Noções de programação em Matlab

Implementação de Métodos Recursivos

Jefferson Bertolai

Setembro de 2016

Objetivos

- Macroeconomia e heterogeneidade
- Otimização e pontos fixos
- Aprender no contexto
- Métodos clássicos

Operações Básicas

Operação	**Símbolo**	**Exemplos**
$x + y$	$+$	$2 + 3$
$x - y$	$-$	$5 - 7$
$x.y$	$*$	$7 * 8$
$x \div y$	/ ou \	9/3 ou 3\9
x^y	^	2^3

Operadores Lógicos

Descrição	**Símbolo**	**Exemplo**	**Valor lógico**
maior do que	$>$	$2 > 0,5$	1
maior ou igual a	$>=$	$2 >= 2,5$	0
igual a	$==$	$3 == (4-1)$	1
diferente de	$\sim=$	$2 * 3 \sim= 6$	0
e	$\&$	$(3 > 1)\&(2 > 2)$	0
disjunção	$\|$	$(3 > 1)\|(1 < 2)$	1
disjunção exclusiva	xor	$\texttt{xor}((3 > 1),(1 < 2))$	0

Definição e Manipulação de Objetos

```
var = 5    % cria uma variável com o nome 'var'
           % e valor inicial de '5'

v = [1 4 2]    % cria o vetor de três elementos a seguir
```

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

```
x = [var v]    % concatena o objetos 'var' e 'v', criando
               % vetor de 4 elementos a seguir
```

$$x = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

```
var = var + 2;    % soma 2 à variável var
```

Definição e Manipulação de Objetos

```
y = v';    % transpõe o vetor v, ou seja,
```

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

```
c = 1:2:7;    % cria o vetor a seguir
```

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

```
Z = zeros(2,2)    % cria matriz 2x2 de zeros
```

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definição e Manipulação de Objetos

```
O = ones(3)    % cria matriz 3x3 a seguir
```

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
d = [-5,3;2 7];    % cria a matriz a seguir
```

$$d = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

```
d(:,1)    % retorna primeira coluna de d
d(2,:)    % retorna segunda linha de d
d(1,2)    % retorna o elemento da linha 1 da coluna 2
```

Definição e Manipulação de Objetos

```
dd = (-1).*d    % multiplica matriz d (elemento a
                % elemento) por (-1)
```

$$dd = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$$

```
dd.*d    % multiplica as matrizes dd e d, elemento a
         % elemento

dd*d    % multiplicação matricial padrão


z = dd.^d    % para cada (i,j), calcula a matriz com
             % elemento geral z(i,j) dado por
             % dd(i,j)^d(i,j)
```

Definição e Manipulação de Objetos

```
eye(n);     % cria matriz identidade de dimensão n por n

plot(x,y)     % constrói e exibe o gráfico da função f tal
              % que para todo i vale y(i) = f(x(i))

kron(d,dd);     % produto Kronecker entre d e dd.
                % Lembrando que não há restrições sobre as
                % dimensões das matrizes

size(dd);      % retorna as dimensões da matriz dd
```

Funções e Constantes pré-definidas

Comando	**Função / Constante**	**Exemplo**
sqrt	raiz quadrada	sqrt(2)
pi	$\pi = 3,1416...$	-
cos	cosseno	cos(0)
tan	tangente	tan(pi/4)
exp	exponencial	exp(1)
log	logarítmica	log(exp(3))
inf	∞	-
sum	somatória	sum([5,9,1])
prod	produtório	prod([1,3,7])
max	máximo	max([1,4,2])

M-Files

<u>**Script M-files:**</u> define uma rotina a ser executada pela Matlab

```
% salvar script como routine.m
X = [1,2;3,4];
Y = [2,1;4,3];
Z = X*Y
```

Execução: invocar comando `routine` na janela de comandos

M-Files

Function M-files: função definida pelo usuário

```
% salvar m-file como func.m
function [out1 out2] = func(arg1,arg2)
out1 = arg1+arg2;
out2 = arg1*arg2
```

Execução: invocar comando `func(2,3)` na janela de comandos

Loops

for: determina que uma rotina seja repetida um número determinado de vezes.
A rotina abaixo resulta em $f = 1 * 2 * 3 * 4 = 24$

```
f = 1;
for n=2:4
      f = f*n;
end
f
```

Loops

while: determina que uma rotina seja repetida enquanto uma determinada condição for verdadeira

```
n = 1;    oldsum = -1;    newsum = 0;
while newsum > oldsum
        oldsum = newsum;
        newsum = newsum + n^(-4);
        n = n + 1;
end
newsum
```

Branching (if)

```
function y = absval(x)
if x >= 0
    y = x;
else
    y = -x;
end
```

```
function y = signum(x)
if x > 0
    y = 1;
elseif x==0
    y = 0;
else
    y = -1;
end
```

Comandos Especiais

Comando	**Descrição**
Ctrl + c	interrompe procedimento
;	impede exibição do output do comando
%	insere comentário
Ctrl + r	transforma comando em comentário
Crtl + t	transforma comentário em comando
whos	exibe objetos atualmente definidos
F5	salva e executa script
F9	executa seleção
eye(n)	cria matriz identidade com dimensões nxn
clear x	deleta objeto x
clear all	deleta todos os objetos

Considere $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \rightarrow B$ uma função

- Seja X uma aproximação finita de A, ou seja,

$$X \subset A, \text{ tal que } |X| < \infty$$

- Seja $Y = f(X)$, ou seja,

$$Y = \{y \in B : y = f(x) \text{ para algum } x \in X\}$$

Observe que

- $|Y| < \infty \Rightarrow \arg\max\{f(x); x \in X\} \neq \emptyset$
- $|X| \rightarrow \infty \Rightarrow \arg\max\{f(x); x \in X\} \rightarrow \arg\max\{f(x); x \in A\}$

Método de Discretização

Exemplo 1

Considere a funo $u : [0, 100] \to \mathbb{R}$ definida por $u(x) = 10\sqrt{x} - x$.

- X = {0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100}
- Y = {0, 21.6, 24.7, 24.8, 23.2, 20.7, 17.4, 13.7, 9.4, 4.9, 0}
- $v = \max\{u(x); x \in X\} = 24.8$
- $g = \arg\max\{u(x); x \in X\} = 30$

Considere a funo $u : [0, 100] \to \mathbb{R}$ definida por $u_\theta(x) = \theta\sqrt{x} - x$.

- grid: $X = \{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$

Há 2 tipos de indivíduos, $\theta_L = 10$ e $\theta_H = 14$

$Y_L = \{0,\ 21.6,\ 24.7,\ 24.8,\ 23.2,\ 20.7,\ 17.4,\ 13.7,\ 9.4,\ 4.9,\ 0\}$

$Y_H = \{0,\ 34.2,\ 42.6,\ 46.7,\ 48.5,\ 49.0,\ 48.4,\ 47.1,\ 45.2,\ 42.8,\ 40\}$

Solução:

- **função valor**: $[v(10), v(14)] = [24.8, 49.0]$
- **função política**: $[g(10), g(14)] = [30, 50]$

Método de Discretização

Comentários

Vantagem:
garantia de máximo global

Desvantagem: *curse of dimensionality*

- busca global pode ser muito custosa
- neste caso é preferível usar um método local (otimização contínua).

Considere que há N indivíduos, os quais vivem 2 períodos.

- Modelo de gerações sobrepostas (OLG model).
- utilidade instantânea do consumo: $u(c) = 10\sqrt{c}$
- utilidade total: $U(c_1, c_2) = u(c_1) + \beta[u(c_2) + w']$
- indivíduos nascem com riqueza $w_1 \in [0, 100]$.
- restrições $c_1 + w_2 \leq w_1$ e $c_2 + w_1' \leq w_2$.

Problema no segundo período:

$$v_2(w_2) = \max_{[0,w_2]}\{u(w_2 - w_1') + w_1'\}$$

Problema no primeiro período:

$$v_1(w) = \max_{[0,w_1]}\{u(w_1 - w_2) + \beta v_2(w_2)\}$$

Problema no segundo período:

$$v_2(w_2) = \max_{[0,w_2]}\{u(w_2 - w_1') + w_1'\}$$

- grid: $X = \{i \in \mathbb{Z} : 0 \leq i \leq 100\}$
- para cada $x_j \in X$, calcule $v_2(x_j)$ e $g_2(x_j)$ usando discretização.
- g_2: escolha de herança para cada nvel de riqueza na velhice.

Método de Discretização e Dinâmica

Exemplo 3 - Indução Retroativa

Problema no primeiro período:

$$v_1(w_1) = \max_{[0,w_1]} \{u(w_1 - w_2) + \beta v_2(w_2)\}$$

- usando $v_2(\cdot)$ calculado e o métdo de discretização,
- calcule $v_1(x_j)$ e $g_1(x_j)$ para cada $x_j \in X$
- g_1: escolha de poupança para a velhice.

- jovem com riqueza w_1, poupa para a velhice $w_2' = g_1(w_1)$.
- velho com riqueza w_2, escolhe deixar herança $w_1' = g_2(w_2)$.
- próxima geração escolherá de acordo com (g_1, g_2).

- Distribuição inicial de riqueza e idade é $p_0(\cdot)$ dada por

$$p_0(i,j) = \begin{cases} .5 & \text{se } i \in \{1,2\} \text{ e } j \in \{w_1, w_2\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

  - 1/2 da população é velha e 1/2 é jovem
  - os jovens possuem riqueza w_1
  - os velhos possuem riqueza w_2

- Note que a distribuição de gerações (idade) é $p_0^g(\cdot)$ tal que

$$p_0^g(i) = \sum_{j \in \mathbb{X}} p_0(i,j) = p_0(i, w_i) = \frac{1}{2} \qquad , \text{ para todo } i \in \{1,2\}$$

  - Idade média da população: $E(i) = \sum_{i=1}^{2} i.p_0^g(i)$

- Note que a distribuição de riqueza é $p_0^r(\cdot)$ tal que

$$p_0^r(j) = \sum_{i=1}^{2} p_0(i,j) = p_0(1,j) + p_0(2,j) \qquad , \text{ para todo } j \in \mathbb{X}$$

  - Riqueza (capital) média (total) da economia:

$$k_0 = E(j) = \sum_{j \in \mathbb{X}} j.p_0^r(i)$$

  - PIB da economia:

$$y_0 = F(k_0, 1) = F\left(\sum_{j \in \mathbb{X}} j.p_0^r(i), 1\right)$$

- Quantos velhos haverá amanhã? Qual será a riqueza deles?
  - $w_2' = g_1(\bar{w}_1)$
- Quantos jovens haverá amanhã? Qual será a riqueza individual deles?
  - $w_1' = g_2(\bar{w}_2)$
- Qual será a distribuição de riqueza e idade amanhã, $p_1(\cdot)$?

$$p_1(i,j) = \begin{cases} .5 & \text{se } i \in \{1,2\} \text{ e } j \in \{w_1', w_2'\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

  - 1/2 da população é velha e 1/2 é jovem
  - os jovens possuem riqueza w_1' e os velhos possuem riqueza w_2'

Método de Discretização e Dinâmica

Exemplo 3 - Comportamento agregado:

- a distribuição de gerações (idade) será $p_1^g(\cdot)$ tal que

$$p_1^g(i) = \sum_{j \in \mathbb{X}} p_1(i,j) = p_1(i, w_i') = \frac{1}{2} \qquad , \text{ para todo } i \in \{1,2\}$$

- a distribuição de riqueza será $p_1^r(\cdot)$ tal que

$$p_1^r(j) = \sum_{i=1}^{2} p_1(i,j) = p_1(1,j) + p_1(2,j) \qquad , \text{ para todo } j \in \mathbb{X}$$

  - Riqueza (capital) média (total) da economia:

$$k_1 = E(j) = \sum_{j \in \mathbb{X}} j.p_1^r(i)$$

  - PIB da economia:

$$y_1 = F(k_1, 1) = F\left(\sum_{j \in \mathbb{X}} j.p_1^r(i), 1\right)$$

Question

- *Como $p_0(\cdot)$ e $p_1(\cdot)$ são relacionadas?*

$$\begin{aligned} p_1(i+1,j) &= \sum_{k=0}^{100} p_0(i,k) I([g(i,k)=j]) \\ &= \begin{pmatrix} I_{[g(i,0)=0]} & \cdots & I_{[g(i,100)=0]} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p_0(i,0) \\ \vdots \\ p_0(i,100) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

em que

$$I([g(i,k)=j]) = \begin{cases} 1 \text{ se } g(i,k)=j \\ 0 \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Question

- *Como $p_0(\cdot)$ e $p_1(\cdot)$ são relacionadas?*

$$P_1 = M * P_0$$

em que $P_i = \begin{bmatrix} p_i(1,0) & \cdots & p_i(1,100) & p_i(2,0) & \cdots & p_i(2,100) \end{bmatrix}'$ e

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & I_{[g(2,0)=0]} & \cdots & I_{[g(2,100)=0]} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_{[g(2,0)=100]} & \cdots & I_{[g(2,100)=100]} \\ I_{[g(1,0)=0]} & \cdots & I_{[g(1,100)=0]} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{[g(1,0)=100]} & \cdots & I_{[g(1,100)=100]} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- A matriz M descreve a transição (de pessoas entre estados) da economia.
- Lei de movimento da economia: invariante a t

Question

- *Como $p_t(\cdot)$ e $p_{t+1}(\cdot)$ são relacionadas?*

$$P_{t+1} = M * P_t$$

em que $P_i = \left[p_i(1,0) \quad \cdots \quad p_i(1,100) \quad p_i(2,0) \quad \cdots \quad p_i(2,100)\right]'$ e

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & I_{[g(2,0)=0]} & \cdots & I_{[g(2,100)=0]} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_{[g(2,0)=100]} & \cdots & I_{[g(2,100)=100]} \\ I_{[g(1,0)=0]} & \cdots & I_{[g(1,100)=0]} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{[g(1,0)=100]} & \cdots & I_{[g(1,100)=100]} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Question

Qual será a dinâmica da economia?

- P_0 *é condição (distribuição) inicial dada*
- $P_1 = MP_0$
- $P_2 = MP_1 = M(MP_0) = M^2P_0$
- $P_3 = MP_2 = M(M^2P_0) = M^3P_0$
- $\vdots$
- $P_{t+1} = MP_t = M^tP_0$

Question

Existe uma distribuição limite?
A sequência de distribuições converge para uma distribuição estacionária?

- *se existe* $P = \lim_{t\to\infty} P_t$*, deve valer* $P_{t+1} = P_t = P$ *e, portanto,*

$$P = MP \qquad \Leftrightarrow \qquad P(1 - M) = 0$$

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right\}$$

restrito ao conjunto definido por

$$\begin{aligned} c_t \geq 0, k_{t+1} \geq 0 \quad &, \quad \forall t \geq 0 \\ c_t + k_{t+1} \leq F(k_t, 1) + (1-\delta)k_t \quad &, \quad \forall t \geq 0 \\ k_0 \text{ dado} \end{aligned}$$

- Suponha $f(k) = F(k, 1) + (1-\delta)k$

Reescrevendo o problema

$$\max_{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k_t) - k_{t+1}) \right\}$$

restrito ao conjunto definido por

$$k_{t+1} \in \Gamma(k_t) = [0, f(k_t)] \quad , \quad \forall t \geq 0$$
$$k_0 \text{ dado}$$

Reescrevendo o problema

$$v(k) = \max_{k' \in \mathit{\Gamma}(k)} \{u(f(k) - k') + \beta v(k')\}$$

em que $\mathit{\Gamma}(k) = [0, f(k)]$

- tempo discreto e horizonte infinito
- economia de trocas puras (não há produção)
- contínuo de indivíduos (massa 1)
- $e_i \in E := \{e_l, e_h\}$: dotação do agente
- transição markoviana *iid*:

$$\pi(e'|e) = \Pr(e_{t+1} = e'|e_t = e) > 0$$

- preferências representáveis por

$$E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)\right] \qquad \beta \in (0,1)$$

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} \qquad \sigma > 1$$

- há somente um ativo:
  - vendido ao preço q e paga uma unidade em $t+1$
  - restrição orçamentária

$$c + a'q \leq a + e$$

- restrição de endividamento: $a \geq \underline{a}$
- $x = (a, e) \in X$: estado do indivíduo
  - $X = A \times E$: espaço estado
  - $A = [\underline{a}, \infty)$
  - $E = \{e_l, e_h\}$ com $e_h > e_l$

Como no ótimo $c = a + e - qa'$, então a equação funcional é

$$V(x;q) = \max_{a' \in \Gamma(x;q)} \left\{ u(a + e - a'q) + \beta \sum_{e'} \pi(e'|e) V(x';q) \right\}$$

em que $\Gamma(x;q) = \left[\underline{a}, \frac{a+e}{q}\right]$

- Seja $g : X \to A$ a função política correspondente

$\lambda_t(a, e)$: qtde de pessoas com riqueza a e dotação e no período t

Lei de movimento da distribuição:

$$\lambda_{t+1}(a', e') = \sum_a \sum_e \lambda_t(a, e)\pi(e'|e)I(a', a, e)$$

em que $I(a', a, e) = 1$ se $g(a, e) = a'$ e nula cc.

- Usando a notação $x = (a, e)$,

$$\lambda_{t+1}(x') = \sum_x \lambda_t(x)\pi(e'|e)I(a', x)$$

- seja $\bar{x}$ o vetor de estados dado por

$$[(e_L, a_1), \ldots, (e_L, a_n), (e_H, a_1), \ldots, (e_H, a_n)]$$

- então a Lei de movimento da distribuição torna-se

$$\lambda'(\bar{x}) = \lambda(\bar{x})M$$

em que $M_{ij} = \pi(e'|e)I(a', x)$ se $x_i = (a, e)$ e $x_j = (a', e')$

- uma distribuição $\bar{\lambda}$ é dita estacionária se

$$\bar{\lambda}(\bar{x}) = \bar{\lambda}(\bar{x})M$$

Definition

Dado $\underline{a}$, um equilíbrio estacionário é um preço q, uma função política $g(a,e)$ e uma distribuição estacionária $\lambda(a,e)$ tais que

- $g(a,e)$ resolve o problema do indivíduo (a,e)
- λ é induzida por π e $g(a,e)$ (via M)
- oferta e demanda se igualam no mercado de crédito

$$G(q) = \sum_x \lambda(x) g(x) = 0$$

Mercados Incompletos

Algoritmo:

(i) fixe um preço $q > 0$

(ii) calcule $v(x)$ e $g(x)$ que resolvem o problema do indivíduo

(iii) calcule M usando π e $g(x)$ e encontre a distribuição invariante λ

(iv) calcule o excesso de oferta de crédito $G(q)$

- se $G(q) < 0$, há excesso de demanda:

  $$q = \alpha q \qquad \alpha < 1$$

  e retorne ao passo (ii) usando novo preço
- se $G(q) > 0$, há excesso de oferta:

  $$q = \alpha q \qquad \alpha > 1$$

  e retorne ao passo (ii) usando novo preço
- se $G(q) = 0$, o mercado está em equilíbrio: q **é o preço de equilíbrio**

- Permite encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$.

Theorem

Seja $A \subseteq \mathbb{R}$. Se $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua e existem $\underline{x} \in A$ e $\overline{x} \in A$ tais que:

- $\underline{x} < \overline{x}$
- $f(\underline{x})f(\overline{x}) < 0$

então $\exists\ \widetilde{x} \in (\underline{x}, \overline{x})$ tal que $f(\widetilde{x}) = 0$.
Adicionalmente, se

- $f'(x) < 0$*, para todo* $x \in A$*,*

então tal solução é única.

Remark

esta técnica pode ser utilizada para maximização, pois no ótimo interior

$$f(\widetilde{x}) \equiv \frac{\partial F(\widetilde{x})}{\partial x} = 0$$

em que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é a função a ser maximizada.*

Algoritmo:

(i) Encontre $\underline{x}$ e $\overline{x}$ tais que $f(\underline{x})f(\overline{x}) < 0$.

Obs.: sabe-se que $\widetilde{x} \in (\underline{x}, \overline{x})$

(ii) Defina $x_m = \frac{\overline{x}+\underline{x}}{2}$

(iii) Calcule $f(x_m)$

- se $f(x_m) < 0$, faça $\overline{x} = x_m$
- se $f(x_m) > 0$, faça $\underline{x} = x_m$

(iv) Defina $x'_m = \frac{\overline{x}+\underline{x}}{2}$

(v) Calcule $\delta_x = |x'_m - x_m|$ e $\delta_f = |f(x'_m)|$ e defina $\delta \equiv \max\{\delta_x, \delta_f\}$

- se $\delta > 0$ retorne ao passo (iii).
- se $\delta = 0$, então x_m é a solução

Permite encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$.

- sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ e $f : A \to B$ diferenciável.

Usando expansão de Taylor tem-se

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)[x - x_0]$$

Remark

Uma estimativa de x tal que $f(x) = 0$ é $\overline{x}$ tal que

$$f(x_0) + f'(x_0)[\overline{x} - x_0] = 0$$

e portanto

$$\overline{x} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Algoritmo:

(i) Defina $i = 0$ e escolha $\alpha \in \mathbb{R}$. Faça $x_i = \alpha$

(ii) Estime x_{i+1} segundo

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

(iii) Calcule $\delta_x = |x_{i+1} - x_i|$ e $\delta_f = |f(x_{i+1})|$ e defina $\delta \equiv \max\{\delta_x, \delta_f\}$

- se $\delta > 0$, faça $i = i + 1$ e retorne ao passo (ii)
- se $\delta = 0$, então x_i é a solução