Definitions, some results, and some exercises

Dynamic Programming under Certainty - Stokey_Lucas (1989): cap. 4

Jefferson Bertolai

August - 2015

- Em termos de sequências infinitas, o problema de interesse é da forma

$$\sup_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \tag{SP}$$

$$s.t. \begin{cases} x_{t+1} \in \Gamma(x_t), \quad t = 0, 1, \ldots \\ x_0 \ dado \end{cases}$$

- A equação funcional associada é

$$v(x) = \sup_{y \in \Gamma(x)} \left(F(x, y) + \beta v(y) \right), \quad \forall x \in \mathbb{X} \tag{FE}$$

Nossa tarefa

- estabeleceremos a relação entre as soluções dos 2 problemas
- desenvolveremos métodos para analisar a solução de (FE)

O modelo de crescimento ótimo

Remark

O exercício 4.1 (discutido em aula) mostra que o problema do planejador no modelo de crescimento ótimo determinístico pode ser escrito no formato (SP).

O modelo de crescimento ótimo

Proof.

O item **4.1(*b*)** fica como exercício. Para o item **4.1(*a*)**, lembre-se que o problema era

$$\max_{\{(c_t,k_{t+1})\}_{t=0}^{\infty}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) : \; c_t + k_{t+1} \leq f(k_t), c_t, k_{t+1} \geq 0, \forall t, k_0 \; dado \right\}$$

Como $U'(c) > 0, \forall c$, então factibilidade é ativa no ótimo. Logo, $c_t = f(k_t) - k_{t+1}$. Portanto,

$$\max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(f(k_t) - k_{t+1}) : \; 0 \leq k_{t+1} \leq f(k_t), \forall t, k_0 \; dado \right\}$$

Defina $x_t = k_t$, $\Gamma(x_t) = [0, f(x_t)]$, $\mathbb{X} = \mathbb{R}_+$ e

$$F(x_t, x_{t+1}) = U(f(x_t) - x_{t+1})$$

O que diz o Princípio da Otimalidade?

Remark

- *A solução v para (FE), avaliada em x_0, se iguala ao supremo em (SP) quando o estado inicial é x_0*
- *Adicionalmente, a sequência $\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ atinge o supremo em (SP) sse ela satisfaz*

$$v(x_t) = F(x_t, x_{t+1}) + \beta v(x_{t+1}), \qquad t = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

Vejamos alguma notação

- $\mathbb{X}$: conjunto de possíveis valores para a variável da estado x
  - pode ser qualquer conjunto ($\mathbb{R}^l_+$, conj. de funções, conj. de medidas)
- $\Gamma : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$: correspondência que descreve factibilidade
  - para cada $x \in \mathbb{X}$, $\Gamma(x)$ é o conjunto de possíveis valores da variável de estado no próximo período
- A: gráfico de Γ

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X} : y \in \Gamma(x)\}$$

- $F : A \mapsto \mathbb{R}$: função retorno
- $\beta > 0$: fator de desconto

Remark

Os parâmetros/dados/primitivos são: $\mathbb{X}, \Gamma, F, \beta$

- $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ em $\mathbb{X}$ é chamado um plano
- o conj. de planos factíveis a partir de x_0 é

$$\Pi(x_0) = \{\{x_t\}_{t=0}^{\infty} : x_{t+1} \in \Gamma(x_t),\ t = 0, 1, \ldots\}$$

- $\underline{x} = (x_0, x_1, x_2, \cdots)$ o elemento típico de $\Pi(x_0)$

Hipótese (4.1)

$\Gamma(x)$ é não vazio para cada $x \in \mathbb{X}$.

Hipótese (4.2)

Para todo $x_0 \in \mathbb{X}$ e todo $\underline{x} \in \Pi(x_0)$, o limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$$

existe (embora possa ser $+\infty$ ou $-\infty$)

- $H.4.2$ é satisfeita quando F é limitada e $\beta \in (0,1)$.
  - há outras condições suficientes!

Proof.

Se $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $a_k \geq 0, \forall k$, então

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \text{ converge } \Leftrightarrow \text{ a sequência } \{s_n\} \text{ é limitada}$$

- Note que $\{s_n\}$ é monótona crescente ($s_{n+1} \geq s_n$), pois $a_k \geq 0$.
- como $s_n \geq 0$, então (s_n) será limitada se $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $s_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$
- Pelo Teo. Convergência Monótona [Teo. 3.6.7 de Madureira (2013)]

$$(s_n) \text{ converge sse } (s_n) \text{ é limitada}$$

Tome $a_{t+1} = \beta^t F(x_t, x_{t+1})$ e note que $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $|a_t| \leq \beta^t M$.

- $F(\cdot)$ limitada $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ tal que $|F(x,y)| \leq M$ para todo $x, y \in \mathbb{X}$
- $|a_{t+1}| = |\beta^t F(x_t, x_{t+1})| = \beta^t |F(x_t, x_{t+1})| \leq \beta^t M$
- Logo, $|s_n| = \left|\sum_{t=1}^{n} a_t\right| \leq M |\sum_{t=0}^{n-1} \beta^t| \leq M |\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t| = \frac{M}{1-\beta}$

$\square$

Para cada $n = 0, 1, \cdots$, defina $u_n : \Pi(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ como

$$u_n(\underline{x}) = \sum_{t=0}^{n} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$$

sob $H.4.2$, pode-se definir $u : \Pi(x_0) \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ por

$$u(\underline{x}) = \lim_{n\to\infty} u_n(\underline{x})$$

- $u_n(\underline{x})$:
  soma parcial (entre $t = 0$ e $t = n$) dos retornos (descontados) proporcionados pelo plano factível $\underline{x}$
- $u(\underline{x})$:
  soma infinita dos retornos (descontados) proporcionados pelo plano factível $\underline{x}$

Remark

Se valem H.4.1 e H.4.2, então

- $\Pi(x_0) \neq \emptyset, \forall x_0 \in \mathbb{X}$
- *a função objetivo em* (SP) *é bem definida para cada plano* $\underline{x} \in \Pi(x_0)$

Defina a função supremo $v^* : \mathbb{X} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ por

$$v^*(x_0) = \sup \{u(\underline{x}) : \underline{x} \in \Pi(x_0)\}$$

- note que $v^*(x_0)$ é o supremo em (SP)

Da definição de supremo, v^* é a única função tal que

(a) se $|v^*(x_0)| < \infty$, então

$$v(x_0) \geq u(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in \Pi(x_0) \tag{2}$$

e para todo $\varepsilon > 0$,

$$v^*(x_0) \leq u(\underline{x}) + \varepsilon, \quad \text{para algum } \underline{x} \in \Pi(x_0) \tag{3}$$

(b) se $v^*(x_0) = +\infty$, então $\exists\{\underline{x}^k\}$ em $\Pi(x_0)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} u(\underline{x}^k) = +\infty$$

(c) se $v^*(x_0) = -\infty$, então $u(\underline{x}) = -\infty$ for all $\underline{x} \in \Pi(x_0)$

Note que v^* satisfaz (FE) se, e somente se,

(a) se $|v^*(x_0)| < \infty$, então

$$v(x_0) \geq F(x_0, y) + \beta v^*(y), \quad \forall y \in \Gamma(x_0) \tag{4}$$

e para todo $\varepsilon > 0$,

$$v^*(x_0) \leq F(x_0, y) + \beta v^*(y) + \varepsilon, \quad \text{para algum } y \in \Gamma(x_0) \tag{5}$$

(b) se $v^*(x_0) = +\infty$, então $\exists \{y^k\}$ em $\Gamma(x_0)$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} F(x_0, y^k) + \beta v^*(y^k) = +\infty \tag{6}$$

(c) se $v^*(x_0) = -\infty$, então

$$F(x_0, y) + \beta v^*(y) = -\infty, \quad \forall y \in \Gamma(x_0) \tag{7}$$

Lemma (4.1)

Seja $\mathbb{X}, \Gamma, F$ *e* β *tais que satisfaçam H.4.2. Então, para todo* $x_0 \in \mathbb{X}$ *e todo* $(x_0, x_1, \dots) = \underline{x} \in \Pi(x_0)$, *tem-se*

$$u(\underline{x}) = F(x_0, x_1) + \beta u(\underline{x}'),$$

em que $\underline{x}' = (x_1, x_2, \cdots)$.

Proof.

Sob $H.4.2$, tem-se que

$$u(\underline{x}) = \lim_{n\to\infty} u_n(\underline{x}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$$

é bem definida para cada $x_0 \in \mathbb{X}$ e cada $\underline{x} \in \Pi(x_0)$. Tome $x_0 \in \mathbb{X}$ e $\underline{x} \in \Pi(x_0)$. Então

$$\begin{aligned} u(\underline{x}) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) = F(x_0, x_1) + \beta \lim_{n\to\infty} \sum_{t=1}^{n} \beta^{t-1} F(x_t, x_{t+1}) \\ &= F(x_0, x_1) + \beta \lim_{n\to\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \beta^s F(x_{s+1}, x_{s+2}) \\ &= F(x_0, x_1) + \beta \lim_{n\to\infty} u_{n-1}(\underline{x}') = F(x_0, x_1) + \beta u(\underline{x}'). \end{aligned}$$

Theorem (4.2)

Seja $\mathbb{X}$, Γ, F e β tais que H.4.1 e H.4.2 sejam válidas. Então a função v^* satisfaz (FE).

Proof.

Se $\beta = 0$, então o resultado é trivial, pois

$$v^*(x_0) = \sup\left\{F(x_0, x_1) : \ x_1 \in \Gamma(x_0), x_0 \ dado\right\} \tag{SP}$$

$$v(x) = \sup\left\{F(x, y) + \beta v(y), \ y \in \Gamma(x)\right\}, \qquad \forall x \tag{FE}$$

se $x = x_0$ em (FE), tem-se $v(x_0) = v^*(x_0)$. Suponha $\beta > 0$ e escolha $x_0 \in \mathbb{X}$.

Proof.

Caso $|v^*(x_0)| < \infty$: Como v^* é o supremo em (SP), então (2) e (3) são válidos. Neste caso, basta mostrar que (4) e (5) são satisfeitas.

Para (4), tome $\varepsilon > 0$ e $x_1 \in \Gamma(x_0) \neq \emptyset$.

- se $v^*(x_1) = \infty$, então $v^*(x_0) = \infty$ [contradição]
  - $v^*(x_1) = \infty \Rightarrow \exists\{\underline{x}^k\}$ em $\Pi(x_1)$ tal que $\lim_{k\to\infty} u(\underline{x}^k) = +\infty$
  - $|v^*(x_0)| < \infty \Rightarrow v^*(x_0) \geq u(\underline{x}) = F(x_0, x_1) + \beta u(\underline{x}'), \forall \underline{x}' = (x_1, \ldots) \in \Pi(x_1)$
  - se k é grande, então $F(x_0, x_1) + \beta u((\underline{x}^k)') > v^*(x_0)$
- se $v^*(x_1) = -\infty$, então (4) se verifica, pois $\forall \underline{x} \in \Pi(x_0), u(\underline{x}') = -\infty$
  - logo, $v^*(x_0) \geq u(\underline{x}) = F(x_0, x_1) + \beta u(\underline{x}') \geq F(x_0, x_1) + \beta v^*(x_1)$,

cont.

Caso $|v^*(x_0)| < \infty$ (cont.):

- se $|v^*(x_1)| < \infty$, segue de (3) que $\exists \underline{x}' = (x_1, x_2, \cdots) \in \Pi(x_1)$ tal que $u(\underline{x}') \geq v^*(x_1) - \varepsilon$.
  - Note que $\underline{x} = (x_0, x_1, x_2, \cdots) \in \Pi(x_0)$, pois

    se $\underline{x}' \in \Pi(x_1)$ e $x_1 \in \Gamma(x_0)$, então $\underline{x} = (x_0, x_1, \cdots) \in \Pi(x_0)$
  - Portanto, segue de (2) e do lema 4.1 que

$$v^*(x_0) \geq u(\underline{x}) = F(x_0, x_1) + \beta u(\underline{x}') \geq F(x_0, x_1) + \beta v^*(x_1) - \beta\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Como ε foi arbitrário, (4) se verifica ao tomar $\varepsilon \to 0$.

cont.

Caso $|v^*(x_0)| < \infty$ (cont.): Para verificar (5), tome $x_0 \in \mathbb{X}$ e $\varepsilon > 0$ dado.

- De (3) e do lema 4.1, $\exists \underline{x} = (x_0, x_1, \cdots) \in \Pi(x_0)$ de forma que
$$v^*(x_0) \leq u(\underline{x}) + \varepsilon = F(x_0, x_1) + \beta u(\underline{x}') + \varepsilon,$$
em que $\underline{x}' = (x_1, x_2, \cdots)$.
- De (2), sabe-se que $u(\underline{x}') \leq v^*(x_1)$. Logo,
$$v^*(x_0) \leq F(x_0, x_1) + \beta v^*(x_1) + \varepsilon.$$
- Visto que $x_1 \in \Gamma(x_0)$, verificou-se (5).

Caso $v^*(x_0) = +\infty$: Neste caso, $\exists$ sequência $\{\underline{x}^k\}$ em $\Pi(x_0)$ tal que $\lim_{k\to\infty} u(\underline{x}^k) = \infty$.

- Como $x_1^k \in \Gamma(x_0)$, $\forall k$, e
$$u(\underline{x}^k) = F(x_0, x_1^k) + \beta u((\underline{x}^k)') \leq F(x_0, x_1^k) + \beta v^*(x_1^k), \quad \forall k$$
então (6) se verifica, pois
$$\lim_{k\to\infty} F(x_0, x_1^k) + \beta v^*(x_1^k) \geq \lim_{k\to\infty} u(\underline{x}^k) = \infty.$$

cont.

Caso $v^*(x_0) = -\infty$: Neste caso, $u(\underline{x}) = -\infty$, $\forall \underline{x} \in \Pi(x_0)$. Tome $\underline{x} \in \Pi(x_0)$.

- Do Lema 4.1, para $\underline{x}' = (x_1, x_2, \cdots)$

$$F(x_0, x_1) + \beta u(\underline{x}') = u(\underline{x}) = -\infty$$

- Como F é *real-valued* (ela não assume valor ∞ ou $-\infty$), então

$$u(\underline{x}') = -\infty, \quad \forall x_1 \in \Gamma(x_0) \text{ e } \forall \underline{x}' \in \Pi(x_1).$$

- Portanto,

$$v^*(x_1) = \sup\{u(\underline{x}') : \underline{x}' \in \Pi(x_1)\} = \sup\{-\infty\} = -\infty, \quad \forall x_1 \in \Gamma(x_0).$$

- Como F é *real-valued* e $\beta > 0$, então

$$F(x_0, x_1) + \beta v^*(x_1) = -\infty, \quad \forall x_1 \in \Gamma(x_0),$$

  o que é equivalente a (7).

$\square$

O Teorema a seguir é uma recíproca (volta) do teorema 4.2:

Theorem (4.3)

Seja $\mathbb{X}$, Γ, F e β tais que H.4.1 e H.4.2 sejam válidas. Se v é uma solução para (FE) e satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} \beta^n v(x_n) = 0, \quad \forall (x_0, x_1, \cdots) \in \Pi(x_0), \forall x_0 \in \mathbb{X}, \tag{8}$$

então $v = v^*$, o supremo de (SP).

Proof.

Caso $v(x_0) = -\infty$: este caso não ocorre, pois se (8) é satisfeita, v não pode assumir valor $-\infty$.

- suponha $v(x_0) = -\infty$ para algum $x_0 \in \mathbb{X}$
- Por (7), tem-se que $v(y) = -\infty, \forall y \in \Gamma(x_0)$, já que $F : A \mapsto \mathbb{R}$ é *real-valued* e $\beta > 0$.
- Disso decorreria a contradição

$$\lim_{n\to\infty} \beta^n v(x_n) = \lim_{n\to\infty} (-\infty) = -\infty \neq 0$$

Caso $|v(x_0)| < \infty$: então são válidas (4) e (5) e basta mostrar que (2) e (3) são satisfeitas.

- (4) implica que $\forall \underline{x} \in \Pi(x_0)$ (pois $v(x_i) < \infty$, já que $v(x_0) < \infty$)

$$\begin{aligned} v(x_0) &\geq F(x_0, x_1) + \beta v(x_1) \geq F(x_0, x_1) + \beta F(x_1, x_2) + \beta^2 v(x_2) \\ &\geq \cdots \geq \sum_{t=0}^{n} F(x_t, x_{t+1}) + \beta^{n+1} v(x_{n+1}) \geq u_n(\underline{x}) + \beta^{n+1} v(x_{n+1}), \quad n = 0, 1, \cdots \end{aligned}$$

- Logo, (2) se verifica, pois $\forall \underline{x} \in \Pi(x_0)$

$$v(x_0) = \lim_{n\to\infty} v(x_0) \geq \lim_{n\to\infty} u_n(\underline{x}) + \lim_{n\to\infty} \beta^{n+1} v(x_{n+1}) = u(\underline{x})$$

Cont.

Caso $|v(x_0)| < \infty$ (cont.): Agora tome $\varepsilon > 0$ e $\{\delta_t\}_{t=1}^{\infty}$ em $\mathbb{R}_+$ tal que $\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1}\delta_t \leq \varepsilon/2$.

- De (5), para cada $\delta_{t+1} > 0$, $\exists x_{t+1} \in \Gamma(x_t)$ tal que

$$v(x_t) \leq F(x_t, x_{t+1}) + \beta v(x_{t+1}) + \delta_{t+1}, \quad t = 0, 1, 2, \cdots$$

  Note que $v(x_t) < \infty$. Caso contrário, $v(x_s) = \infty, \forall s < t$ [contradição]

- a sequência $\underline{x} = (x_0, x_1, \cdots)$ assim obtida é elemento de $\Pi(x_0)$ e satisfaz

$$\begin{aligned} v(x_0) &\leq \sum_{t=0}^{n} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) + \beta^{n+1} v(x_{n+1}) + [\delta_1 + \beta\delta_2 + \beta^2\delta_3 + \cdots + \beta^n \delta_{n+1}] \\ &\leq u_n(\underline{x}) + \beta^{n+1} v(x_{n+1}) + \varepsilon/2, \qquad n = 1, 2, \cdots, \end{aligned}$$

  pois $\varepsilon/2 \geq \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1}\delta_t \geq \sum_{t=1}^{n} \beta^{t-1}\delta_t$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Como $\lim_{n\to\infty} \beta^{n+1} v(x_{n+1}) = 0$, então

$$v(x_0) \leq \lim_{n\to\infty} u_n(\underline{x}) + 0 + \varepsilon = u(\underline{x}) + \varepsilon \qquad (3')$$

- Como ε foi arbitrário, então $(3')$ vale $\forall \varepsilon > 0$ e (3) se verifica.

Cont.

Caso $v^*(x_0) = +\infty$: escolha $n \geq 0$ e $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ tais que $x_t \in \Gamma(x_{t-1})$ e

$$\begin{aligned} v(x_t) &= +\infty, \quad para\ t = 0, 1, \cdots, n \\ v(x_{n+1}) &< +\infty, \quad \forall x_{n+1} \in \Gamma(x_n) \end{aligned}$$

- De (8), n é finito, pois se fosse infinito teríamos

$$\lim_{n\to\infty} \beta^n v(x_n) = +\infty, \qquad \text{para uma sequência factível } \underline{x}$$

- tome $A > 0$. Como $v(x_n) = +\infty$, (6) implica que $\exists x_{n+1}^A \in \Gamma(x_n)$ tal que

$$F(x_n, x_{n+1}^A) + \beta v(x_{n+1}^A) \geq \beta^{-n}\left[A + 1 - \sum_{t=0}^{n-1} \beta^t F(x_t, x_{t+1})\right] \tag{5'}$$

  - pois existe $\{y^k\}$ em $\Gamma(x_n)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} F(x_n, y^k) + \beta v(y^k) = +\infty. \tag{6'}$$

  Basta tomar k grande o suficiente para obter $(5')$.

Cont.

Caso $v^*(x_0) = +\infty$ (cont.): Escolha um plano factível a partir de x^A_{n+1}, denotado $\underline{x}^A_{n+1} \in \Pi(x^A_{n+1})$, tal que

$$u(\underline{x}^A_{n+1}) \geq v(x^A_{n+1}) - \beta^{-(n+1)}. \tag{7'}$$

- Isso é possível, pois $v(x^A_{n+1})$ é finito e, portanto, $(3')$ implica que $\forall \varepsilon > 0, \exists \underline{x} \in \Pi(x^A_{n+1})$, vale $v(x^A_{n+1}) \leq u(\underline{x}) + \varepsilon$. (7') segue de $\varepsilon = \beta^{-n-1} > 0$ e $\underline{x}^A_{n+1} = \underline{x}$.

Conclui-se que $\underline{x}^A = (x_0, x_1, \cdots, x_n, \underline{x}^A_{n+1}) \in \Pi(x_0)$, por construção, e

$$\begin{aligned}
u(\underline{x}^A) &= \sum_{t=0}^{n-1} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) + \beta^n F(x_n, x^A_{n+1}) + \beta^{n+1} u(\underline{x}^A_{n+1}) \\
&\geq \sum_{t=0}^{n-1} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) + \beta^n \left[F(x_n, x^A_{n+1}) + \beta \left(v(x^A_{n+1}) - \beta^{-(n+1)} \right) \right] \\
&\geq \sum_{t=0}^{n-1} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) + \beta^n \beta^{-n} \left[A + 1 - \sum_{t=0}^{n-1} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \right] - 1 = A
\end{aligned}$$

Como $A > 0$ foi arbitrário, então pode-se construir uma sequência $\{\underline{x}^A\}_{A=1}^{\infty}$ em $\Pi(x_0)$ tal que $\lim_{A\to\infty} u(\underline{x}^A) = +\infty$ □

Remark

Como v^* é a única função que iguala o supremo em (SP) para cada $x_0 \in \mathbb{X}$, então (FE) possui no máximo uma solução que satisfaz (8).

- *os teoremas 4.2 e 4.3 mostram que v^* é a solução de (FE) que satisfaz (8)*

Pode haver outra solução para (FE). Por exemplo, se o consumidor

- possui $U(c) = c$ e riqueza inicial $x_0 \in \mathbb{X} = \mathbb{R}$, e
- pode emprestar e tomar emprestado a taxa $r = \beta^{-1} - 1$, $\beta \in (0,1)$

$$\max_{\{(c_t, x_{t+1})\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t \qquad s.t. \begin{cases} 0 \leq c_t \leq x_t - \beta x_{t+1}, \ t = 0, 1, \cdots \\ x_0 \ dado \end{cases}$$

Como c_t não é limitado, a solução trivial é $c_t = \infty$ e $v^*(x_0) = +\infty$, $\forall x_0 \in \mathbb{X}$

Para a formulação recursiva, note que

- no ótimo $c_t = x_t - \beta x_{t+1}$.
- Logo, $F(x_t, x_{t+1}) = x_t - \beta x_{t+1}$ e $\Gamma(x) = (-\infty, \beta^{-1}x]$

$$v(x) = \sup_{y \leq \beta^{-1}x} \{x - \beta y + \beta v(y)\} \tag{FE}$$

- Conforme garantido pelo Teo.4.2, $v^*(x) = +\infty$ é solução de (FE)
- Mas $v(x) = x$ também resolve (FE)
  - veja que v viola (8) para $x_0 \neq 0$. De fato,
  - para $y = x/\beta$, ou ainda, $x_t = x_{t-1}/\beta = \beta^{-t}x_0$ é tal que $(x_0, x_1, \cdots) \in \Pi(x_0)$

$$\lim_{n\to\infty} \beta^n v(x_n) = \lim_{n\to\infty} \beta^n x_n = \lim_{n\to\infty} \beta^n \beta^{-n} x_0 = x_0 \neq 0$$

  - Portanto, Teo.4.3 não se aplica para $v(x) = x$.

Definition

Um plano factível $\underline{x} \in \Pi(x_0)$ é uma **plano ótimo a partir de** x_0 se ele atinge o supremo em (SP), ou seja, $u(\underline{x}) = v^*(x_0)$.

Theorem (4.4)

Seja $\mathbb{X}$, Γ, F *e* β *tais que* $H.4.1$ *e* $H.4.2$ *sejam válidas. Seja* $\underline{x}^* \in \Pi(x_0)$ *um plano factível que atinge o supremo em* (SP) *para o estado inicial* $x_0 \in \mathbb{X}$. *Então,*

$$v^*(x_t^*) = F(x_t^*, x_{t+1}^*) + \beta v^*(x_{t+1}^*), \qquad t = 0, 1, 2, \cdots \tag{9}$$

Proof.

Como $\underline{x}^*$ atinge o supremo $v^*(x_0^*)$, então

$$\begin{aligned} v^*(x_0^*) &= u(\underline{x}^*) = F(x_0, x_1^*) + \beta u((\underline{x}^*)') \\ &\geq u(\underline{x}) = F(x_0, x_1) + \beta u(\underline{x}'), \qquad \forall \underline{x} \in \Pi(x_0) \end{aligned} \tag{10}$$

Em particular, a desigualdade vale $\forall \underline{x}$ com $x_1 = x_1^*$.
Como $\underline{x}' \in \Pi(x_1^*)$ e $x_1^* \in \Gamma(x_0) \Rightarrow (x_0, \underline{x}') \in \Pi(x_0)$, segue que $\forall \underline{x}' \in \Pi(x_1^*)$

$$F(x_0, x_1^*) + \beta u((\underline{x}^*)') \geq F(x_0, x_1^*) + \beta u(\underline{x}') \quad \Rightarrow \quad u((\underline{x}^*)') \geq u(\underline{x}'),$$

pois $\beta > 0$. Portanto, $(\underline{x}^*)'$ atinge o supremo a partir de x_1^*: $u((\underline{x}^*)') = v^*(x_1^*)$.
Substituindo isto em (10), obtém-se (9) para $t = 0$. Usando indução, suponha (9) válida para $t = s$ $[v^*(x_s^*) = F(x_s^*, x_{s+1}^*) + \beta v^*(x_{s+1}^*)]$ e $u((\underline{x}_s^*)') = v^*(x_{s+1}^*)$. Para $t = s+1$, tem-se

$$\begin{aligned} v^*(x_{s+1}^*) &= u(\underline{x}_{s+1}^*) = F(x_{s+1}^*, x_{s+2}^*) + \beta u((\underline{x}_{s+1}^*)') \qquad \text{(10')} \\ &\geq u(\underline{x}_{s+1}) = F(x_{s+1}^*, x_{s+2}) + \beta u(\underline{x}_{s+1}'), \qquad \forall \underline{x}_{s+1}' \in \Pi(x_{s+1}^*) \end{aligned}$$

Em particular, a desigualdade vale para todo plano factível com $x_{s+2} = x_{s+2}^*$.
Como $\underline{x}_{s+1}' \in \Pi(x_{s+2}^*)$ e $x_{s+2}^* \in \Gamma(x_{s+1}^*) \Rightarrow (x_{s+1}^*, \underline{x}_{s+1}') \in \Pi(x_{s+1}^*)$, então $\forall \underline{x}_{s+1}' \in \Pi(x_{s+2}^*)$

$$F(x_{s+1}^*, x_{s+2}^*) + \beta u((\underline{x}_{s+1}^*)') \geq F(x_{s+1}^*, x_{s+2}^*) + \beta u(\underline{x}_{s+1}') \quad \Rightarrow \quad u((\underline{x}_{s+1}^*)') \geq u(\underline{x}_{s+1}'),$$

e, $\therefore$, $u((\underline{x}_{s+1}^*)') = v^*(x_{s+2}^*)$. Substituindo em $(10')$, obtém-se (9) para $t = s+1$. □

O Teorema a seguir é uma recíproca (volta) do Teo.4.4.

Theorem (4.5)

Seja $\mathbb{X}$, Γ, F *e* β *tais que* $H.4.1$ *e* $H.4.2$ *sejam válidas. Seja* $\underline{x}^* \in \Pi(x_0)$ *um plano factível a partir de* x_0 *tal que satisfaz* (9) *e* (11)*:*

$$v^*(x_t^*) = F(x_t^*, x_{t+1}^*) + \beta v^*(x_{t+1}^*), \qquad t = 0, 1, 2, \cdots \tag{9}$$

$$\limsup_{t\to\infty} \beta^t v^*(x_t^*) \leq 0. \tag{11}$$

Então, $\underline{x}^*$ *atinge o supremo em* (SP) *para o estado inicial* x_0*.*

Proof.

Suponha que $\underline{x}^* \in \Pi(x_0)$ satisfaz (9) e (11). Então segue de indução que

$$v^*(x_0) = \sum_{t=0}^{n} \beta^t F(x_t^*, x_{t+1}^*) + \beta^{n+1} v^*(x_{n+1}^*) = u_n(\underline{x}^*) + \beta^{n+1} v^*(x_{n+1}^*),$$

para $n = 0, 1, 2, \cdots$. Usando (11),

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sup[v^*(x_0)] &= \lim_{n\to\infty} \sup\left[u_n(\underline{x}^*) + \beta^{n+1} v^*(x_{n+1}^*)\right] \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sup\left[u_n(\underline{x}^*)\right] + \lim_{n\to\infty} \sup\left[\beta^{n+1} v^*(x_{n+1}^*)\right]\end{aligned}$$

em que a última desigualdade decorre do exer.3.31 de Madureira (2013) e do fato de $\{u_n(\underline{x}^*)\}$ e $\{\beta^{n+1} v^*(x_{n+1})\}$ serem limitadas superiormente.
Do lema 3.6.8 de Madureira (2013), sabe-se que

$$(z_k) \text{ converge para } z \Leftrightarrow z = \lim\sup(z_k) = \lim\inf(z_k)$$

Como $v^*(x_0)$ é constante em n, ela é convergente. Como $\lim_{n\to\infty} u_n(\underline{x}^*) = u(\underline{x}^*)$, então $u_n(\underline{x}^*)$ converge. Logo,

$$v^*(x_0) = \lim_{n\to\infty} v^*(x_0) \leq u(\underline{x}^*) + \lim_{n\to\infty} \sup\left[\beta^{n+1} v^*(x_{n+1}^*)\right] \leq u(\underline{x}^*)$$

em que usou-se (11) na última desigualdade. Como $\underline{x}^*$ é factível a partir de x_0 ($\underline{x}^* \in \Pi(x_0)$), então $v^*(x_0) \geq u(\underline{x}^*)$. Conclui-se que $v^*(x_0) = u(\underline{x}^*)$ e $\underline{x}$ atinge o supremo $v^*(x_0)$. □

Para ver a importância de (11), considere novamente o problema do consumidor com $U(c) = c$

- mas suponha $x_t \geq 0$, para todo t
- novamente vale $c_t = x_t - \beta x_{t+1}$

$$\max_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[x_t - \beta x_{t+1}\right] \qquad s.t. \begin{cases} 0 \leq x_{t+1} \leq \beta^{-1} x_t, \ t = 0, 1, \cdots \\ x_0 \ dado \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\max_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} x_0 \qquad s.t. \begin{cases} 0 \leq x_{t+1} \leq \frac{x_t}{\beta}, \ t = 0, 1, \cdots \\ x_0 \ dado \end{cases}$$

Logo, $v^*(x_0) = x_0, \ \forall x_0 \geq 0$.
Note que $v^*(x) = x$ satisfaz a equação funcional correspondente

$$\max_{0 \leq y \leq x/\beta} (x - \beta y) + \beta v^*(y) = \max_{0 \leq y \leq x/\beta} x = x = v^*(x)$$

Question

Quais planos atingem o ótimo (supremo)?

Dado $x_0 \geq 0$, o conjunto de planos factíveis consiste das sequências

- $(x_0, 0, \cdots)$: consumir tudo hoje
- $(x_0, \beta^{-1}x_0, 0, \cdots)$: consumir tudo em $t = 1$
- $(x_0, \beta^{-1}x_0, \beta^{-2}x_0, 0, \cdots)$: consumir tudo em $t = 2$
- $\cdots$

e todas as combinações convexas destas sequências.

Remark

Qualquer plano factível satisfaz (9).

Mas somente sequências com consumo em tempo finito satisfazem (11)

- considere $x_t = \beta^{-t}x_0$ (consumir nada em cada período)
- tal plano gera $\limsup_{t\to\infty} \beta^t v^*(x_t^*) = x_0$ e utilidade

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (x_t - \beta x_{t+1}) = 0, \quad \forall x_0 \geq 0$$

- se $x_0 > 0$, tal política não atinge o supremo $v^*(x_0) = x_0$ e viola (11).

Linguagem:

- $G : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ com $G(x) \subseteq \Gamma(x)$ $\forall x \in \mathbb{X}$, $G(x) \neq \emptyset$
  - Correspondência política
  - Se $G(x)$ possui 1 só elemento para cada x, G é a função política
- Se a sequência $\underline{x} = (x_0, x_1, \cdots)$ é tal que $x_{t+1} \in G(x_t)$ para todo $t = 0, 1, 2, \cdots$, então
  - $\underline{x}$ é gerada por G a partir de x_0
- A correspondência política ótima é G^* tal que

$$G^*(x) = \{y \in \Gamma(x) : v^*(x) = F(x, y) + \beta v^*(y)\}$$

Conclui-se que

Remark

- *Teo.4.4: Todo plano ótimo $\{x_t^*\}$ é gerado por G^**
- *Teo.4.5: Todo plano gerado por G^* a partir de x_0, e que satisfaz (11), é um plano ótimo.*

Bounded Returns

Estudaremos equações funcionais da forma

$$v(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} F(x, y) + \beta v(y) \tag{1}$$

sob a hipótese de que F é limitada e $\beta < 1$

- já vimos que isso garante $H.4.2$ satisfeita, i.e., a existência de

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$$

  para todo $x_0 \in \mathbb{X}$ e todo $\underline{x} \in \Pi(x_0)$

Bounded Returns

Lembrando que

- $\Gamma : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ descreve a factibilidade
  - (da var. de estado para o próximo período)
- A é o gráfico de Γ, ou seja,

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X} : y \in \Gamma(x)\}$$

- $F : A \mapsto \mathbb{R}$ a função retorno
- $\beta \in [0, 1)$ é o fator de desconto

Bounded Returns

Hipótese (4.3)

$\mathbb{X}$ é um conjunto convexo do $\mathbb{R}^l$ e a correspondência $\Gamma : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ é não vazia, compact-valued e contínua.

- note que isso implica $H.4.1$

Hipótese (4.4)

A função $F : A \mapsto \mathbb{R}$ é limitada e contínua e $\beta \in (0, 1)$

- note que isso implica $H.4.2$

Bounded Returns

Como $H.4.3$ e $H.4.4$ implicam $H.4.1$ e $H.4.2$, então

- O problema sequencial (associado a (1)) está bem definido
- Teoremas 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5 garantem o Princípio da Otimalidade
  - "as soluções coincidem"

Seja B uma cota superior para $|F(x,y)|$. Então, $\forall x_0 \in \mathbb{X}$ tem-se

$$
\begin{aligned}
|v^*(x_0)| &= \left|\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1})\right| \leq \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left|F(x_t, x_{t+1})\right| \\
&\leq B(1+\beta+\beta^2+\cdots) = \frac{B}{1-\beta}
\end{aligned}
$$

- Portanto, v^* é limitada. Logo, procurar soluções de (1) em $\mathbb{C}(\mathbb{X})$

  $\mathbb{C}(\mathbb{X})$: espaço das funções $f : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$ contínuas e limitadas, com a norma do sup, $||f|| = \sup\{f(x) : x \in \mathbb{X}\}$

Bounded Returns

O Princípio da Otimalidade se aplica

- qq $v \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$, solução de (1), satisfaz hips. do Teo.4.3
  - Logo, $v = v^*$, v^* o supremo do prob. sequencial

Dado $v \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$, solução de (1), pode-se definir $G : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ por

$$G(x) = \{y \in \Gamma(x) : v(x) = F(x, y) + \beta v(y)\} \tag{2}$$

- dos Teoremas 4.4 e 4.5, para cada $x_0 \in \mathbb{X}$, $\{x^*_{t+1}\}$ atinge o supremo $v^*(x_0)$ sse $\{x^*_{t+1}\}$ foi gerada por G

Bounded Returns

O Operador de Bellman

Seja o operador T em $\mathbb{C}(\mathbb{X})$ tal que

$$(Tf)(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} F(x,y) + \beta f(y) \tag{3}$$

- note que (1) equivale a $Tv = v$

Bounded Returns

Theorem (4.6)

Seja $\mathbb{X}$, Γ, F e β tais que H.4.3 é H.4.4 sejam válidas. Seja $\mathbb{C}(\mathbb{X})$ o espaço das funções contínuas e limitadas $f : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$, com a norma do sup. Então,

(i) *o operador T mapeia $\mathbb{C}(\mathbb{X})$ em si: $T : \mathbb{C}(\mathbb{X}) \mapsto \mathbb{C}(\mathbb{X})$.*

(ii) *T possui um, e somente um, ponto fixo v e $v \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$*

(iii) $\forall v_0 \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$

$$||T^n v_0 - v|| \leq \beta^n ||v_0 - v||, \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{4}$$

(iv) *dado v, a correspondência política ótima $G : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ definida em (2) é compact-valued e uhc.*

Bounded Returns

Proof.

Sob $H.4.3$ e $H.4.4$, para cada $f \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$ e $x \in \mathbb{X}$, o problema em (3) é maximizar a função contínua

$$F(x, \cdot) + \beta f(\cdot)$$

no conjunto compacto $\Gamma(x)$. Portanto, o máximo é atingido, i.e., $\exists y^* \in \Gamma(x)$ tal que $(Tf)(x) = F(x, y^*) + \beta f(y^*)$.

- Como F e f são limitadas, então Tf também é limitada.
- Como F e f são contínuas e Γ é *compact-valued* e contínua, segue do Teorema do Máximo ($T.3.6$) que Tf é contínua.
- Conclui-se que $Tf \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$.
- Como f foi arbitrária, então $T : \mathbb{C}(\mathbb{X}) \mapsto \mathbb{C}(\mathbb{X})$

Afirmo que T satisfaz as condições (suficientes) de Blackwell. De fato, T mapeia funções limitadas em funções limitadas. Para monotonicidade, tome $f, h \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$ tais que $f(x) \leq h(x), \forall x \in \mathbb{X}$. Então, (3) implica

$$(Tf)(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} F(x, y) + \beta f(y) \leq \max_{y \in \Gamma(x)} F(x, y) + \beta h(y) = (Th)(x)$$

Bounded Returns

Proof.

Para desconto, tome $a \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$. Defina $(f + a) \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$ por $(f + a)(x) = f(x) + a, \forall x \in \mathbb{X}$. Então, para cada $x \in \mathbb{X}$ tem-se

$$\begin{aligned} [T(f + a)](x) &= \max_{y \in \Gamma(x)} F(x, y) + \beta(f + a)(y) = \max_{y \in \Gamma(x)} F(x, y) + \beta f(y) + \beta a \\ &= (Tf)(x) + \beta a \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema de Blackwell ($T.3.3$), o operador T definido em (3) é uma contração. Provou-se no $T.3.1$ que $\mathbb{C}(\mathbb{X})$ é um espaço de Banach, ou seja, um espaço normado completo. Logo, por definição, toda sequência de Cauchy em $\mathbb{C}(\mathbb{X})$ converge para um elemento de $\mathbb{C}(\mathbb{X})$.

- Portanto, $\mathbb{C}(\mathbb{X})$ e T satisfazem as condições do Teorema da Contração ($T.3.2$).
- Segue que T possui um, e somente um, ponto fixo v e este satisfaz $v \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$.
- Aindam (4) é satisfeito.

As propriedades de G, *compact-valued* e uhc, seguem do Teorema do Máximo. $\square$

Bounded Returns

- De $T.4.3$ e $T.4.6$, se $v \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$ é tal que $v = Tv$, então $v = v^*$
  - Logo, $v^* \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$

- De $T.4.5$ e $T.4.6$, $\exists$ pelo menos 1 plano ótimo:
  - qq plano gerado por G é ótimo

Bounded Returns

Hipótese (4.5)

Para cada y, $F(\cdot, y)$ é estritamente crescente em cada um dos seus l primeiros argumentos.

Hipótese (4.6)

Γ *é monótonona, no sentido de que*

$$x \leq x' \Rightarrow \Gamma(x) \subseteq \Gamma(x')$$

Theorem (4.7)

Seja $\mathbb{X}$, Γ, F e β tais que H.4.3, H.4.4, H.4.5 e H.4.6 sejam válidas. Seja v a única solução de (1). Enão v é estritamente crescente.

Bounded Returns

Proof.

Seja $\mathbb{C}'(\mathbb{X}) \subset \mathbb{C}(\mathbb{X})$ o conjunto das funções contínuas, limitadas e não-decrescentes em $\mathbb{X}$.
Seja $\mathbb{C}''(\mathbb{X}) \subset \mathbb{C}'(\mathbb{X})$ o conjunto das funções contínuas, limitadas e estritamente crescentes.
Afirmo que $T[\mathbb{C}'(\mathbb{X})] \subseteq \mathbb{C}''(\mathbb{X})$. De fato, tome $f \in \mathbb{C}'(\mathbb{X})$. Então, $Tf \in \mathbb{C}''(\mathbb{X})$, pois $\forall \varepsilon > 0$ tal que $x + \varepsilon \in \mathbb{X}$ tem-se

$$
\begin{aligned}
(Tf)(x) &= \max_{y \in \Gamma(x)} F(x,y) + \beta f(y) \\
(Tf)(x+\varepsilon) &= \max_{y \in \Gamma(x+\varepsilon)} F(x+\varepsilon,y) + \beta f(y)
\end{aligned}
$$

Como Γ é monótona, então $\Gamma(x) \subseteq \Gamma(x+\varepsilon)$. Logo,

$$
(Tf)(x+\varepsilon) \geq \max_{y \in \Gamma(x)} F(x+\varepsilon,y) + \beta f(y) > \max_{y \in \Gamma(x)} F(x,y) + \beta f(y) = (Tf)(x)
$$

pois $F(\cdot, y)$ é estritamente crescente.
Do $T.4.6$, T é uma contração cujo ponto fixo é $v \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$.

- Usando o Corolário 1 e o fato de que $\mathbb{C}'(\mathbb{X})$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{C}(\mathbb{X})$, tem-se que $T[\mathbb{C}'(\mathbb{X})] \subseteq \mathbb{C}'(\mathbb{X}) \Rightarrow v \in \mathbb{C}'(\mathbb{X})$.
- Mais ainda, como $T[\mathbb{C}'(\mathbb{X})] \subseteq \mathbb{C}''(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{C}'(\mathbb{X})$, então $v \in \mathbb{C}''(\mathbb{X})$.

□

Bounded Returns

Hipótese (4.7)

F é estritamente côncava, ou seja, para todo par $(x,y),(x',y') \in A$ e todo $\theta \in (0,1)$

$$F\left[\theta(x,y) + (1-\theta)(x',y')\right] \geq \theta F(x,y) + (1-\theta)F(x',y'),$$

com desigualdade estrita se $x \neq x'$.

Hipótese (4.8)

Γ é convexa, no sentido de que, $\forall \theta \in [0,1]$ e todo para $x, x' \in \mathbb{X}$:

$$y \in \Gamma(x) \text{ e } y' \in \Gamma(x') \Rightarrow (\theta y + (1-\theta)y') \in \Gamma[\theta x + (1-\theta)x']$$

- $H.4.8 \Rightarrow$ para cada $x \in \mathbb{X}$, $\Gamma(x)$ é convexo
- Como $\mathbb{X}$ é convexo, então $H.4.8 \Rightarrow A$ é convexo

Bounded Returns

Theorem (4.8)

Seja $\mathbb{X}$, Γ, F e β tais que H.4.3, H.4.4, H.4.7 e H.4.8 sejam válidas. Seja v que satisfaz (1) e G que satisfaz (2). Então, v é estritamente côncava e G é uma função contínua.

Bounded Returns

Proof.

Seja $\mathbb{C}'(\mathbb{X}) \subset \mathbb{C}(\mathbb{X})$ o conjunto das funções limitadas, contínuas e fracamente côncavas em $\mathbb{X}$.
Seja $\mathbb{C}''(\mathbb{X}) \subset \mathbb{C}'(\mathbb{X})$ o conjunto das funções limitadas, contínuas e estritamente côncavas em $\mathbb{X}$.
Afirmo que $T[\mathbb{C}'(\mathbb{X})] \subseteq \mathbb{C}''(\mathbb{X})$. De fato, tome $f \in \mathbb{C}'(\mathbb{X})$ e seja $x_0, x_1 \in \mathbb{X}$ e $\theta \in (0,1)$ tais que $x_0 \neq x_1$ e defina $x_\theta = \theta x_0 + (1-\theta)x_1$.
Para $i = 0, 1$, seja $y_i \in \Gamma(x_i)$ a solução de (1) para $x = x_i$. De $H.4.8$, tem-se $y_\theta = \theta y_0 + (1-\theta)y_1 \in \Gamma(x_\theta)$. Segue que

$$\begin{aligned}(Tf)(x_\theta) &\geq F(x_\theta, y_\theta) + \beta f(y_\theta) \\ &> \theta[F(x_0, y_0) + \beta f(y_0)] + (1-\theta)[F(x_1, y_1) + \beta f(y_1)] \\ &= \theta(Tf)(x_0) + (1-\theta)(Tf)(x_1)\end{aligned}$$

pois f é fracamente côncava e $H.4.7$.
Como x_0, x_1 foram arbitrários, então $Tf \in \mathbb{C}''(\mathbb{X})$. Como f foi arbitrária, então $T[\mathbb{C}'(\mathbb{X})] \subseteq \mathbb{C}''(\mathbb{X})$.

Bounded Returns

Proof.

Do $T.4.6$, T é uma contração e seu ponto fixo $v \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$.

- Usando o Corolário 1 e o fato de que $\mathbb{C}'(\mathbb{X})$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{C}(\mathbb{X})$, tem-se $T[\mathbb{C}'(\mathbb{X})] \subseteq \mathbb{C}'(\mathbb{X}) \Rightarrow v \in \mathbb{C}'(\mathbb{X})$.
- Mais ainda, como $T[\mathbb{C}'(\mathbb{X})] \subseteq \mathbb{C}''(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{C}'(\mathbb{X})$, então $v \in \mathbb{C}''(\mathbb{X})$.

Como v é estritamente côncava, F é côncava $(H.4.7)$ e $\Gamma(\mathbb{X})$ é convexa $(H.4.8)$, então $\exists$ no máximo 1 solução $y \in \Gamma(x)$ para o problema em (3).
Logo, G é *single-valued.* Finalmente, o $T.4.6$ garante que G é uhc e o exercício 3.11 que G é contínua.

Bounded Returns

A idéia geral das provas de $T.4.7$ e $T.4.8$

- o operador T preserva certas propriedades
  - se v_0 tem a propriedade $\mathcal{P}$
  - e T preserva a propriedade $\mathcal{P}$
  - então $T^n v_0$ tem a propriedade $\mathcal{P}$

Esta mesma ideia pode ser usada para estabelecer propriedades da função g

- sob que condições g_n converge uniformemente para g?
- o teorema a seguir responde:

Bounded Returns

Theorem

Seja $\mathbb{X}$, Γ, F *e* β *tais que H.4.3, H.4.4, H.4.7 e H.4.8 sejam válidas. Seja* v *que satisfaz* (1) *e* g *que satisfaz* (2). *Denote* $\mathbb{C}'(\mathbb{X})$ *o conjunto de funções contínuas, limitadas e côncavas* $f : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$ *e seja* $v_0 \in \mathbb{C}'(\mathbb{X})$. *Defina* $\{(v_n, g_n)\}$ *por*

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= Tv_n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \\ g_n(x) &= \arg\max_{y \in \Gamma(x)} F(x, y) + \beta v_n(y), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

Então, $g_n \to g$ *ponto-a-ponto. Se* $\mathbb{X}$ *é compacto, então a convergência é uniforme.*

Bounded Returns

Proof.

Seja $\mathbb{C}''(\mathbb{X}) \subset \mathbb{C}'(\mathbb{X})$ o conjunto das funções estritamente côncavas $f : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$. Do $T.4.8$, $v \in \mathbb{C}''(\mathbb{X})$ e sua demonstração estabeleceu $T[\mathbb{C}'(\mathbb{X})] \subseteq \mathbb{C}''(\mathbb{X})$. Se $v_0 \in \mathbb{C}'(\mathbb{X})$, então $v_n \in \mathbb{C}''(\mathbb{X})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Defina $\{f_n\}$ e f por

$$\begin{aligned} f_n(x, y) &= F(x, y) + \beta v_n(y), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \\ f(x, y) &= F(x, y) + \beta v(y) \end{aligned}$$

Como F é côncava $(H.4.7)$, então f_n e f são estritamente côncavas, para todo $n = 0, 1, \cdots$. Como $f_n \to f$ uniformemente (na norma do sup), então pelo $T.3.8$, $g_n \to g$ ponto-a-ponto e converge uniformemente se $\mathbb{X}$ é compacto. $\square$

Bounded Returns

Resolva o exercício a seguir:

Remark

O exercise 4.4 *(lista de exercício) estabelece um resultado muito útil para aplicações computacionais de Programação Dinâmica.*

Bounded Returns

Question

Posso derivar o problema em (3) *para achar a CPO?*

- *já sabemos que* $\exists! v$ *tal que* $v \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$ *e satisfaz* (1)
- v *é diferenciável?*

Considere o modelo de crescimento com 1 setor

$$v(x) = \max_{0 \leq y \leq f(x)} U[f(x) - y] + \beta v(y)$$

- se v for diferenciável, então g pode ser obtida de

$$U'[f(x) - g(x)] = \beta v'[g(x)] \tag{5}$$

- se v for $2\times$ diferenciável, monotonicidade de g pode ser provada derivando (5) em x

Bounded Returns

Remark

É possível provar que $\exists v'$, *mas existência de* v'' *só em poucos casos!!*

Bounded Returns

Theorem (4.10 - Benveniste and Scheinkman)

Seja $\mathbb{X}$ *um conjunto convexo,* $V : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ *uma função côncava,* x_0 *um ponto interior de* $\mathbb{X}$*,* $x_0 \in int\mathbb{X}$*, e* D *uma vizinhança de* $\mathbb{X}$*.*

- *se* $\exists$ *uma função côncava e diferenciável* $W : D \mapsto \mathbb{R}$ *com* $W(x_0) = V(x_0)$ *e* $W(x) \leq V(x)$ *para todo* $x \in D$*.*
- *então,* V *é diferenciável em* x_0
- *e* $V_i(x_0) = W_i(x_0)$ *para todo* $i = 1, 2, \cdots, l$

Bounded Returns

Proof.

Todo subgradiente p de V em x_0 satisfaz

$$p \cdot (x - x_0) \geq V(x) - V(x_0) \geq W(x) - W(x_0), \qquad \forall x \in D.$$

De fato, por definição, $-p$ é subgradiente (subderivada/subdiferencial) de $-V$ em x_0 da viz. aberta D se

$$-p \cdot (x - x_0) + (-V(x_0)) \leq -V(x)$$

donde decorre a primeira desigualdade. A segunda desigualdade usa $W(x) \leq V(x), \forall x \in D$, com igualdade em $x = x_0$. Como W é diferenciável em x_0, p é único. Mas uma função côncava possui único subgradiente em um ponto interior $x_0 \Leftrightarrow$ ela é diferenciável em x_0 (ver Rockafellar (1970), Teo. 25.1). □

- ver gráficos apresentados em aula

Bounded Returns

Hipótese (4.9)

F é continuamente diferenciável no interior de A.

Theorem (4.11 - Diferenciabilidade da Função Valor)

Seja $\mathbb{X}$, Γ, F e β tais que $H.4.3$, $H.4.4$, $H.4.7$, $H.4.8$ e $H.4.9$ sejam válidas. Seja v que satisfaz (1) e g que satisfaz (2). Se $x_0 \in int\mathbb{X}$ e $g(x_0) \in int\Gamma(x_0)$, então v é continuamente diferenciável em x_0, com derivadas dadas por

$$v_i(x_0) = F_i[x_0, g(x_0)], \qquad i = 1, 2, \cdots, l$$

Bounded Returns

Proof.

Como $g(x_0) \in int\Gamma(x_0)$ e Γ é contínua, então $g(x_0) \in \Gamma(x)$ para todo x em uma vizinhança D de x_0.

- não provarei isso (não vale a pena neste curso. Ver gráfico em aula.)
- pense no caso $\Gamma(x) = [0, f(x)]$. Então, $g(x_0) \in (0, f(x_0))$
- seja $D = \{x \in \mathbb{X} : g(x_0) < f(x) < \bar{f}\} = (f^{-1}(g(x_0)), f^{-1}(\bar{f}))$
- então, $\forall x \in D$, tem-se $g(x_0) \in [0, f(x)] = \Gamma(x)$

Defina W em D tal que

$$W(x) = F[x, g(x_0)] + \beta v[g(x_0)] \leq v(x)$$

em que a desigualdade decorre do fato de que $g(x_0) \in \Gamma(x), \forall x \in D$. Ainda, $W(x_0) = v(x_0)$. Como F é côncava $(H.4.7)$ e diferenciável $(H.4.9)$, segue que W é côncava e diferenciável. Com isso, tem-se v e W que satisfazem as hipóteses do $T.4.10$, de onde segue o resultado. $\square$

Bounded Returns

Exercise (4.5)

Considere a CPO (5)

$$U'[f(x) - g(x)] = \beta v'[g(x)] \tag{5}$$

Suponha que U, f e v são estritamente côncavas, estritamente crescentes e de classe $\mathbb{C}^1$. Ainda, $0 < g(x) < f(x)$, $\forall x$. Use (5) para mostrar que g é estritamente crescente e tem inclinação menor do que a inclinação de f:

$$0 < g(x') - g(x) < f(x') - f(x), \qquad se\ x' > x$$

Bounded Returns

Proof.

Afirmo que g é estritamente crescente. De fato, suponha por absurdo que existe um par $x, x' \in \mathbb{X}$ com $x < x'$ tal que $g(x) \geq g(x')$. Como f é estritamente crescente e U é estritamente côncava, de (5) tem-se

$$\beta v'[g(x')] = U'[f(x') - g(x')] < U'[f(x) - g(x)] = \beta v'[g(x)]$$

Logo, v' não pode ser estritamente decrescente, uma contradição com v estritamente côncava. Conclui-se que $g(x') > g(x)$ se $x' > x$.
Para ver que $g(x') - g(x) < f(x') - f(x)$ se $x' > x$, note que g é estritamente crescente, o que juntamente com (5) implica

$$U'[f(x) - g(x)] = \beta v'[g(x)] > \beta v'[g(x')] = U'[f(x') - g(x')]$$

em que a desigualdade segue de $g(x') > g(x)$ quando $x' > x$ e v' é estritamente decrescente. Como U é estritamente côncava, então U' é estritamente decrescente. Logo,

$$f(x) - g(x) < f(x') - g(x') \Rightarrow g(x') - g(x) < f(x') - f(x), \quad se\ x' > x$$

□

Bounded Returns

Os resultados obtidos sob F limitada podem ser generalizados (sob certas condições) para os casos

- retorno cte de escala:

$$U(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}, \quad \sigma \geq 1 \quad e \quad f(k) = k^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

- função retorno não limitada:

$$U(c) = \ln(c) \quad e \quad f(k) = k^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

- estocástico

$$v(k,z) = \sup_{y \in zf(k)} U[zf(k) - y] + \beta \int_{\mathbb{Z}} v(y, z') Q(x, dz')$$

ou

$$v(k,z) = \sup_{y \in zf(k)} U[zf(k) - y] + \beta \int_{\mathbb{Z}} v(y - z', z') Q(x, dz')$$

The One-Sector Model of Optimal Growth

$$\max_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U\left[f(x_t) - x_{t+1}\right], \quad s.t. \begin{cases} 0 \leq x_{t+1} \leq f(x_t), & t = 0, 1, \cdots \\ x_0 \geq 0 \ dado \end{cases} \tag{1}$$

Exercise (Lista de exercício)

O exercicício 5.1 mostra que os teoremas do capítulo 4 se aplicam no modelo de crescimento ótimo com um setor.