_t = 0 \tag{14}$$

$$\lambda \left[(r_{t+1} + 1 - \delta) p_{t+1} - p_t \right] \leq 0, \qquad t = 0, 1, \cdots, T \tag{15}$$

com igualdade em (15) se $k^*_{t+1} > 0$

- o mercado de bens em equilíbrio requer

$$F(k_t, 1) = c_t + k_{t+1} - (1 - \delta) k_t, \qquad \forall t \tag{16}$$

Crescimento sob Equilíbrio Competitivo

Theorem (I Teorema do Bem Estar Social)

Se $\{(c_t^e, k_{t+1}^e, p_t^e, w_t^e, r_t^e)\}_{t=0}^T$ *é um equilíbrio competitivo, então* $\{(c_t^e, k_{t+1}^e)\}_{t=0}^T$ *é uma solução do problema do planejador.*

Proof.

Resolvido em sala. □

Crescimento sob Equilíbrio Competitivo

Theorem (II Teorema do Bem Estar Social)

Se $\{(c_t^*, k_{t+1}^*)\}_{t=0}^{T}$ *é uma solução do problema do planejador, então ela compõe um equilíbrio competitivo.*

Proof.

O exercício 2.8 mostra que os preços a seguir suportam a alocação $\{(c_t^*, k_{t+1}^*)\}_{t=0}^{T}$ como equilíbrio competitivo.

$$p_t^* = p_{t-1}^*/f'(k_t^*), \qquad t = 1, 2, \cdots, T, \qquad p_0^* \text{ qualquer} \tag{20}$$

$$r_t^* = f'(k_t) - (1 - \delta) \tag{21}$$

$$w_t^* = f(k_t^*) - k_t^* f'(k_t^*) \tag{22}$$

□

Crescimento sob Equilíbrio Competitivo

Resolva o exercício a seguir:

- o exercício a seguir refere-se a subseção 2.3.

Exercise (2.8 - II Teorema do Bem Estar)

Mostre que a solução do problema do planner pode ser suportado como um equilíbrio competitivo (ver enunciado no livro).

Crescimento sob Equilíbrio Competitivo

Resolva o exercício a seguir:

Exercise (2.9 - II Teorema do Bem Estar)

Mostre que a solução do problema do planner pode ser suportado como um equilíbrio competitivo em que somente as firmas podem investir em capital físico (ver enunciado no livro).

- O problema da firma é

$$\max_{\{(k_t,n_t,i_t)\}_{t=0}^{T}} \left\{ \sum_{t=0}^{T} p_t \left[y_t - w_t n_t - i_t \right] \right\} \quad s.t. \begin{cases} i_t = k_{t+1} - (1-\delta) k_t \\ y_t \leq F(k_t, n_t) \\ k_t \geq 0, \;\; n_t \geq 0, \;\; k_0 \; dado \end{cases}$$

- O problema do consumidor é

$$\max_{\{(c_t,n_t)\}_{t=0}^{T}} \left\{ \sum_{t=0}^{T} \beta^t U(c_t) \right\} \quad s.t. \begin{cases} \sum_{t=0}^{T} p_t c_t \leq \sum_{t=0}^{T} p_t w_t n_t + \pi \\ 0 \leq n_t \leq 1, \;\; c_t \geq 0 \end{cases}$$

Crescimento sob Equilíbrio Competitivo

Resolva o exercício a seguir:

Exercise (2.10 - II Teorema do Bem Estar)

Mostre que a solução do problema do planner pode ser suportado como um equilíbrio competitivo em que a cada período se abre um mercado de títulos (ver enunciado no livro).

- O problema da firma é o mesmo problema estático discutido no capítulo
- O problema do consumidor é

$$\max_{\{(c_t, k_{t+1}, s_{t+1}, n_t)\}_{t=0}^{T}} \left\{ \sum_{t=0}^{T} \beta^t U(c_t) \right\}$$

$$s.t. \begin{cases} c_t + q_t s_{t+1} + k_{t+1} \leq r_t k_t + s_t + (1-\delta) k_t + w_t n_t \\ 0 \leq n_t \leq 1, \;\; c_t \geq 0, \;\; k_{t+1} \geq 0, \;\; k_0 \; dado \end{cases}$$

Crescimento sob Equilíbrio Competitivo

O exercícios acima mostraram equivalência entre

- Economia I: mercados completos (in the Arrow-Debreu sense)
  - mercado único em $t = 0$
- Economia II: mercados limitados a *spot transactions* (Radner)
  - in factor of production
  - in goods
  - in one-period securities

sob *perfect foresight* (expectativas racionais no contexto sem incerteza)

Vejamos agora:

- Economia III: Equilíbrio Competitivo Recursivo
  - indivíduos são *dynamic programmers*
  - preços em função do estado *k*

Crescimento sob Equilíbrio Competitivo

Preço dos fatores: o problema da firma continua estático

$$R(k) = F_k(k,1) \qquad \text{and} \qquad \omega(k) = F_n(k,1), \qquad \forall k > 0 \tag{23}$$

Problema do indivíduo:

- k: capital agregado
- K: capital individual
- ao agregar, tem-se $k = K$
- se $h(k)$ denota o capital agregado no próximo período, então

$$V(K,k) = \max_{C,Y} \{U(C) + \beta V[Y, h(k)]\} \tag{24}$$

s.t. $C + Y - (1-\delta)K \leq R(k)K + \omega(k)$

- seja $H(K,k)$ a política ótima para o capital individual

Definition

Um **Equilíbrio Competitivo Recursivo** é

- uma função valor, $V : \mathbb{R}^2_+ \mapsto \mathbb{R}$
- uma função política, $H : \mathbb{R}^2_+ \mapsto \mathbb{R}_+$, para o indíviduo representativo
- uma lei de movimento agregada, $h : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$, para o capital
- preços dos fatores $R : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ e $\omega : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$

tais que

(a) V satisfaz (24), dado h

(b) H é a função política ótima em (24)

(c) $H(k, k) = h(k)$

(d) R e ω satisfazem (23)

Crescimento sob Equilíbrio Competitivo

Theorem (I Teorema do Bem Estar Social)

Se (V, H, h, R, ω) é um ECR, então $v(k) = V(k, k)$ é a função valor do problema do planejador e $g = h$ é a função política correspondente.

Theorem (II Teorema do Bem Estar Social)

Se v é a função valor do problema do Planejador e g é a política ótima associada, então o par (V, H) satisfazendo (24) tem a propriedade $V(k, k) = v(k)$ e $H(k, k) = g(k)$ para todo k

Crescimento sob Equilíbrio Competitivo

É razoável esperar tais resultados;

- A CPO e o envelope no PP são

$$U'[f(k) - g(k)] = \beta v'(k) \tag{25}$$

$$v'(k) = U'[f(k) - g(k)]f'(k) \tag{26}$$

- a CPO e o envelope para o indivíduo é (ver álgebra em sala)

$$U'[f(k) - h(k)] = \beta V_1[h(k), h(k)] \tag{27}$$

$$V_1(k, k) = U'[f(k) - h(k)]f'(k) \tag{28}$$

Remark

Se $v'(k) = V_1(k, k)$*, então* (27) *e* (28) *coincidem com* (25) *e* (26).