Teoria Macroeconômica II - Semestre II de 2016
Lista de exercćios 03 - Indução Retroativa II

Professores: Jefferson Bertolai and **Fábio Gomes**

Exercício 1 (A Camping Trip Economy)**.** Considere um grupo de N pessoas em sua última noite de acampamento. Cada membro do grupo possui e unidades de comida[1] e o grupo planeja 2 refeições antes de voltar para casa na manhã do dia seguinte:

- (i) um lanche na madrugada e (ii) um café da manhã.

Denote x o bem no primeiro período (comida consumida na madrugada) e y o bem no segundo período (comida consumida na manhã). Existe um depósito (máquina de lanches) no qual a comida pode ser armazenada à noite (e somente à noite).

- Cada unidade de comida no depósito se transforma em $R > 1$ unidades do bem y (se armazenada até de manhã) e 1 unidade do bem x (se retirada do depósito na madrugada).[2]

Cada pessoa sabe que acordará em algum momento da madrugada. Mas não tem certeza se quando acordar estará com muita ou com pouca fome. Sabe, no entanto, que terá muita fome com probabilidade $p \in [0, 1]$ e terá pouca fome com probabilidade $(1 - p)$. A utilidade de cada pessoa será

$$\begin{cases} v(x) & \text{se ela acorda com muita fome} \\ v(x+y) & \text{se ela acorda com pouca fome} \end{cases}$$

em que $v(c) = \frac{1}{1-\delta}c^{1-\delta}$, para $\delta > 1$. Dessa forma, pode-se definir o tipo do indivíduo i por $\theta_i \in \{0, 1\}$, de forma que a utilidade de pessoa i é

$$u_i(x, y, \theta_i) = v(x + \theta_i y).$$

A probabilidade de 2 indivíduos acordarem no mesmo momento é nula. Logo, a sequência em que vão acordar formará uma fila de pessoas (de tamanho N) para acessar o depósito. Chamaremos de i o indivíduo que acordar na i-ésima posição da referida fila, x_i o consumo de i na madrugada e y_i o consumo de i pela manhã. A probabilidade de acordar na n-ésima posição da fila é $1/N$ para todo $n \in \{1, \ldots, N\}$. Portanto, se $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_N)$ denota o vetor de tipos e $\Theta = \{0, 1\}^N$ é o espaço de tipos, então a utilidade esperada *ex ante* do indivíduo é

$$U(\bar{x}, \bar{y}) := \sum_{\theta \in \Theta} \Pr(\theta) \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} v(x_n(\theta) + \theta_n y_n(\theta)) \right)$$

[1] Suponha que existe somente um tipo de comida e que ela seja perfeitamente divisível.

[2] Cada unidade de comida retirada do depósito de madrugada, bem x, se transforma em 1 unidade de comida de manhã, bem y.

em que $\Pr(\theta) = p^{N-|\theta|}(1-p)^{|\theta|}$, para $|\theta| = \sum_i \theta_i$, e

$$\bar{x} : \Theta \mapsto \mathbb{R}^N, \text{ com } \bar{x}(\theta) = (x_1(\theta), \cdots, x_N(\theta)),$$
$$\bar{y} : \Theta \mapsto \mathbb{R}^N, \text{ com } \bar{y}(\theta) = (y_1(\theta), \cdots, y_N(\theta)).$$

O indivíduo i pode usar a tecnologia de armazenagem (depósito) de forma autárquica:

- guarda sua dotação e com seu nome anotado,
- terá à disposição e unidades de bens na madrugada e Re unidades de bens pela manhã.
- se retirar $x_i \leq e$ unidades do depósito na madrugada, terá somente $R(e - x_i)$ unidades pela manhã.

É possível mostrar que,

- em autarquia (uso do depósito de forma autárquica), o indivíduo i escolhe sacar nada na madrugada ($x_i = 0$) se acordar com pouca fome e sacar toda sua dotação na madrugada ($x_i = e$) se acordar com muita fome. Dessa forma, sua utilidade esperada *ex ante* será

$$U_a(p, \delta, e, R) := pv(e) + (1-p)v(Re)$$

Os indivíduos podem usar a tecnologia de armazenagem (depósito) de forma conjunta:

- guardam a dotação agregada Ne sem nome anotado,
- terão à disposição Ne unidades de bens na madrugada e RNe unidades de bens pela manhã.
- se retirar $\sum_i x_i \leq Ne$ unidades do depósito na madrugada, terão somente $R(Ne - \sum_i x_i)$ unidades pela manhã.

Neste caso, os indivíduos precisam escolher como a comida será dividida, ou seja, precisam escolher uma Função de Escolha Social $f(\cdot) = (\bar{x}(\cdot), \bar{y}(\cdot))$ tal que $f : \Theta \mapsto \mathbb{X}$.

- Como os indivíduos são *ex ante* idênticos, a FES $f(\cdot)$ será escolhida para maximizar seu bem estar *ex ante* dos indivíduos, $U(\bar{x}, \bar{y})$.
- Para factibilidade, a FES $f(\cdot) = (\bar{x}(\cdot), \bar{y}(\cdot))$ precisa satisfazer para todo $\theta \in \Theta$

$$(x_i(\theta), y_i(\theta)) \geq 0, \ \forall i, \quad \sum_i x_i(\theta) \leq Ne \text{ e } \sum_i y_i(\theta) \leq R(Ne - \sum_i x_i(\theta)). \tag{FE}$$

- Adicionalmente, denotando a história de tipos até a i-ésima posição por $\theta^i = (\theta_1, \cdots, \theta_i)$, factibilidade requer que a FES $f(\cdot)$ respeite a ***restrição de serviço sequencial***:

$$x_i(\theta^i, \theta'_{i+1}, \cdots, \theta'_N) = x_i(\theta^i, \theta''_{i+1}, \cdots, \theta''_N) =: \mathrm{x}_i(\theta^i) \tag{SS}$$

para todo par $(\theta'_{i+1}, \cdots, \theta'_N)$ e $(\theta''_{i+1}, \cdots, \theta''_N)$. Ou seja, o pagamento na i-ésima posição não pode depender do tipo do indivíduo na posição $n > i$.

- O uso conjunto da tecnologia de armazenagem, representado por $f(\cdot) = (\bar{x}(\cdot), \bar{y}(\cdot))$, é individualmente racional *ex ante* (satisfaz restrição de participação *ex ante*) se

$$U(\bar{x}, \bar{y}) \geq U_a(p, \delta, e, R) \tag{IR}$$

Portanto, o problema do grupo é resolver

$$V(N, p, \delta, e, R) := \max_{f(\cdot)=(\bar{x}(\cdot), \bar{y}(\cdot))} U(\bar{x}, \bar{y}) \qquad \text{s.t. (FE), (SS) e (IR)} \tag{PP$_0$}$$

É possível mostrar que:

- $(\bar{x}, \bar{y})$ maximiza $U(\bar{x}, \bar{y})$ sujeito à (FE) e (SS) somente se para todo i e todo $\theta \in \Theta$

$$\mathtt{x}_i(\theta^{i-1}, 1) = 0, \quad y_i(0, \theta_{-i}) = 0, \quad \mathtt{x}_i(\theta^{i-1}, 0) > 0 \quad \text{e} \quad y_i(1, \theta_{-i}) = \mathtt{y}(1, \theta_{-i}) > 0.$$

  Ou seja, indivíduos com pouca fome (tipo 1) não consomem na madrugada, indivíduos com muita fome (tipo 0) não consomem pela manhã. Todos aqueles com tipo 1 consomem a mesma quantidade pela manhã e todos consomem algo em algum período.

  - note que $y_i(\theta) \geq 0$ e $\sum_i y_i(\theta) \leq R(Ne - \sum_i x_i(\theta)) \Rightarrow \sum_i x_i(\theta) \leq Ne$

- se $(\bar{x}, \bar{y})$ maximiza $U(\bar{x}, \bar{y})$ sujeito à (FE) e (SS), então $(\bar{x}, \bar{y})$ satisfaz (IR).

Logo, o problema (PP$_0$) é equivalente a

$$\begin{aligned} V(N, p, \delta, e, R) := \max_{(\mathtt{x}(\cdot), \mathtt{y}(\cdot))} \sum_{\theta \in \Theta} \Pr(\theta) \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} v(\mathtt{x}_n(\theta^i) + \theta_n \mathtt{y}(\theta)) \right) \\ \text{s.t.} \sum_i \mathtt{x}_i(\theta^i) + R^{-1} \sum_i \mathtt{y}(\theta) \leq Ne. \end{aligned} \tag{PP$_1$}$$

Usando concavidade estrita e monotonicidade estrita, é possível demonstrar que o pagamento ótimo pela manhã $\mathtt{y}(\theta)$, para cada $\theta \in \Theta$ e cada $\mathtt{x} = (\mathtt{x}_1(\theta^1), \cdots, \mathtt{x}_N(\theta^N))$ tal que $\sum_i \mathtt{x}_i(\theta) \leq Ne$, é dado por

$$\mathtt{y}(\theta) = \begin{cases} \frac{R}{|\theta|} \left(Ne - \sum_i \mathtt{x}_i(\theta) \right) & \text{se } \theta \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{se } \theta = \mathbf{0} \end{cases} \tag{y^*}$$

Logo, $(\mathtt{x}^*, y^*)$ resolve (PP$_1$) se $\mathtt{y}^*$ satisfaz (y^*) e $\mathtt{x}$ resolve

$$V(N,p,\delta,e,R) := \max_{\mathtt{x}(\cdot)} \left\{ \Pr(\mathbf{0}) \sum_{n=1}^{N} v[\mathtt{x}_n(\mathbf{0}^i)] \right. \\ \left. + \sum_{\theta\in\Theta\setminus\{\mathbf{0}\}} \Pr(\theta) \left(\sum_{n=1}^{N} v[\mathtt{x}_n(\theta^i)] + |\theta|^\delta R^{1-\delta} v\left(Ne - \sum_i \mathtt{x}_i(\theta) \right) \right) \right\} \tag{PP$_3$}$$

Pode-se demonstrar que se $V_N(m,z) = \lim_{s\to z} m^\delta R^{1-\delta} v\,(z)$ e para todo $n < N$

$$V_n(m,z) = \max_{0\le c\le z} \left\{ p\Big[v(c) + V_{n+1}(m, z-c) \Big] + (1-p)\Big[V_{n+1}(m+1, z) \Big] \right\}, \tag{IndRet}$$

então $V_0(0, Ne) = V(N,p,\delta,e,R)$ e $c^*(m,z)$ que resolve o rhs de (IndRet) para cada (m,z) é tal que

$$c^*\left(|\theta^{i-1}|, Ne - \sum_{n<i} \mathtt{x}_n(\theta^n) \right) = \mathtt{x}_i^*\left(\theta^{i-1}, 0\right)$$

(a) Usando Indução Retroativa e Método de Discretização, calcule a função valor $V_n(m,z)$ e a função política $c^*(m,z)$ que resolvem (IndRet).

- note que $V_N(m,z)$ possui fórmula fechada.
- utilize parêmetros $(p,N,\delta,e,R) = (1/2, 2, 2, 1, 1.05)$.

(b) Seja $A = \{.02, .04, \cdots, .96, .98\}$. Refaça o item **(a)**, mas agora para $(N,\delta,e,R) = (2,2,1,1.05)$ e $p \in A$.

- Apresente em um gráfico as funções $V(N,\cdot,\delta,e)$ e $U_a(p,\delta,e,\cdot)$ entre .02 e .98.
- Quando a condição (IR) é satisfeita e quando ela é violada?

(c) Seja $A = \{2, 3, \cdots, 9, 10\}$. Refaça o item **(a)**, mas agora para $(p,\delta,e,R) = (1/2, 2, 1, 1.05)$ e $N \in A$.

- Apresente em um gráfico as funções$V(\cdot,p,\delta,e)$ e $U_a(p,\delta,e,\cdot)$ entre 2 e 10.
- Quando a condição (IR) é satisfeita e quando ela é violada?

(d) Seja $A = \{2, 2.5, \cdots, 4.5, 5.0\}$. Refaça o item **(a)**, mas agora para $(N,p,e,R) = (2, 1/2, 1, 1.05)$ e $\delta \in A$.

- Apresente em um gráfico as funções $V(N,\cdot,p,e)$ e $U_a(p,\delta,e,\cdot)$ entre 2 e 5.
- Quando a condição (IR) é satisfeita e quando ela é violada?

(e) Seja $A = \{1, 3, \cdots, 9, 20\}$. Refaça o item **(a)**, mas agora para $(N,p,\delta,R) = (2, 1/2, 2, 1.05)$ e $e \in A$.

- Apresente em um gráfico as funções $V(N,p,\delta,\cdot)$ e $U_a(p,\delta,e,\cdot)$ entre 1 e 20.
- Quando a condição (IR) é satisfeita e quando ela é violada?

(e) Seja $A = \{1.0, 1.01, \cdots, 1.19, 1.20\}$. Refaça o item **(a)**, mas agora para $(N, p, \delta, e) = (2, 1/2, 2, 1)$ e $R \in A$.

- Apresente em um gráfico as funções $V(N, p, \delta, e, \cdot)$ e $U_a(p, \delta, e, \cdot)$ entre 1.0 e 1.2.
- Quando a condição (IR) é satisfeita e quando ela é violada?

(f) Os membros do grupo de *camping* utilizarão a tecnologia de armazenagem em autarquia ou em conjunto? Explique.

(g) Seja $N^* \in \{1, 2, \cdots, N\}$ o tamanho ótimo do grupo que usa a estocagem em conjunto.

- se o uso em autarquia é ótimo, então $N^* = 1$
- se o uso em conjunto com todos os agentes é ótimo, então $N^* = N$

Qual é o valor de N^*?