Definitions, some results, and some exercises

Mathematical Preliminaries (Stokey & Lucas (1989): cap. 3)

Jefferson Bertolai

August - 2016

Lembrando que

$$\max_{\{(c_t,k_{t+1})\}_{t=0}^{\infty}} \left(\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) \right)$$

$$s.t. \begin{cases} c_t + k_{t+1} \leq f(k_t) \\ c_t, k_{t+1} \geq 0, \ t = 0, 1, \ldots \\ k_0 \ dado \end{cases}$$

levava a equação funcional

$$v(k) = \max_{c,y} [U(c_t) + \beta v(y)] \tag{1}$$

$$s.t. \begin{cases} c + y \leq f(k) \\ c, y \geq 0 \end{cases}$$

Nossa tarefa

Mostrar precisamente a relação entre estes dois problemas

- desenvolver métodos matemáticos para lidar com (1)
- provar unicidade e existência de $v(\cdot)$ que satisfaz (1)

Método de Aproximações sucessivas

Método de Aproximações sucessivas

1. chute inicial para v_0
2. calcule v_1 tal que

$$v_1(k) = \max_{c,y} \{U(c) + \beta v_0(y)\}, \qquad \forall k \geq 0 \tag{2}$$

3. se $v_1 = v_0$, então provou-se existência de v que satisfaz (1)
   - *guess-and-verify* (*lucky guessing*)
   - usamos isso no exercise 2.3
4. se $v_1 \neq v_0$, então v_1 torna-se o novo chute

Método de Aproximações sucessivas

O método:
Calcule a sequência de funções $\{v_n\}$ usando

$$v_{n+1}(k) = \max_{c,y} \{U(c) + \beta v_n(y)\}, \qquad \forall k \geq 0 \text{ e } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

- espera-se que $\exists v$ tq $v = \lim_{n\to\infty} v_n$ e satisfaz (1)
- se $v_n \to v$, qq que seja v_0, então v é a única função que satisfaz (1)

Question

Qual é a lógica para esperar que isso ocorra?

- Considere $g_0(\cdot)$ uma política factível qualquer

$$0 \leq g_0(k) \leq f(k), \qquad \forall k \geq 0$$

obs.: um exemplo seria $g_0(k) = \theta f(k)$, para algum $\theta \in (0, 1)$

- A utilidade sob tal política seria

$$w_0(k_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U\left[f(k_t) - g_0(k_t)\right]$$

em que $k_{t+1} = g_0(k_t)$ para $t = 0, 1, 2, \ldots$

Remark

O exercise 3.1 (resolvido em sala) mostra que

$$w_0(k) = U[f(k) - g_0(k)] + \beta w_0[g_0(k)], \qquad \forall k \geq 0$$

Método de Aproximações sucessivas

Lógica para convergência de $\{v_n\}$

Se $v_0 = w_0$ em (2), então

- planner escolhe k_1 em $t = 0$
- e segue a política $g_0(\cdot)$ a partir de $t = 1$
- seja $g_1(k)$ a escolha e $v_1(k)$ a utilidade gerada

Como $g_0(k)$ era factível em $t = 0$, então

$$\begin{aligned} v_1(k) &= \max_{0 \le y \le f(k)} \{U[f(k) - y] + \beta v_0(y)\} \\ &\ge U[f(k) - g_0(k)] + \beta v_0[g_0(k)] = v_0(k) \end{aligned} \tag{4}$$

Agora considere a escolha de y em $t = 0$, supondo

- $g_1(y)$ em $t = 1$ e $g_0(\cdot)$ a partir de $t = 2$
- $(g_1(y), g_0(\cdot))$ gera $v_1(y)$
- O problema será

$$v_2(k) = \max_{0 \leq y \leq f(k)} \{U[f(k) - y] + \beta v_1(y)\}$$

Como $v_1(y) \geq v_0(y)$, então $v_2(k) \geq v_1(k)$. De fato,

$$\begin{aligned} v_2(k) &= \max_{0 \leq y \leq f(k)} \{U[f(k) - y] + \beta v_1(y)\} \\ &\geq \max_{0 \leq y \leq f(k)} \{U[f(k) - y] + \beta v_0(y)\} = v_1(k) \end{aligned} \tag{2}$$

Método de Aproximações sucessivas

Lógica para convergência de $\{v_n\}$

Repetindo o raciocínio, tem-se

$$v_{n+1}(k) \geq v_n(k), \qquad \forall k \geq 0 \text{ e todo } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Quanto mais flexibilidade para o planner, mais bem estar

- razoável esperar que se a flexibilidade for grande o suficiente,
  - não mais haverá melhorias
- neste ponto, deve valer $v_{n+1} = v_n$

Para qualquer função $w : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$, defina $Tw : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$(Tw)(k) = \max_{0 \leq y \leq f(k)} \{U[f(k) - y] + \beta w(y)\} \tag{5}$$

- $\{v_n\}$ para cada v_0 é tal que $v_{n+1} = Tv_n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

Objetivo

Quer-se estabelecer convergência de $\{v_n\}$, ou Ponto Fixo de T

- seja $\mathbb{C}$ um conjunto de funções tal que $T : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$
- quer-se encontrar $v \in \mathbb{C}$ tal que $v = Tv$

Metric Spaces and Normed Vector Spaces

Metric Spaces and Normed Vector Spaces

Definition

A (real) vector space $\mathbb{X}$ is a set of elements (vectors) together with two operations, addition and scalar multiplication.

- $\forall$ par $x, y \in \mathbb{X}$, adição gera um novo vetor denotado $x + y \in \mathbb{X}$
- $\forall x \in \mathbb{X}$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, a multiplicação escalar gera um novo vetor denotado $\alpha x \in \mathbb{X}$

Para toda tripla $x, y, z \in \mathbb{X}$ e todo para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se

(a) $x + y = y + x$

(b) $(x + y) + z = x + (y + z)$

(c) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

(d) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

(e) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

Adicionalmente, existe um vetor zero $\theta \in \mathbb{X}$ tal que

(f) $x + \theta = x$

(g) $0.x = \theta$

Finalmente,

(h) $1.x = x$

Remark

Um espaço vetorial possui um zero e é fechado para soma e multiplicação escalar

- *é também chamado de espaço linear*

Remark

O exercício 3.2 (*discutido em sala*) *ilustra casos de espaços que são vetoriais e de outros que não o são.*

Para falarmos de convergência em espaços vetoriais, precisamos de uma noção de distância

Definition

Um **espaço métrico** é um conjunto S, juntamente com uma **métrica** (função distância) $\rho : S \times S \mapsto \mathbb{R}$ tais que para qq tripla $x, y, z \in S$, tem-se:

(i) $\rho(x, y) \geq 0$, com igualdade se, e somente se, $x = y$

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

(iii) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (Desigualdade Triangular)

Remark

O exercício 3.3 (discutido em sala) ilustra casos de espaços que são métricos.

Metric Spaces and Normed Vector Spaces

Uma métrica frequentemente usada é $\rho(x, y) = \rho(x - y, \theta)$

Definition

Um espaço vetorial **normado** é um espaço vetorial S dotado de uma **norma** $||\cdot|| : S \mapsto \mathbb{R}$ tal que $\forall x, y \in S$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$

(i) $||x|| \geq 0$, com igualdade $\Leftrightarrow x = \theta$

(ii) $||\alpha x|| = |\alpha|.||x||$

(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Desigualdade Triangular)

- É comum ver espaços vetoriais normados $(S, ||\cdot||)$ como espaços métricos em que $\rho(x, y) = ||x - y||$, $\forall x, y \in S$

Remark

O exercício 3.4 *(discutido em sala) ilustra casos de espaços que são normados.*

Lembrando que

Definition

A sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ em S **converge** para $x \in S$ se para cada $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon, \qquad \forall n \geq N_\varepsilon \tag{1}$$

- denota-se $x_n \to x$
- $x_n \to x$ sse $\rho(x_n, x) \to 0$

Definition

Uma sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ em S é uma **sequência de Cauchy** (satisfaz o critério de Cauchy) se para cada $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon, \qquad \forall m, n \geq N_\varepsilon \tag{1}$$

A resolução do exercício 3.5 pode ser encontrada em Madureira (2013)

Exercise (3.5)

(a) Se $\{x_n\}$ possui limite, então ele é único
(b) Se $\{x_n\}$ é convergente, então ela satisfaz o critério de Cauchy
(c) Se $\{x_n\}$ satisfaz o critério de Cauchy, então ela é limitada
(d) $x_n \to x$ se, e somente se, toda subsequência de $\{x_n\}$ converge para x

Metric Spaces and Normed Vector Spaces

Definition

Um espaço métrico é **completo** se toda sequência de Cauchy em S converge para um elemento de S.

- Um espaço métrico completo é chamado de **Espaço de Banach**.

Tomaremos como dado que

- O conjunto $\mathbb{R}$ com a métrica $\rho(x, y) = |x - y|$ é um espaço métrico completo.

Remark

O exercício 3.6 *(discutido em sala) ilustra casos de espaços que são completos e de outros que não o são. Ainda, ele mostra que*

- *se (S, ρ) é um espaço métrico completo e S' é um subconjunto fechado de S, então (S', ρ) é um espaço métrico completo.*

Exercise

3.3(a): $S = \mathbb{Z}$ com $\rho(x,y) = |x-y|$ é completo.
Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy com $x_n \in S, \forall n \in \mathbb{N}$.

- Tome $\varepsilon \in (0,1)$.
- Como $\{x_n\}$ é Cauchy, então $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - x_n| < \varepsilon < 1, \qquad \forall m, n \in N_\varepsilon$$

- Mas $|x_m - x_n| < 1$ somente é possível se $x_m = x_n$, pois caso contrário $|x_m - x_n| \geq 1$.

Logo, $\exists x \in S$ tal que $x_n = x$ para todo $n > N_\varepsilon$ e, portanto,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in S.$$

Exercise

3.4(*d*): $S = l_\infty$ com $\rho(x,y) = ||x-y|| = \sup_k\{|x_k - y_k|\}$ é completo.
Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy com $x_n \in S, \forall n \in \mathbb{N}$.

- Note que para dados $m, n \in \mathbb{N}$

$$|x_m^k - x_n^k| \leq \sup_j\{|x_m^j - x_n^j|\} = ||x_m - x_n||, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

- Como $\{x_n\}$ é Cauchy, então $\{x_n^k\}_{n=1}^\infty$ é Cauchy.
- Como $\{x_n^k\}_{n=1}^\infty$ é Cauchy em $\mathbb{R}$, então converge.
- Como $\mathbb{R}$ é completo, então $x^k \equiv \lim_{n\to\infty} x_n^k \in \mathbb{R}$
- Seja $x = (x^1, x^2, x^3, \cdots)$ sequência em $\mathbb{R}$. Então, $x \in S$ se é limitada
- Como $\{x_n^k\}_k \in l_\infty$ é limitada, então $\exists M_n$ tal que $||x_n|| = \sup_j |x_n^j| \leq M_n$
- Portanto, $|x^k| = |\lim_{n\to\infty} x_n^k| = \lim_{n\to\infty} |x_n^k| \leq M_n$, pois $|\cdot|$ é contínua
- Logo, x é limitada.

Exercise

3.4(d): **Continuação**

Resta mostrar que $x_n \to x$.

- Note que dado $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, n > N$ tem-se

$$|x_m^k - x_n^k| \leq \sup_j \{|x_m^j - x_n^j|\} = ||x_m - x_n|| < \varepsilon/2, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

- Fazendo $m \to \infty$, tem-se

$$|x^k - x_n^k| < \varepsilon/2, \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \forall n > N$$

- Tomando o supremo em k

$$||x - x_n|| = \sup_k |x_n^k - x^k| \leq \varepsilon/2, \qquad \forall n > N$$

- Logo, $||x_n - x|| < \varepsilon$, para todo $n > N$.

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrrio, conclui-se que $x_n \to x$.

Exercise

3.3(c): (S, ρ) **não** é completo se

- S é o espaço de funções contínuas e *estritamente crescente* em $[a, b]$
- $\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$

Para mostrar que (S, ρ) não é completo, basta encontrar uma seq. de Cauchy em S que converge para $x \notin S$.

- Tome $\{x_n\}$ tal que $x_n(t) = 1 + t/n$, para todo $t \in [a, b]$
- Tome $m, n \in \mathbb{N}$, com $m > n$. Então,

$$\rho(x_n, x_m) = \max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x_m(t)| = \max_{a \leq t \leq b} \left| \frac{t}{n} - \frac{t}{m} \right| = \max\{|a|, |b|\} \frac{m - n}{nm}$$

- Note que $\rho(x_n, x_m) \to 0$ quando $m, n \to \infty$
- Mas $x_n \to x$ tal que $x(t) = 1, \forall t \in [a, b]$, (provar isso!)
- Como x é uma função constante, $x \notin S$

Exercise

$3.6(b)$: Se (S, ρ) é um espaço métrico completo e S' é fechado e tal que $S' \subseteq S$

- então (S', ρ) é um espaço métrico completo

Primeiramente, note que (S', ρ) é um espaço métrico. De fato,

- Como (S, ρ) é um espaço métrico, então $\forall x, y, z \in S$
  (i) $\rho(x, y) \geq 0$, com igualdade sse $x = y$
  (ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
  (iii) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$
- $(i), (ii)$ e (iii) valem $\forall x, y, z \in S$ e $S' \subseteq S \Rightarrow$ elas valem $\forall x, y, z \in S'$

Agora, note que (S', ρ) é um espaço métrico **completo**. De fato,

- Tome $\{x_n\}$ uma seq. de Cauchy em S'
- $S' \subseteq S \Rightarrow \{x_n\}$ uma seq. de Cauchy em S
- S é espaço métrico completo $\Rightarrow \{x_n\}$ converge para um ponto $x \in S$
- Como $x_n \to x$ e $\{x_n\}$ é seq. em S', então $x \in S'$, pois S' é fechado

Remark

O Teorema 3.1 *estabelece que o conjunto das funções contínuas e limitadas é completo*

Theorem (3.1)

Seja $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^l$ *e* $\mathbb{C}(\mathbb{X})$ *o conjunto das funções contínuas e limitadas em* $\mathbb{X}$, $f : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$, *com a norma do sup*, $||f|| = \sup_{x \in \mathbb{X}} |f(x)|$. *Então* $\mathbb{C}(\mathbb{X})$ *é um espaço vetorial normado completo.*

- O ponto central da demonstração é o fato de que convergência uniforme (na norma sup) preserva continuidade

Proof.

O exercício 3.4(e) mostrou que $\mathbb{C}(\mathbb{X})$ é um espaço vetorial normado quando $\mathbb{X} = [a, b]$. A extensão é direta para o caso geral de $\mathbb{X}$.
Resta mostrar que se $\{f_n\}$ é Cauchy, $f_n \in \mathbb{C}(\mathbb{X}), \forall n$, então $\exists f \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$ tal que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad ||f_n - f|| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_\varepsilon$$

Há três passos na demonstração:

(i) encontrar uma função f candidata

(ii) mostrar que $\{f_n\}$ converge para f

(iii) mostrar que $f \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$

Passo (i): tome $x \in \mathbb{X}$. Então,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{y \in \mathbb{X}} |f_n(y) - f_m(y)| = ||f_n - f_m||.$$

Como f_n é Cauchy, então $f_n(x)$ é Cauchy para cada $x \in \mathbb{X}$. Como $f_n(x) \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in \mathbb{X}$, então $\{f_n(x)\}$ é sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é completo, então $\exists f(x) \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Defina $f : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ como candidata ao limite.

Proof.

Passo (ii): Quer-se mostrar que $||f_n - f|| \to 0$ quando $n \to \infty$. Tome $\varepsilon > 0$ e escolha $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $||f_n - f_m|| < \varepsilon/2$ para todo $m, n \geq N_\varepsilon$ (isso é possível pois f_n é Cauchy). Agora, para $x \in \mathbb{X}$ fixo e $m \geq n \geq N_\varepsilon$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \leq ||f_n - f_m|| + |f_m(x) - f(x)| \\ &\leq \varepsilon/2 + |f_m(x) - f(x)| \end{aligned}$$

Como $f_m(x) \to f(x)$, pode-se escolher m separadamente para cada $x \in \mathbb{X}$ de tal forma que $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/2$. Logo,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \qquad \forall x \in \mathbb{X}, \forall n \geq N_\varepsilon$$

Segue que

$$||f_n - f|| = \sup_{x \in \mathbb{X}} \{|f_n(x) - f(x)|\} \leq \varepsilon, \qquad \forall n \geq N_\varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ foi arbitrário, tem-se $f_n \to f$.

Proof.

Passo (iii): Resta mostrar que f é contínua e limitada. Como $f_n \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\exists M_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$||f_n|| = \sup_{x\in\mathbb{X}} |f_n(x)| \leq M_n$$

Então,

$$\begin{aligned} ||f|| = \sup_{x\in\mathbb{X}} |f(x)| &= \sup_{x\in\mathbb{X}} |f_n(x) - f_n(x) + f(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{X}} |f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{X}} |f_n(x)| + \sup_{x\in\mathbb{X}} |f_n(x) - f(x)| \leq M_n + ||f_n - f|| \leq M_n + 1 < \infty \end{aligned}$$

em que a penúltima desigualdade vale $\forall n \geq N_1$, correspondente a $\varepsilon = 1$. Logo, f é limitada. □

Proof.

Passo (iii) (cont.): Para ver que f é contínua, é preciso mostrar que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x, y \in \mathbb{X}$ vale

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{se} \quad |x - y| < \delta.$$

Tome $\varepsilon > 0$. Como f_n é contínua, $\exists \delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq 2 \sup_{z \in \mathbb{X}} |f(z) - f_n(z)| + \varepsilon/2 \leq 2||f_n - f|| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Como $f_n \to f$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $||f_n - f|| < \varepsilon/4$. Logo,

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \qquad \forall n \geq N_\varepsilon.$$

Conclui-se que f é contínua. $\square$

Remark

O exercício 3.7 *(discutido em aula) ilustra casos de espaços que são completos e de outros que não o são.*

Exercise (3.7)

Lista de exercício.

The Contraction Mapping Theorem

O Teorema da Contração

Lembrando que

Definition

Seja (S, ρ) um espaço métrico e $T : S \mapsto S$ uma função mapeando S em si mesmo. T é uma **contração** (com módulo β) se para algum $\beta \in (0, 1)$ tem-se

$$\rho(Tx, Ty) \leq \beta\rho(x, y), \qquad \forall x, y \in S$$

Example

Seja $S = [a, b]$ com $\rho(x, y) = |x - y|$. T é uma contração se para algum $\beta \in (0, 1)$

$$\frac{|Tx - Ty|}{x - y} \leq \beta < 1, \qquad \forall x, y \in S \text{ com } x \neq y$$

O Teorema da Contração

Exercise

3.8: Se T é uma contração em S, então T é uniformemente contínua em S.

Proof.

A função $T : S \mapsto S$ é uniformemente contínua se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall x, y \in S$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |T(x) - T(y)| < \varepsilon.$$

- Como T é uma contração em S, então $\exists \beta \in (0, 1)$ tal que

$$\rho(Tx, Ty) \leq \beta \rho(x, y), \qquad \forall x, y \in S$$

Tome $\varepsilon > 0$ e defina $\delta = \varepsilon / \beta$. Se $\rho(x, y) < \delta$, então

$$\rho(Tx, Ty) \leq \beta \rho(x, y) < \beta \delta = \varepsilon, \qquad \forall x, y \in S.$$

□

O Teorema da Contração

Definition

Um **ponto fixo** de T é um $x \in S$ tal que $x = Tx$.

- ver gráfico apresentado em aula sobre o exemplo de contração

O Teorema da Contração

Theorem (Contraction Mapping Theorem)

Se (S,ρ) *é uma espaço métrico completo e* $T : S \mapsto S$ *é uma contração com módulo* β, *então*

(a) T *possui um, e somente um, ponto fixo* v *e* $v \in S$

(b) *para qualquer* $v_0 \in S$,

$$\rho(T^n v_0, v) \leq \beta^n \rho(v_0, v), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Proof.

Para o item (a),

- defina $\{T^n\}$ tal que $T^0x = x$ e $T^nx = T(T^{n-1}x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- tome $v_0 \in S$ e defina $\{v_n\}$ tal que $v_{n+1} = Tv_n$. (Note que $v_n = T^nv_0$)
- Como T é contração, então pode-se usar indução para provar que

$$\rho(v_{n+1}, v_n) \leq \beta^n \rho(v_1, v_0), \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

- Portanto, usando desigualdade triangular, tem-se para $m > n$

$$\begin{aligned} \rho(v_m, v_n) &\leq \sum_{i=0}^{m-n-1} \rho(v_{m-i}, v_{m-i-1}) \leq \rho(v_1, v_0) \sum_{i=1}^{m-n} \beta^{m-i} \\ &= \beta^n \rho(v_1, v_0) \sum_{i=1}^{m-n} \beta^{m-n-i} = \frac{\beta^n}{1-\beta}\rho(v_1, v_0) \end{aligned} \tag{2}$$

O Teorema da Contração

Proof.

- Logo, $\{v_n\}$ é Cauchy. De fato, ...
  - Dado $\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\beta^{N_\varepsilon}}{1-\beta}\rho(v_1, v_0) < \varepsilon$.
  - Logo, se $m, n > N_\varepsilon$, então

$$\rho(v_m, v_n) \leq \frac{\beta^n}{1-\beta}\rho(v_1, v_0) < \frac{\beta^{N_\varepsilon}}{1-\beta}\rho(v_1, v_0) < \varepsilon$$

- Como $\{v_n\}$ é Cauchy e S é completo, então $\exists v \in S$ tal que $v_n \to v$.
- Para ver que $v = Tv$, note que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall v_0 \in S$

$$\rho(Tv, v) \leq \rho(Tv, T^n v_0) + \rho(T^n v_0, v) \leq \beta\rho(v, T^{n-1} v_0) + \rho(T^n v_0, v)$$

  Como $\rho(v, v_{n-1}) \to 0$ e $\rho(v, v_n) \to 0$, então $\rho(Tv, v) = 0$. Ou seja, $v = Tv$.
- Para unicidade, suponha por absurdo que $\exists \hat{v} \neq v$ é tal que $T\hat{v} = \hat{v}$. Então,

$$0 < a \equiv \rho(\hat{v}, v) = \rho(T\hat{v}, Tv) \leq \beta\rho(\hat{v}, v) = \beta a \Rightarrow a \leq 0 \quad \text{(contradição)}$$

- o item (b) é provado por indução

O Teorema da Contração

Corollary (1)

Seja (S, ρ) um espaço métrico completo e $T : S \to S$ uma contração com ponto fixo $v \in S$.

- *Se S' é um subconjunto fechado de S e $T(S') \subseteq S'$, então $v \in S'$.*
- *Se, adicionalmente, $T(S') \subseteq S'' \subseteq S'$, então $v \in S''$.*

Proof.

- Tome $v_0 \in S'$ e note que $\{T^n v_0\}$ é uma sequência em S' tal que $v_n \to v$. Como S' é fechado, então $v \in S'$.
- Se $T(S') \subseteq S'' \subseteq S'$, então $Tv = v \in S''$.

$\square$

O Teorema da Contração

Exercise (3.9 - uma desigualdade computacionalmente útil.)

Seja (S, ρ), T, e v como dado acima, e β o módulo de T. Então, se $v_0 \in S$,

$$\rho(T^n v_0, v) \leq \frac{1}{1-\beta}\rho(T^n v_0, T^{n+1} v_0)$$

Proof.

Pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} \rho(T^n v_0, v) &\leq \rho(T^n v_0, T^{n+1} v_0) + \rho(T^{n+1} v_0, v) \\ &= \rho(T^n v_0, T^{n+1} v_0) + \rho(T^{n+1} v_0, Tv) \\ &\leq \rho(T^n v_0, T^{n+1} v_0) + \beta\rho(T^n v_0, v) \end{aligned}$$

Logo, $\rho(T^n v_0, v) \leq \frac{1}{1-\beta}\rho(T^n v_0, T^{n+1} v_0)$. □

O Teorema da Contração

Segue uma generalização útil para o Teorema da Contração:

Corollary (2) (N-stage contraction theorem)

Seja (S, ρ) um espaço métrico completo, $T : S \to S$ e suponha que para algum $N \in \mathbb{N}$, $T^N : S \mapsto S$ é uma contração com módulo β. Então,

(a) *T possui um, e somente um, ponto fixo v e $v \in S$*

(b) *para qualquer $v_0 \in S$,*

$$\rho(T^{kN} v_0, v) \leq \beta^k \rho(v_0, v), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

O Teorema da Contração

Proof.

Como T^N é contração, então T^N possui um, e somente um, ponto fixo $v \in S$. Observe que,

$$\rho(Tv, v) = \rho(T(T^N v), T^N v) = \rho(T^N(Tv), T^N v) \leq \beta\rho(Tv, v)$$

- Logo, $(1 - \beta)\rho(Tv, v) \leq 0$.
- Como $\beta \in (0, 1)$, tem-se $0 \leq \rho(Tv, v) \leq 0$ e, portanto, $\rho(Tv, v) = 0$
- Logo, $v = Tv$

Para unicidade, note que se $v = Tv$, então $T^N v = v$.

- se existisse $\hat{v} \in S$ tal que $T\hat{v} = \hat{v}$ e $\hat{v} \neq v$
- ocorreria $T^N v = v \neq \hat{v} = T^N\hat{v}$, contradição pois $\exists! v \in S$ tal que $T^N v = v$

$\square$

O Teorema da Contração

Remark (Lista de exercício)

O exercise 3.10 *mostra que o Teo. da contração pode ser usado para provar existência e unicidade de solução para uma equação diferencial.*

Theorem (3.3) (Blackwell's sufficient conditions for a contraction)

Seja $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^l$ *e* $B(\mathbb{X})$ *o conjunto das funções limitadas* $f : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$, *com a norma do sup. Seja* $T : B(\mathbb{X}) \mapsto B(\mathbb{X})$ *um operador que satisfaz*

(a) ***(monotonicidade)***
Se $f, g \in B(\mathbb{X})$, *então*

$$f(x) \leq g(x) \forall x \in \mathbb{X} \quad \Rightarrow \quad (Tf)(x) \leq (Tg)(x) \forall x \in \mathbb{X}$$

(b) ***(desconto)***
$\exists \beta \in (0,1)$ *tal que*

$$[T(f+a)](x) \leq (Tf)(x) + \beta a, \qquad \forall f \in B(\mathbb{X}), a \geq 0, x \in \mathbb{X}$$

em que $(f+a)(x) = f(x) + a$.

Então, T *é uma contração de módulo* β.

O Teorema da Contração

Proof.

- Tome $f, g \in B(\mathbb{X})$.
- Defina $f \leq g$ como $f(x) \leq g(x), \forall x \in \mathbb{X}$.
- Note que $g + ||f - g|| \in B(\mathbb{X})$ e que $f \leq g + ||f - g||$.
- Usando monotonicidade e desconto, tem-se

$$Tf \leq T(g + ||f - g||) \leq Tg + \beta||f - g||$$

- Analogamente, $f + ||f - g|| \in B(\mathbb{X})$ e que $g \leq f + ||f - g||$.
- Usando monotonicidade e desconto, tem-se

$$Tg \leq T(f + ||f - g||) \leq Tf + \beta||f - g||$$

- Logo, $-\beta||f - g|| \leq Tf(x) - Tg(x) \leq \beta||f - g||, \forall x \in \mathbb{X}$

Ou seja, $||Tf - Tg|| = \sup_{x \in \mathbb{X}} |Tf(x) - Tg(x)| \leq \beta||f - g||$. □

Aplicando o Teo. de Blackwell ao modelo clássico:

$$(Tv)(k) = \max_{0 \leq y \leq f(k)} \{U[f(k) - y] + \beta v(y)\}$$

- (monotonicidade) se $w(y) \geq v(y)$ para todo $y \in \mathbb{X} = \mathbb{R}_+$, então

$$\begin{aligned} (Tw)(k) &= \max_{0 \leq y \leq f(k)} \{U[f(k) - y] + \beta w(y)\} \\ &\geq \max_{0 \leq y \leq f(k)} \{U[f(k) - y] + \beta v(y)\} = (Tv)(k), \qquad \forall k \geq 0 \end{aligned}$$

- (desconto) se $v \in B(\mathbb{X})$ e $a \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} (T(v + a))(k) &= \max_{0 \leq y \leq f(k)} \{U[f(k) - y] + \beta[v(y) + a]\} \\ &= \max_{0 \leq y \leq f(k)} \{U[f(k) - y] + \beta v(y)\} + \beta a \\ &= (Tv)(k) + \beta a, \qquad \forall k \geq 0 \end{aligned}$$

The Theorem of the Maximum

O Teorema do Máximo

Considere o operador $T : \mathbb{C}(\mathbb{X}) \mapsto \mathbb{C}(\mathbb{X})$ no caso geral

$$(Tv)(x) = \sup_y \{F(x,y) + \beta v(y)\}$$
$$s.t. \; y \text{ factível dado } x$$

em que $\mathbb{C}(\mathbb{X})$ denota o espaço das funções contínuas e limitadas em $\mathbb{X}$

Definition

Uma **correspondência** de um conjunto $\mathbb{X}$ em um conjunto $\mathbb{Y}$ é uma relação que associa a cada $x \in \mathbb{X}$ um conjunto $\Gamma(x) \subseteq \mathbb{Y}$.

- nos casos de nosso interesse, $\mathbb{Y} = \mathbb{X}$
- $\Gamma(x)$ é usado para definir factibilidade de y

O Teorema do Máximo

O que o Teorema do Máximo pode ensinar?

Question

Quais hipóteses sobre $\Gamma : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ *e* F *garantem que se* $v \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$ *e*

$$(Tv)(x) = \sup_{y \in \Gamma(x)} \{F(x,y) + \beta v(y)\},$$

então $Tv \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$*?*

Question

Quais as propriedades de $G(x)$*, o conjunto de maximizadores* y *para um dado* x

O Teorema do Máximo

Sejam

- $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^l$, $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{R}^m$,
- $f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{R}$ uma função (*single-valued*)
- $\Gamma : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ uma correspondência (*multivalued*)

$$h(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} f(x, y) \tag{1}$$

$$G(x) = \{y \in \Gamma(x) : f(x, y) = h(x)\} \tag{2}$$

Remark

Se

- $f(x, \cdot)$ *é contínua e*
- $\Gamma(x)$ *é não vazia e compact valued (possui somente imagens compactas),*

então h é bem definida e $G(x) \neq \emptyset$.

Precisamos definir continuidade de correspondências:

Definition

Uma correspondência $\Gamma : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ é **contínua** em x se ela é uhc e lhc em x.

Definition (lhc)

Uma correspondência $\Gamma : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ é **semi-contínua inferiormente** (*lower hemi-continuous/lhc*) em x se

- $\Gamma(x) \neq \emptyset$
- $\forall y \in \Gamma(x)$ e toda sequência $\{x_n\}$ convergente para x, existe
  - $N \geq 1$ e uma sequência $\{y_n\}_{n=N}^{\infty}$ tal que

$$y_n \to y \quad \text{e} \quad y_n \in \Gamma(x_n), \forall n \geq N$$

Definition (uhc)

Uma correspondência compact-valued $\Gamma : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ é **semi-contínua superiormente** (*upper hemi-continuous/uhc*) em x se

- para toda sequência $\{x_n\}$ convergente para x
- e toda sequência $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $y_n \in \Gamma(x_n), \forall n,$

existe

- uma subsequência convergente de $\{y_n\}$ cujo limite y é elemento de $\Gamma(x)$

Remark

Ver gráfico apresentado em aula.

(a) Γ *é lhc em* x_1*, mas não é uhc* x_1

(b) Γ *é uhc em* x_2*, mas não é lhc* x_2

(c) Γ *é lhc e uhc nos demais pontos*

Proof.

Item (a):

Γ é lhc em x_1.

De fato, tome $y \in \Gamma(x_1)$ e uma sequência $\{x_n\}$ tal que $x_n \to x_1$.

- Note que $\Gamma(x_1) = (y_{11}, y_{12}) \neq \emptyset$
- Como $x_n \to x_1$, então dado $\varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $B_\varepsilon(x_1) < \varepsilon$
- Da figura, se ε é pequeno, então $y_0 \in \Gamma(x_n) \neq \emptyset, \forall n \geq N_\varepsilon$.

Seja $\{y_n\}_{n=N_\varepsilon}^{\infty}$ a sequência tal que $y_n = y_0, \forall n \geq N_\varepsilon$

- Logo, por construção, $y_n \to y_0$.

Γ não é uhc em x_1.

De fato, tome $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tais que $x_n \to x_1$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n < x_1$ e $y_n = y_1 \in \Gamma(x_n)$.

- Como $y_n \to y_1$, então toda subseq. de $\{y_n\}$ converge para $y_1 \notin \Gamma(x_1)$

□

Proof.

Item (b):

Γ é uhc em x_2.

De fato, tome $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tais que $x_n \to x_2$ e $y_n \in \Gamma(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$.

- Como $\Gamma(x_n) \subseteq [0, y_{u2}], \forall n \in \mathbb{N}$, então y_n é limitada
- $\{y_n\}$ limitada $\Rightarrow$ $\{y_n\}$ possui subseq. $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente para y
- Como $\{y_{n_k}\}$ está em $\Gamma(x_2) = [y_{l2}, y_{u2}]$, um fechado, então $y \in \Gamma(x_2)$

Γ não é lhc em x_2.

De fato, considere $\{x_n\}$ tal que $x_n \to x_2$ $y = y_{l2} \in \Gamma(x_2)$.

- Note que $\Gamma(x_2) = [y_{l2}, y_{u2}] \neq \emptyset$
- Como $x_n \to x_2$, então dado $\varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $B_\varepsilon(x_2) < \varepsilon$
- Da figura, para ε pequeno e $n \geq N_\varepsilon$ tem-se $y_n \in \Gamma(x_n) \Rightarrow y_n \in [\hat{y}_{l2}, y_{u2}]$.

Logo, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\{y_n\}_{n=N}^{\infty}$ se convergente para y, valerá $y \geq \hat{y}_{l2} > y_{l2}$ □

Proof.

Item (c):

Γ é uhc em x_3.

De fato, tome $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tais que $x_n \to x_3$ e $y_n \in \Gamma(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$.

- Como $\Gamma(x_n) \subseteq [0, y_{u2}], \forall n \in \mathbb{N}$, então y_n é limitada
- $\{y_n\}$ limitada $\Rightarrow$ $\{y_n\}$ possui subseq. $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente para y
- Da figura, necessariamente $y \in \Gamma(x_3)$

Γ é lhc em x_3.

De fato, tome $y_4 \in \Gamma(x_3)$ e uma sequência $\{x_n\}$ tal que $x_n \to x_3$.

- Note que $\Gamma(x_3) = [y_{31}, y_{32}] \neq \emptyset$
- Como $x_n \to x_3$, então dado $\varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $B_\varepsilon(x_3) < \varepsilon$
- se $y_4 \in (y_{31}, y_{32})$, então $y_4 \in \Gamma(x_n), \forall n \geq N_\varepsilon$ se ε é pequeno. Defina $\{y_n\}_{n=N_\varepsilon}^{\infty}$ tal que $y_n = y_4, \forall n \geq N_\varepsilon$
- se $y_4 = y_{31}$, então defina $\{y_n\}$ tal que $y_n = \min \Gamma(x_n)$
- se $y_4 = y_{32}$, então defina $\{y_n\}$ tal que $y_n = \max \Gamma(x_n)$

Em todos os casos, $y_n \to y_4$. □

Exercise (3.11(a))

Mostre que se Γ é *single-value* ($\Gamma(x)$ possui somente 1 elemento para cada $x \in \mathbb{X}$) e uhc, então ela é contínua.

Proof.

Seja $x \in \mathbb{X}$. Da definição de continuidade em x, basta mostrar que Γ é lhc em x. Note que $\Gamma(x) \neq \emptyset$, por hipótese. Tome y o único elemento de $\Gamma(x)$.
Suponha, por absurdo, que Γ não é lhc em x. Ou seja, que $\exists y \in \Gamma(x)$ e $\exists \{x_n\}$ com $x_n \to x$ tais que $\forall N \in \mathbb{N}$ e $\forall \{y_n\}_{n=N}^{\infty}$ com $y_n \in \Gamma(x_n)$, tem-se $y_n \nrightarrow y$.
Como $\Gamma(x_n)$ é unitário para cada $n \in \mathbb{N}$, $\exists! \{y_n\}$ com $y_n \in \Gamma(x_n)$. Como $y_n \nrightarrow y$, $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N$ tal que $|y_n - y| > \varepsilon$.
Seja $\{y_{n_k}\}$ a subseq. de $\{y_n\}$ tal que $|y_{n_k} - y| > \varepsilon, \forall n_k > k$. Seja $\{x_{n_k}\}$ tal que $y_{n_k} \in \Gamma(x_{n_k})$. Como $x_n \to x$, então $x_{n_k} \to x$.
Mas Γ é uhc e, portanto, $\{y_{n_k}\}$ possui subseq. convergente para $y \in \Gamma(x)$, uma contradição. □

Remark

O exercise 3.13*, itens* (*a*) *e* (*b*) *mostram que as seguintes correspondências são contínuas:*

- $\Gamma : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ *tal que* $\Gamma(x) = [0, x]$
- $\Gamma : \mathbb{R}^l_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ *tal que* $\Gamma(x) = [0, f(x)]$,
  em que $f : \mathbb{R}^l_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ *é contínua.*

O Teorema do Máximo

Theorem (3.6) (Theorem of the Maximum)

Defina $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^l$ *e* $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{R}^m$*. Seja*

- $f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{R}$ *uma função contínua e*
- $\Gamma : \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ *uma correspondência contínua e compact-valued.*

Então,

(i) *a função* $h : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$ *definida em* (1) *é contínua*

(ii) *a correspondência* $G : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *definida em* (2) *é*

  - *não vazia*
  - *compact-valued*
  - *uhc*

Remark (Lista de Exercício)

O exercício 3.16 *ilustra por meio de exemplos o que este teorema diz e o que ele não diz.*