

Capítulo 6

Introdução à Convecção

PME2360 - TRANSFERÊNCIA DE CALOR
PROF. DR. GUENTHER CARLOS KRIEGER FILHO

guenther@usp.br

Site LETE

<http://www.lete.poli.usp.br/PME2360.html>

Introdução

- Condução - movimento molecular;
- Convecção - movimento macroscópico;
- Convecção como C. C. de problemas de condução
 - h dado;
- Próximos capítulos apresentam a metodologia de cálculo ou estimativa de h .

6.1 O Problema de T. C. por Convecção

- Escoamento sobre as superfícies da figura:
- Se $T_{sup} \neq T_{\infty}$ haverá T. C.

$$q'' = h(T_{sup} - T_{\infty}) \quad (6.1)$$

onde h é o *coeficiente local de transferência de calor por Convecção*.

- As condições do escoamento variam em cada ponto e assim h e q'' também. Calor total transferido é dado por

6.1 O Problema de T. C. por Convecção (*continuação*)

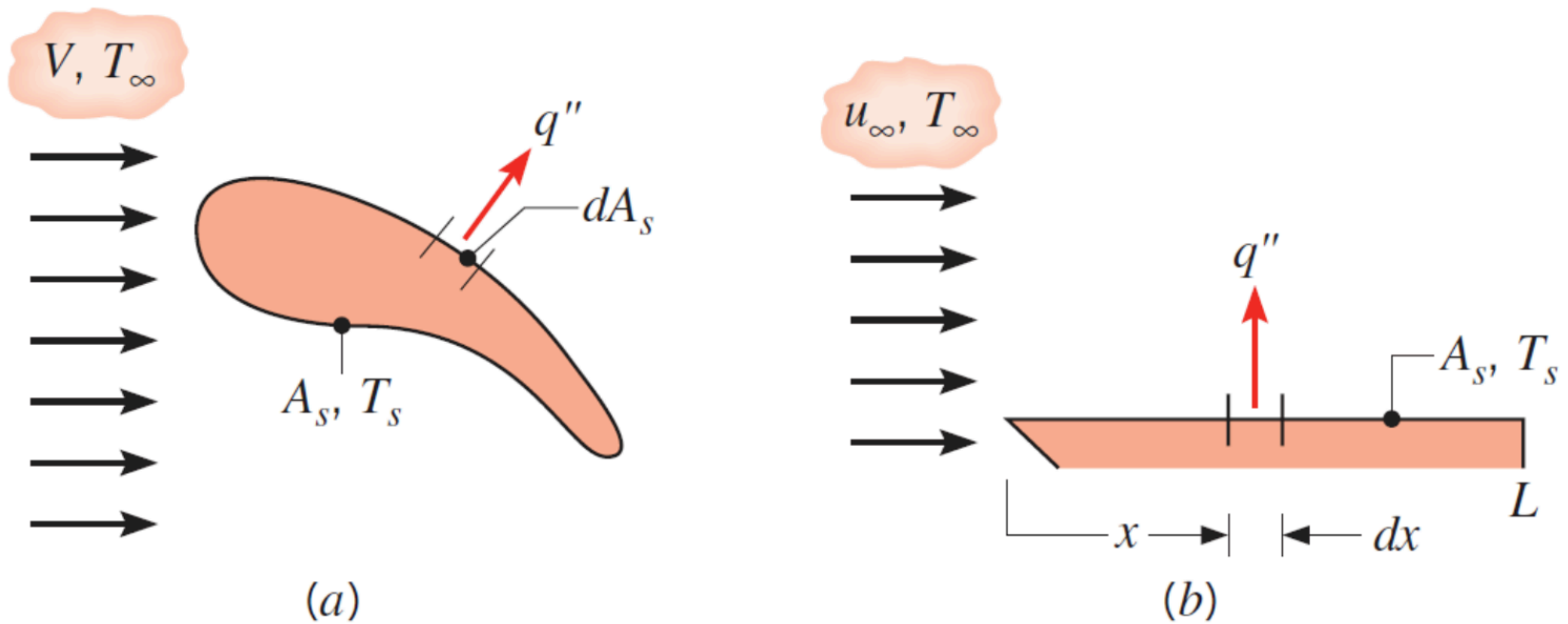


Figura 6.1: Efeitos locais de convecção. (a) Superfície de forma arbitrária e (b) Placa plana

6.1 O Problema de T. C. por Convecção (*continuação*)

$$q = \int_{A_{sup}} q'' dA_{sup}$$

com 6.1 tem-se:

$$q = (T_{sup} - T_{\infty}) \int_{A_{sup}} h dA_{sup} \quad (6.2)$$

- Define-se \bar{h} como o *coeficiente médio de transferência de calor por Convecção*, tal que:

$$q = \bar{h} A_{sup} (T_{sup} - T_{\infty}) \quad (6.3)$$

6.1 O Problema de T. C. por Convecção (*continuação*)

igualando-se as expressões para o fluxo de calor q , eqs. (6.2) e (6.3) tem-se:

$$\bar{h} = \frac{1}{A_{sup}} \int_{A_{sup}} h dA_{sup} \quad (6.4)$$

- Para o caso da placa plana da figura,

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h(x) dx \quad (6.5)$$

6.2 As Camadas Limite da Convecção

- O escoamento sobre uma superfície é influenciado pela presença da mesma:
 - Perfil de velocidade,
 - Perfil de temperatura.

6.2.1 A Camada Limite fluidodinâmica

- Escoamento sobre a placa da figura

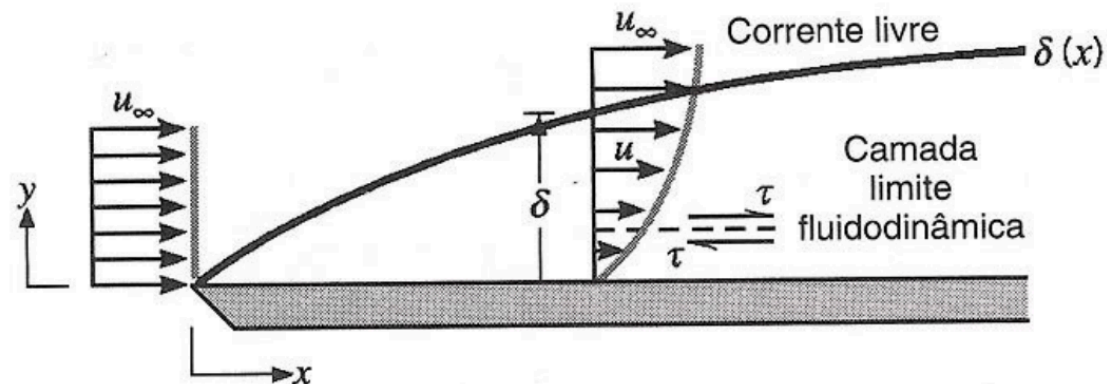


Figura 6.2: Camada limite fluidodinâmica sobre uma Placa plana

6.2.1 A Camada Limite fluidodinâmica (*continuação*)

- Partículas do fluido em contato com a parede passam a ter velocidade nula, devido ao atrito.
- Camadas de fluido adjacentes são freiadas pelas inferiores. Efeito é perceptível até a distância $y = \delta$. Esta distância é chamada *espessura da camada limite*. Nesta altura $y = \delta$ a velocidade é:

$$u(y) = 0,99u_{\infty} \quad (6.6)$$

- Com o afastamento (x) em relação ao bordo de ataque, a influência da parede 'entra' mais no escoamento, ou seja, $\delta(x)$ cresce.

6.2.1 A Camada Limite fluidodinâmica (*continuação*)

- A força que freia as camadas é devida ao atrito que provoca uma *tensão de cisalhamento* τ , que para um *fluido newtoniano* é dada por:

$$\tau_{sup} = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (6.7)$$

onde μ é a propriedade do fluido chamada *viscosidade dinâmica*.

- Num escoamento externo, o *coeficiente de atrito local* é relacionado à tensão de cisalhamento na parede por:

$$C_f \equiv \frac{\tau_{sup}}{\rho u_{\infty}^2 / 2} \quad (6.8)$$

6.2.2 A Camada Limite Térmica

- Caso haja diferença entre o perfil de temperatura do fluido na corrente livre T_∞ e a temperatura da superfície T_{sup} , haverá transferência de energia entre as camadas de fluido.

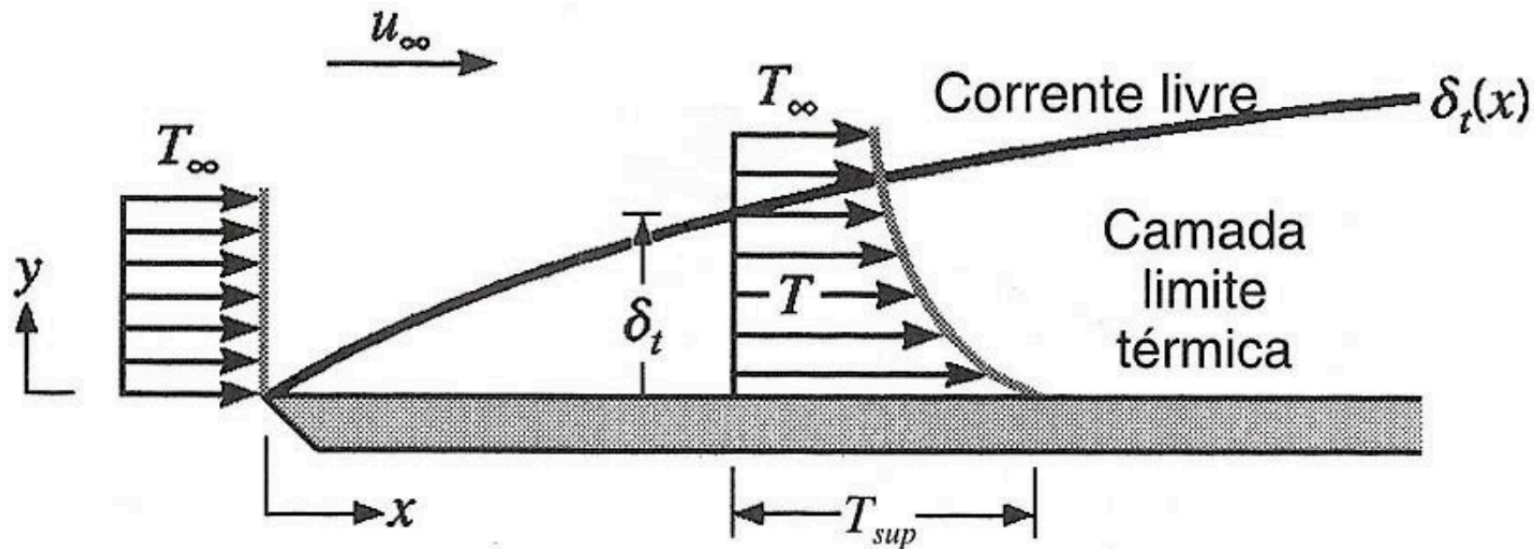


Figura 6.3: Desenvolvimento da camada limite térmica sobre uma Placa plana

6.2.2 A Camada Limite Térmica (*continuação*)

- A influência da parede se propaga até uma altura $y = \delta_t$ onde:

$$\frac{(T_{sup} - T)}{(T_{sup} - T_{\infty})} = 0.99 \quad (6.9)$$

- Com o afastamento em relação ao bordo de ataque, $\delta_t(x)$ cresce.
- Relação entre a camada limite e o coeficiente de T. C. por convecção h :

6.2.2 A Camada Limite Térmica (*continuação*)

- Junto à parede a velocidade é zero e então a T. C. é por condução. Vale a Lei de Fourier:

$$q''_{sup} = -k_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (6.10)$$

combinando com a lei de resfriamento de Newton (6.1) tem-se:

$$h = \frac{-k_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{T_{sup} - T_{\infty}} \quad (6.11)$$

6.2.2 A Camada Limite Térmica (*continuação*)

- As condições no interior da C. L. Térmica influenciam a transferência de calor.
- Como $(T_{sup} - T_{\infty})$ independe de x e como $\delta_t(x)$ cresce com x , os gradientes de temperatura devem diminuir com x .
- $\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$ diminui com x e então $h(x)$ e $q''(x)$ também.

Resumo:

C.L. Hidrodinâmica $\rightarrow C_f \rightarrow$ atrito

C.L. Térmica $\rightarrow h \rightarrow$ Transf. de calor

6.3 Escoamento Laminar e Turbulento

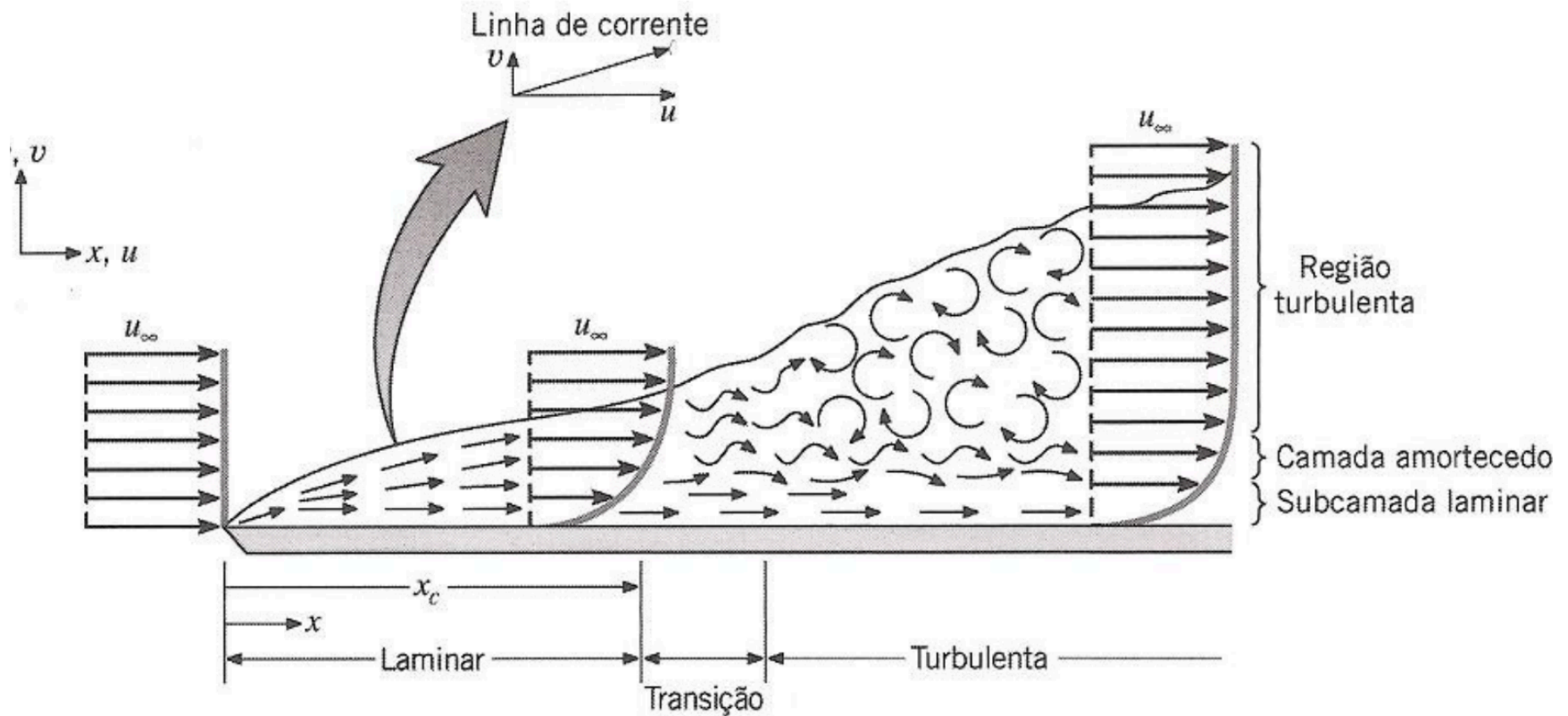


Figura 6.4: Desenvolvimento da camada limite fluidodinâmica sobre uma Placa plana

6.3 Escoamento Laminar e Turbulento (*continuação*)

- Escoamento Laminar
 - Linhas de corrente ordenadas;
 - Transporte 'vertical' somente devido ao transporte molecular;
 - Velocidade v aparece pela conservação da massa e é responsável pelo espessamento da C. L.

6.3 Escoamento Laminar e Turbulento (*continuação*)

- Escoamento Turbulento
 - Escoamento altamente irregular;
 - Transporte ' vertical ' devido ao transporte molecular e ao movimento macroscópico da turbulência;
 - Aumento significativo do transporte de momento, energia e massa. Implica em aumento da espessura da C. L.

6.3 Escoamento Laminar e Turbulento (*continuação*)

- Região de transição
 - Turbulência é amplificação de alguma perturbação no escoamento;
 - Região laminar amortece as perturbações;
 - A partir da região de transição, ocorre a amplificação.

6.3 Escoamento Laminar e Turbulento (continuação)

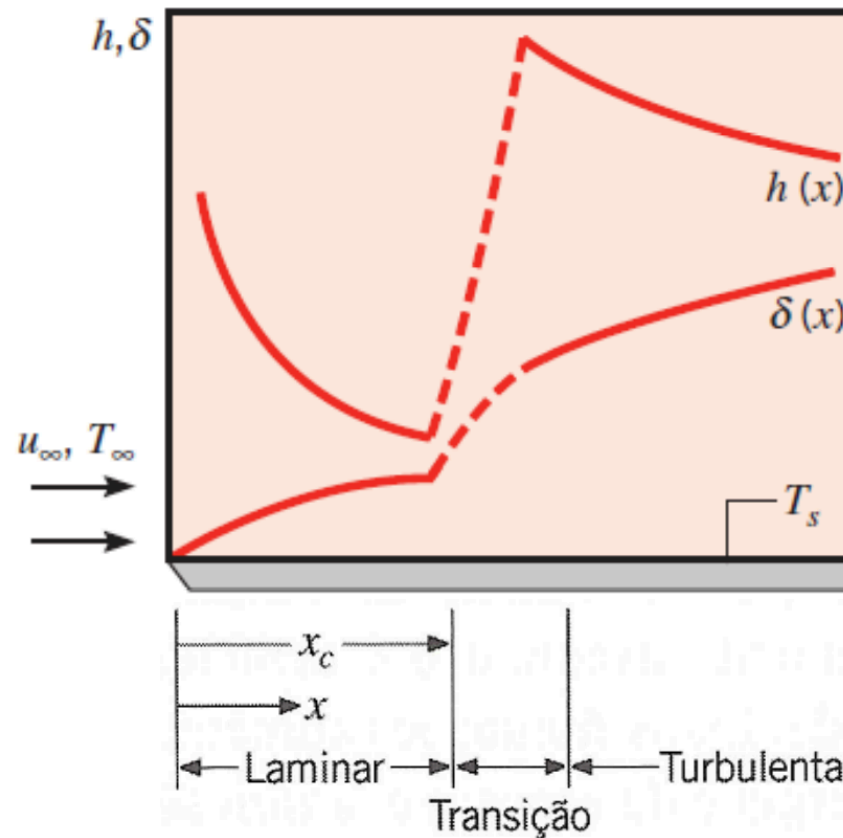


Figura 6.5: Variação da espessura da camada limite e coeficiente de convecção sobre uma placa plana isotérmica

6.3 Escoamento Laminar e Turbulento (*continuação*)

- Na C. L. completamente turbulenta observa-se:
 - Subcamada laminar;
 - Transporte molecular - perfil aproximadamente linear.
 - Camada amortecedora;
 - Transporte molecular e turbulento de mesma ordem de grandeza.
 - Região turbulenta;
 - Transporte turbulento domina o processo - perfil aproximadamente uniforme.

6.3 Escoamento Laminar e Turbulento (*continuação*)

- Adimensional que caracteriza a transição é o *Número de Reynolds*

$$Re_x \equiv \frac{\rho u_\infty x}{\mu} \quad (6.12)$$

- Para placa plana, transição se inicia, no Re_c , que corresponde ao afastamento do bordo de ataque x_c :

$$Re_c \equiv \frac{\rho u_\infty x_c}{\mu} \cong 5 \times 10^5 \quad (6.13)$$

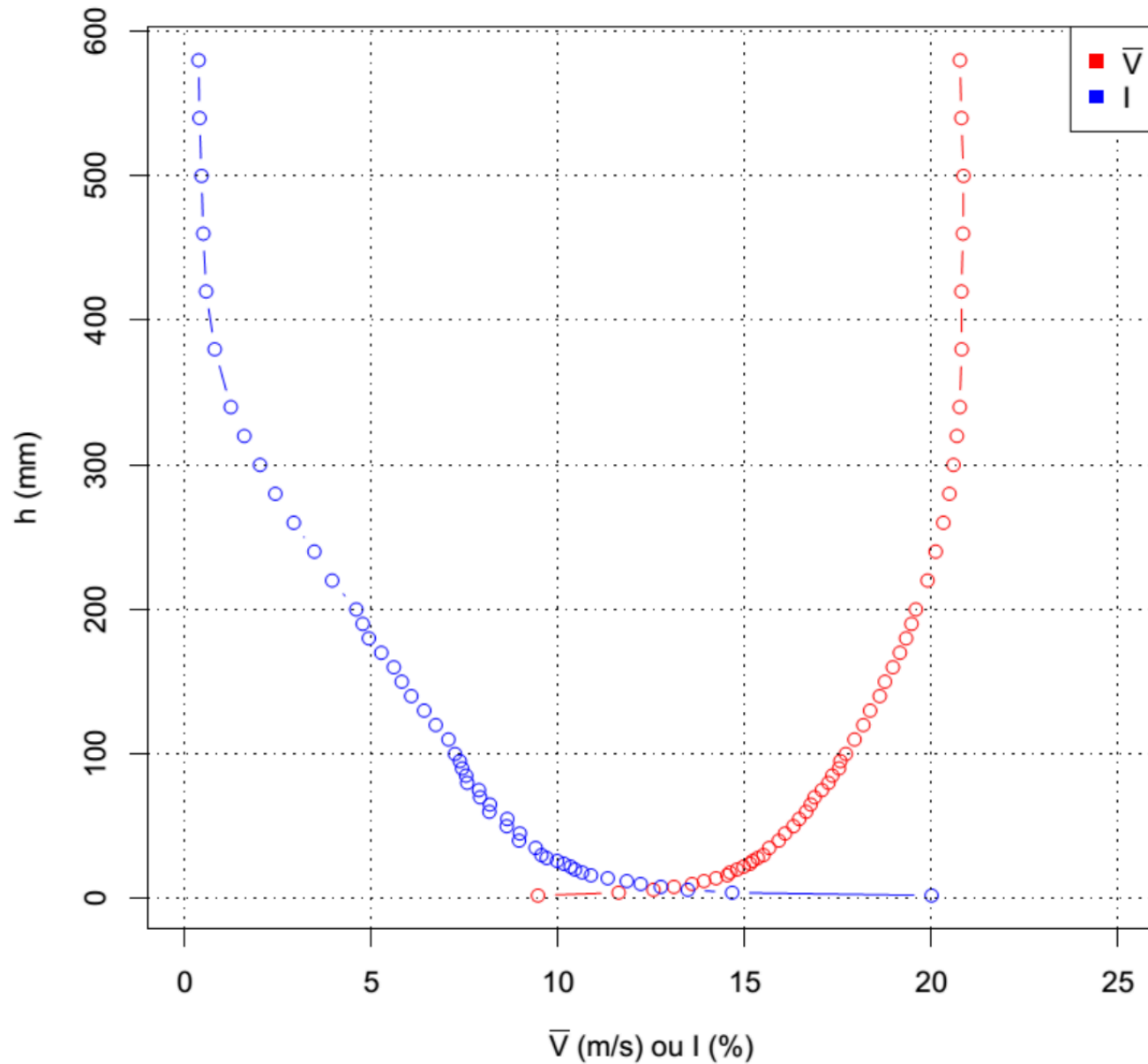


Figura 6.6: Camada Limite sobre placa plana-Velocidade e intensidade de turbulência

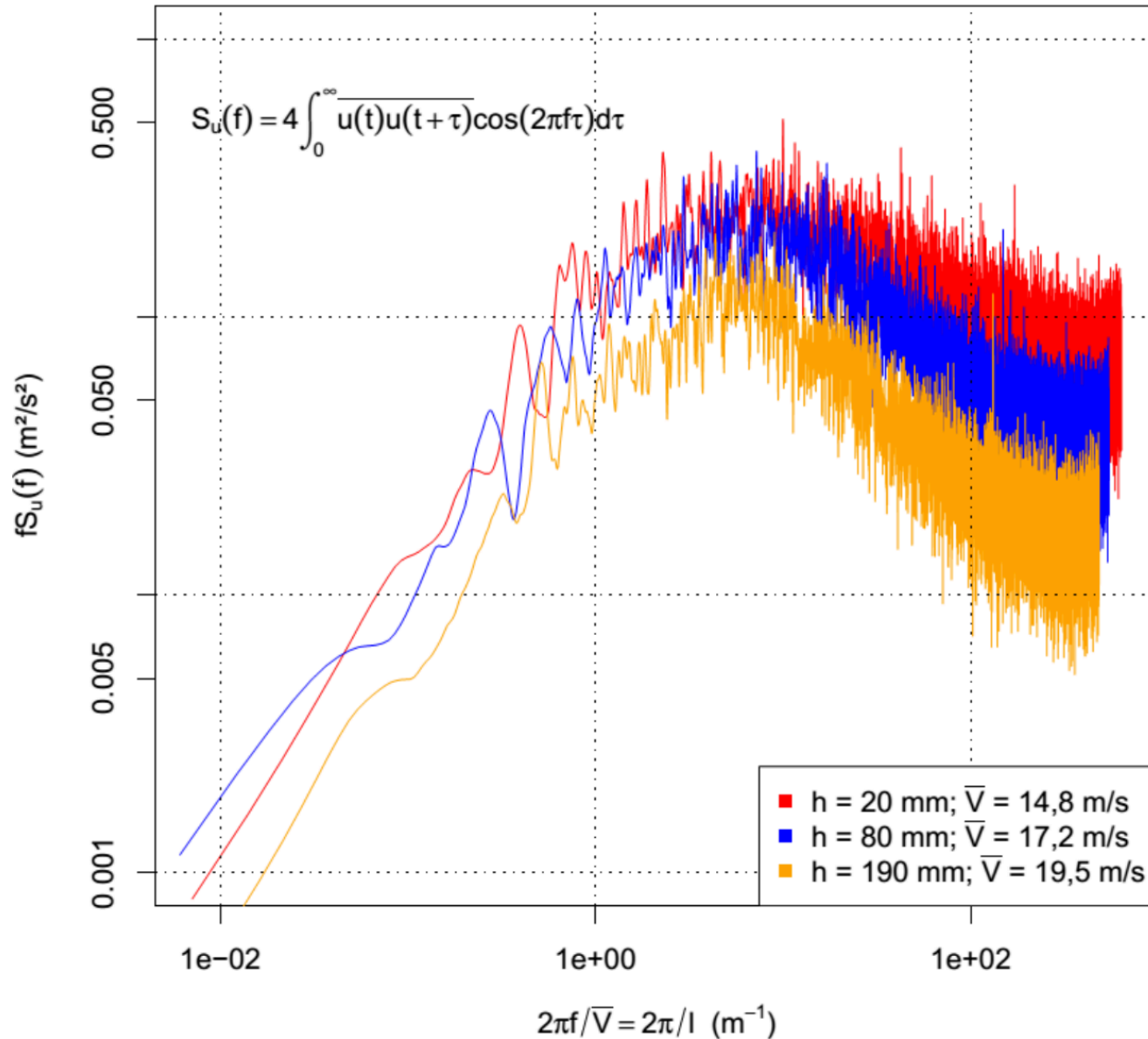


Figura 6.7: Camada limite sobre placa plana-Espectro de energia

6.4 As Equações de Transferência por convecção

Análise das eqs. de conservação de massa, quantidade de movimento e energia na C.L.

6.4.1 A Camada Limite Fluidodinâmica

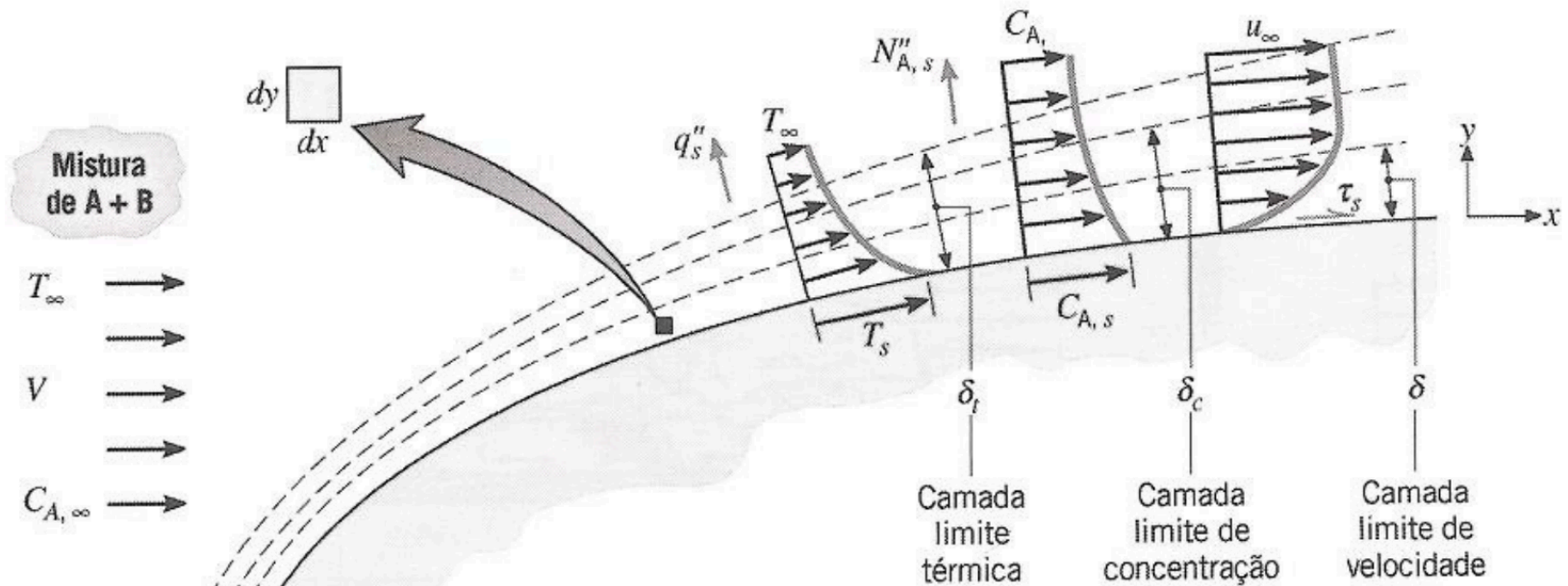


Figura 6.8: Desenvolvimento da camada limite fluidodinâmica, térmica e de concentração

6.4 As Equações de Transferência por convecção (*continuação*)

As leis de conservação podem ser formuladas para o volume de controle (V.C.) da figura. Formulação bidimensional e regime permanente.

1. Conservação de massa: *A taxa líquida de entrada de massa no V.C é nula*

- Taxa de entrada de massa na direção x :

$$\rho u \quad (6.14)$$

6.4 As Equações de Transferência por convecção (continuação)

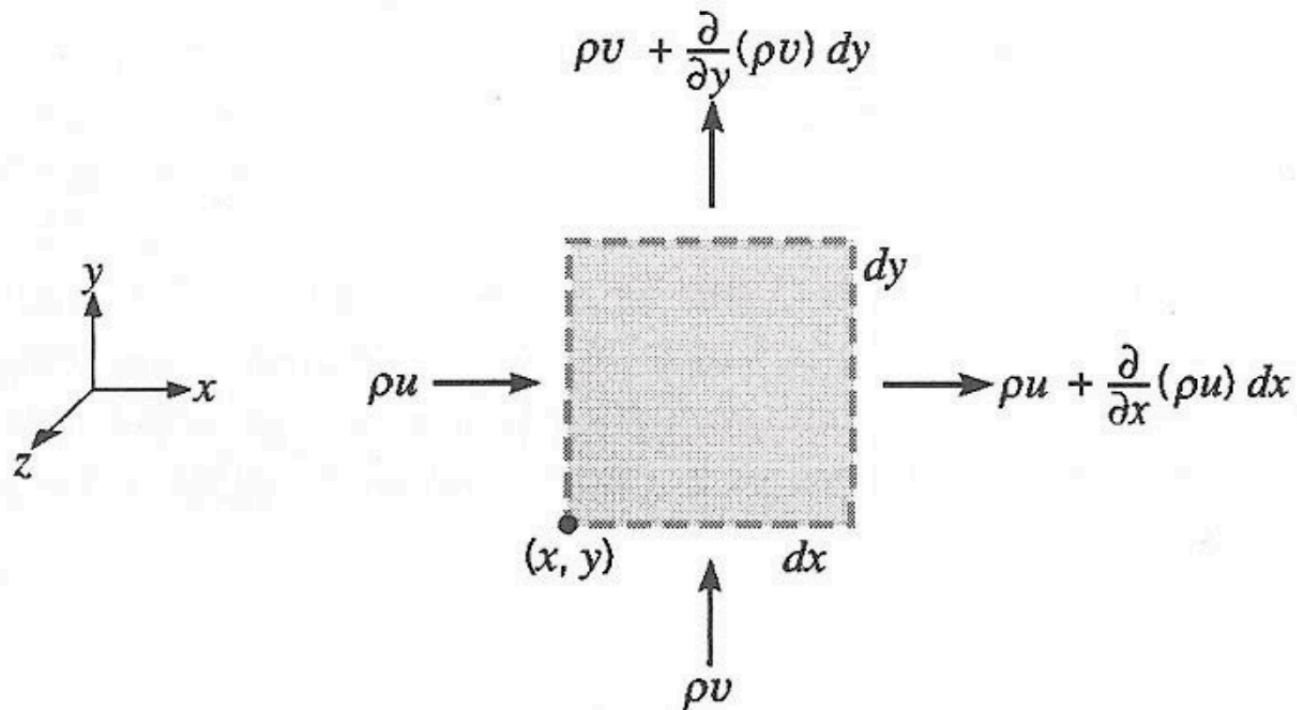


Figura 6.9: Fluxos de massa no V.C.

6.4 As Equações de Transferência por convecção (*continuação*)

- Taxa de saída de massa:

$$\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)dx \quad (6.15)$$

- Construindo expressões análogas para a direção y e somando todos os fluxos e igualando a zero tem-se:

$$(\rho u)dy + (\rho v)dx$$

$$- \left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)dx \right] dy - \left[\rho v + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)dy \right] dx = 0$$

dividindo tudo por $dx dy$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (6.16)$$

a eq. (6.16) é conhecida como *Equação da Continuidade*.

6.4 As Equações de Transferência por convecção (continuação)

2. Conservação da quantidade de movimento (2a. Lei de Newton): *A taxa líquida de saída de quantidade de movimento no V.C. é igual à resultante das forças aplicadas sobre ele.*
- Forças de corpo ou de volume
 - Proporcionais ao volume do V.C.;
 - Exemplos: campos gravitacional, elétrico, magnético etc;
 - Genericamente expressas por X ou Y em cada direção.

6.4 As Equações de Transferência por convecção (continuação)

- Forças de contato ou de superfície.
 - Proporcionais à área do V.C.;
 - Exemplos: Pressão estática e tensões viscosas;
 - Decomposição das tensões viscosas: σ_{ii} - tensões normais e τ_{ij} - tensões de cisalhamento.
 - Primeiro índice: indica a direção da normal da face. Segundo índice: indica a direção da atuação da força;
 - A normal é sempre orientada para fora do V.C.;
 - Todos os componentes, na figura, são positivos, pois estão na mesma direção da normal;
 - Tensões viscosas normais - **TRAÇÃO**;

6.4 As Equações de Transferência por convecção (continuação)

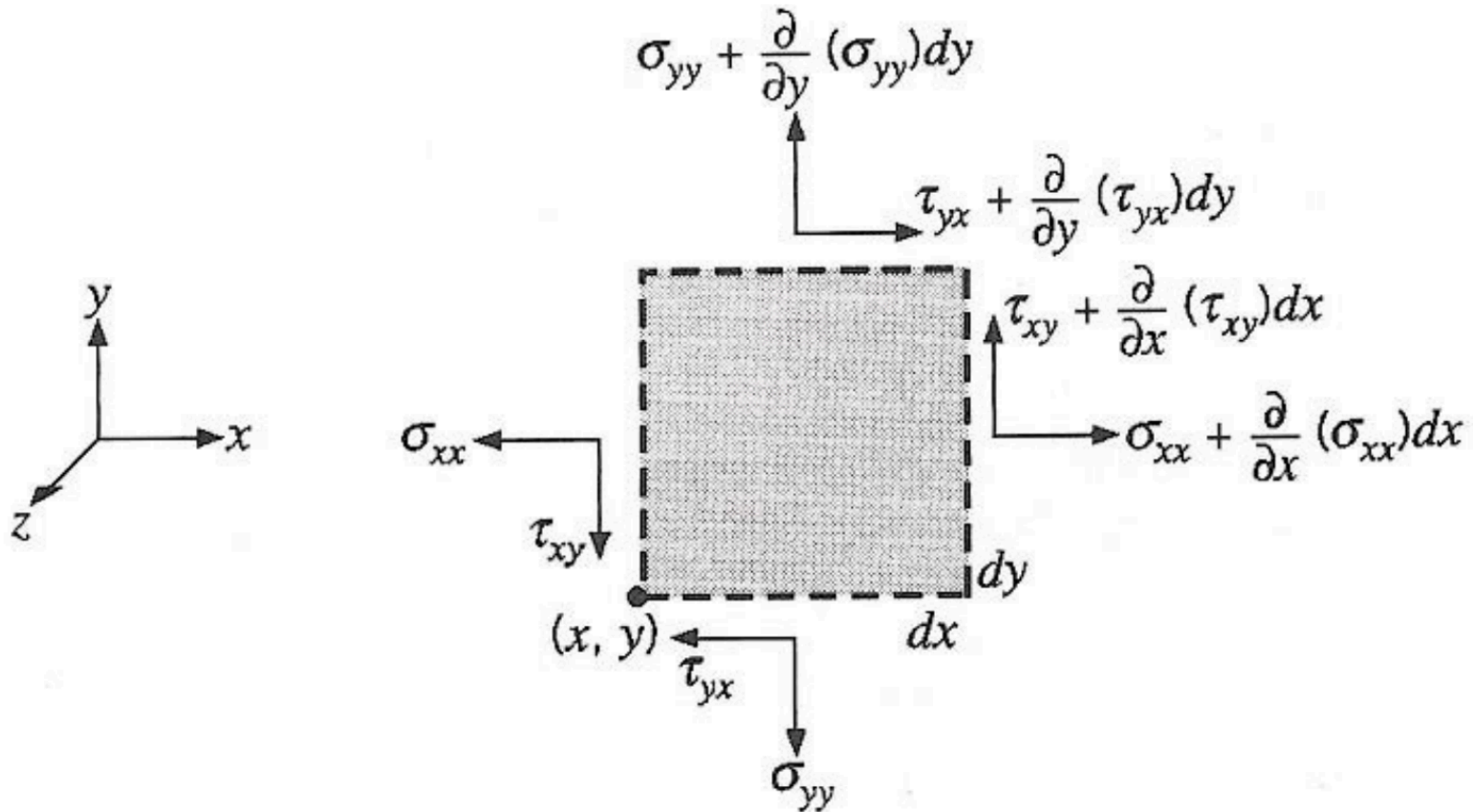


Figura 6.10: Tensões viscosas normais e cisalhantes no V.C.

6.4 As Equações de Transferência por convecção (continuação)

- Pressão estática - COMPRESSÃO.
- Resultante das forças em x e em y

$$F_{sup,x} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dx dy \quad (6.17)$$

$$F_{sup,y} = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) dx dy \quad (6.18)$$

- Fluxos de quantidade de movimento
- Taxa líquida de saída de quantidade de movimento na direção x :

$$\frac{\partial(\rho u)u}{\partial x} dx dy + \frac{\partial(\rho v)u}{\partial y} dx dy \quad (6.19)$$

6.4 As Equações de Transferência por convecção (continuação)

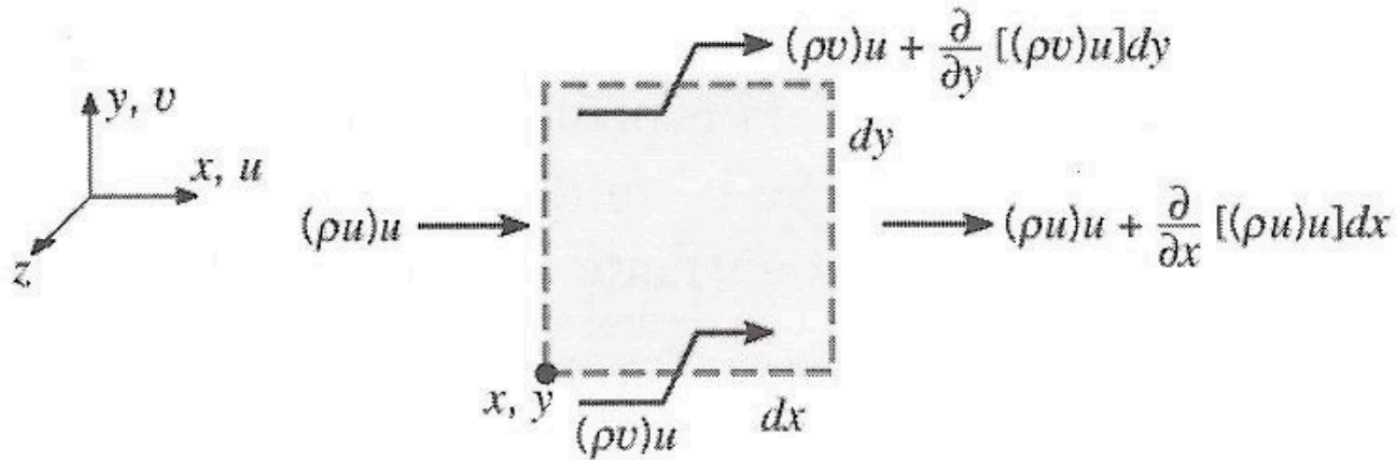


Figura 6.11: Fluxos de quantidade de movimento no V.C.

- Igualando-se a taxa líquida de saída à resultante das forças externas na direção x (2a. Lei de Newton):

$$\frac{\partial(\rho u)u}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)u}{\partial y} = \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + X \quad (6.20)$$

6.4 As Equações de Transferência por convecção (continuação)

utilizando-se a eq. da continuidade pode-se escrever:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial(\sigma_{xx} - p)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X \quad (6.21)$$

- Analogamente para a direção y :

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{yy} - p)}{\partial y} + Y \quad (6.22)$$

6.4 As Equações de Transferência por convecção (continuação)

- Lado esquerdo: taxa líquida de saída de quantidade de movimento; Lado direito: Forças externas de pressão e viscosas.
- Especificação das tensões viscosas:

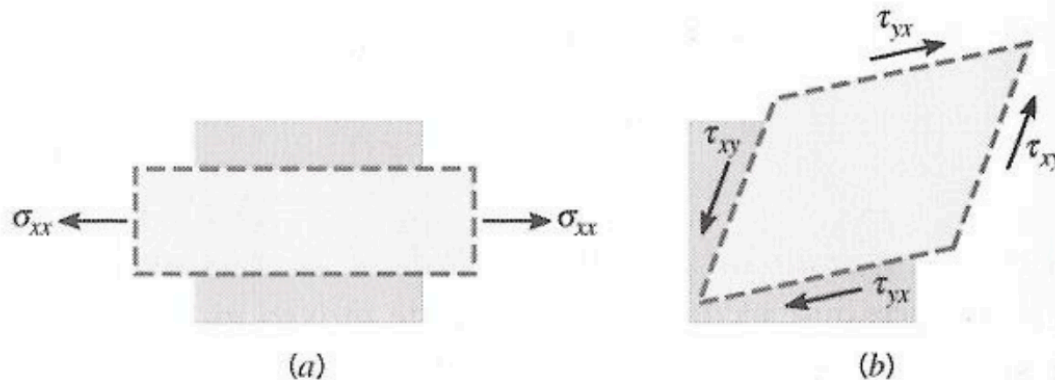


Figura 6.12: Deformação linear e angular no V.C.

6.4 As Equações de Transferência por convecção (*continuação*)

- Tensões normais - deformação linear;
- Tensões de cisalhamento - deformação angular;
- Magnitude da tensão é proporcional à taxa de deformação;
- *Fluidos Newtonianos*: tensões proporcionais aos gradientes de velocidade:

6.4 As Equações de Transferência por convecção (continuação)

$$\sigma_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (6.23)$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (6.24)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (6.25)$$

6.4 As Equações de Transferência por convecção (continuação)

substituindo as eqs de conservação quantidade de movimento em x (6.21) e y (6.22):

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = & \\ & - \frac{\partial p}{\partial x} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + X \end{aligned} \tag{6.26}$$

6.4 As Equações de Transferência por convecção (continuação)

e em y

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = & \\ & - \frac{\partial p}{\partial y} \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + Y \end{aligned} \tag{6.27}$$

6.4 As Equações de Transferência por convecção (continuação)

3. Conservação da Energia - Camada limite térmica

- 1a. Lei da Termodinâmica para V.C. em regime permanente:

$$\dot{E}_e - \dot{E}_s + \dot{E}_g = 0 \quad (6.28)$$

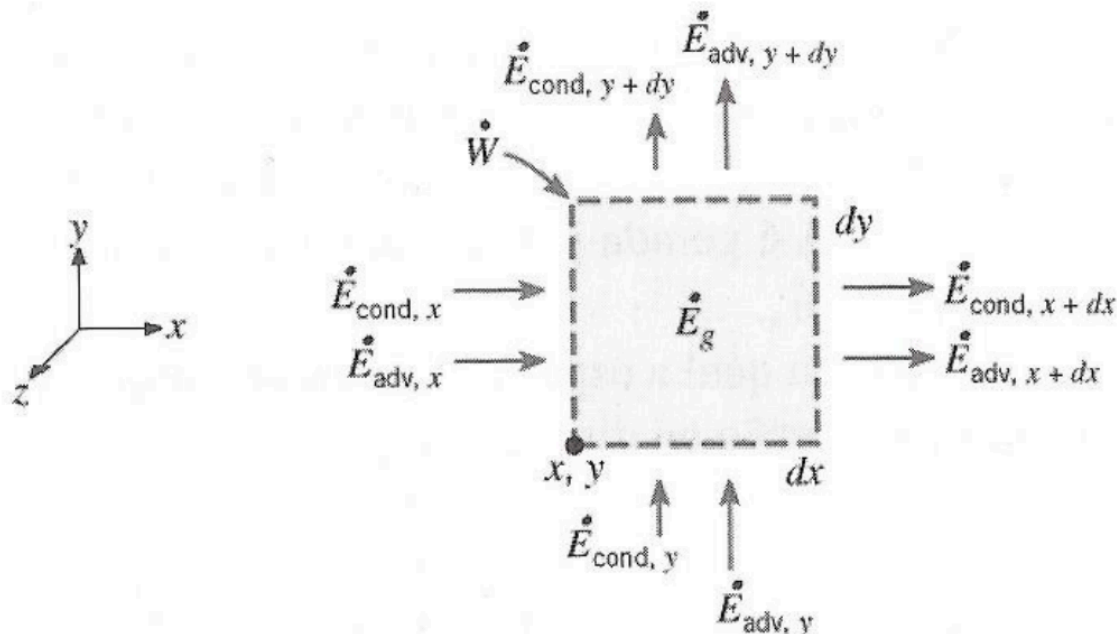


Figura 6.13: Conservação da energia no V.C.

6.4 As Equações de Transferência por convecção (*continuação*)

- A energia específica do fluido, de interesse para T.C., é a soma da interna e e cinética $V^2 = (u^2 + v^2)$:

$$\text{energia} \equiv e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) = e + \frac{V^2}{2} \quad (6.29)$$

- Energia pode ser trocada no V.C. por:
 - (a) Movimento macroscópico do fluido na fronteira - *Advecção*.
 - (b) Calor devido a movimento molecular - *Condução* e *Difusão* se houver diferentes espécies.
 - (c) Trabalho das forças externas na fronteira.
- Balanço de Advecção na direção x :

6.4 As Equações de Transferência por convecção (continuação)

$$\begin{aligned}\dot{E}_{adv,x} - \dot{E}_{adv,x+dx} &= \rho u \left(e + \frac{V^2}{2} \right) dy \\ &- \left[\rho u \left(e + \frac{V^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] dx \right] dy \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] dx dy\end{aligned}\tag{6.30}$$

- Balanço de Condução na direção x :

$$\begin{aligned}\dot{E}_{cond,x} - \dot{E}_{cond,x+dx} &= \\ &- \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dy - \left[-k \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] dy \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy\end{aligned}\tag{6.31}$$

6.4 As Equações de Transferência por convecção (continuação)

- Trabalho das Forças externas na fronteira do V.C.

- Trabalho: $W = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{x}$, onde \vec{F}_{ext} é uma força externa que atua na fronteira do V.C. e \vec{x} é o deslocamento da fronteira.

- Taxa de Trabalho: $\dot{W} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{u}$.

- Taxa de Trabalho líquido das forças normais - pressão p e tensão viscosa normal σ_{ii} :

$$\dot{W}_{normal,x} = \frac{\partial}{\partial x} [(\sigma_{xx} - p)u] dx dy \quad (6.32)$$

6.4 As Equações de Transferência por convecção (continuação)

- Taxa de Trabalho líquido das forças de cisalhamento - tensão viscosa τ_{yx} :

$$\dot{W}_{ciz,x} = \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}u) dx dy \quad (6.33)$$

- Taxa de Trabalho das forças de corpo X :

$$\dot{W}_{corpo,x} = (Xu) dx dy \quad (6.34)$$

- Taxa de trabalho líquido no V.C. devido às forças externas em x :

$$\begin{aligned} \dot{W}_{liq,x} &= \dot{W}_{normal,x} + \dot{W}_{ciz,x} + \dot{W}_{corpo,x} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x}[(\sigma_{xx} - p)u] + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}u) + (Xu) \right] dx dy \end{aligned} \quad (6.35)$$

6.4 As Equações de Transferência por convecção (*continuação*)

- Expressões análogas são obtidas para a direção y .
- Somando-se os fluxos de advecção (6.30), condução (6.31), trabalho líquido nas direções x (6.35) e y , a parcela de conversão interna de energia \dot{q} e aplicando a conservação da energia (6.28) obtém-se:

6.4 As Equações de Transferência por convecção (continuação)

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho v \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ & + (Xu + Yv) - \frac{\partial}{\partial x}(pu) - \frac{\partial}{\partial y}(pv) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx}u + \tau_{xy}v) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}u + \sigma_{yy}v) + \dot{q} = 0 \end{aligned} \tag{6.36}$$

6.4 As Equações de Transferência por convecção (*continuação*)

- A eq. da energia interna é mais útil;
- A equação da energia cinética é obtida multiplicando-se as eqs. de momento (6.26) e (6.27) por u e v respectivamente e somando-as.
- Subtraindo-se a equação da energia cinética da equação da energia (6.36) obtém-se:

6.4 As Equações de Transferência por convecção (continuação)

$$\begin{aligned} & \rho u \frac{\partial e}{\partial x} + \rho v \frac{\partial e}{\partial y} = \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ & - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \Phi + \dot{q} \end{aligned} \tag{6.37}$$

onde o termo $p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$ representa a conversão reversível de energia interna em cinética

6.4 As Equações de Transferência por convecção (*continuação*)

e a função de *dissipação viscosa*, que é irreversível, é expressa por:

$$\mu\Phi \equiv \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (6.38)$$

- Primeiro termo - tensões de cisalhamento; demais termos - tensões viscosas normais
- Equação da energia na forma de entalpia (*i*):

$$i \equiv e + \frac{p}{\rho} \quad (6.39)$$

6.4 As Equações de Transferência por convecção (*continuação*)

com a utilização da equação da continuidade, a eq. da energia (6.37) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial i}{\partial y} = & + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ & - \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \mu \Phi + \dot{q} \end{aligned} \quad (6.40)$$

6.4 As Equações de Transferência por convecção (continuação)

- Para gás ideal vale $di = c_p dT$ e então a eq. da energia é:

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ &- \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \mu \Phi + \dot{q} \end{aligned} \quad (6.41)$$

6.4 As Equações de Transferência por convecção (continuação)

- Fluido incompressível, a eq. continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.42)$$

e $c_v = c_p$. A eq. energia (6.37):

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \Phi + \dot{q} \quad (6.43)$$

6.5 Aproximações e Condições Especiais

Aproximações gerais:

- Fluido incompressível $\rho = cte$;
- Propriedades físicas constantes $k, \mu, c_p, etc.$;
- Forças de corpo desprezíveis $X = Y = 0$;
- Sem conversão interna de energia $\dot{q} = 0$.

Aproximações de Camada Limite, devidas à sua pequena espessura $\delta \ll L$:

- $u \gg v$;
- $\frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$;
- $\frac{\partial T}{\partial y} \gg \frac{\partial T}{\partial x}$

6.5 Aproximações e Condições Especiais (*continuação*)

Estas aproximações aplicadas às eqs. da *continuidade* (6.16), da *quantidade de movimento* (6.21) e (6.22) e da *energia* (6.43) obtém-se:

- Continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.44)$$

- Quantidade de movimento em x :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6.45)$$

6.5 Aproximações e Condições Especiais (*continuação*)

- Quantidade de movimento em y :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (6.46)$$

- A pressão não varia na direção normal à parede;
- Dentro da C. L. a pressão só varia com x e é igual à pressão fora da C.L.
- $p(x)$ fora da C. L. depende da geometria da superfície e é obita de análise separada (escoamento potencial).

6.5 Aproximações e Condições Especiais (*continuação*)

- Energia:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (6.47)$$

o último termo só é significativo em fluidos de alta viscosidade cinemática (óleos) em alta velocidade ou em escoamento sônicos.

- A solução das eqs. da C.L fornecem os campos $u(x, y)$, $v(x, y)$, $T(x, y)$ na região da C.L.
- Para alguns casos existem soluções analíticas. Maior aplicação são técnicas numéricas.
- Pode-se identificar os parâmetros de similaridade e analogias entre as C.L. fluidodinâmica, térmica e de concentrações.

6.6 Similaridade na Camada Limite

- Semelhança entre as eqs. - solução única ou similar;
- Aplicação em geometrias similares.

6.6.1 Parâmetros de Similaridade na C.L.

Variáveis adimensionais:

- Comprimento: $x^* \equiv \frac{x}{L}$ e $y^* \equiv \frac{y}{L}$, onde L é um *comprimento característico*;
- Velocidades: $u^* \equiv \frac{u}{V}$ e $v^* \equiv \frac{v}{V}$; onde V é a velocidade a montante da superfície;
- Temperatura: $T^* \equiv \frac{T - T_{sup}}{T_{\infty} - T_{sup}}$;

6.6.1 Parâmetros de Similaridade na C.L. (*continuação*)

- Pressão: $P^* \equiv \frac{p}{\rho V^2}$
- Número de Reynolds: $Re \equiv \frac{VL}{\nu}$;
- Número de Prandtl: $Pr \equiv \frac{\nu}{\alpha}$

Substituindo-se as variáveis adimensionais e suas derivadas nas eqs. de C.L. (6.44, 6.45 e 6.47), desprezando-se a contribuição da função dissipação obtém-se:

- Continuidade

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (6.48)$$

6.6.1 Parâmetros de Similaridade na C.L. (continuação)

- Quantidade de movimento em x :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (6.49)$$

- Energia:

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re_L Pr} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \quad (6.50)$$

6.6.2 Forma Funcional das Soluções

A dependência funcional das soluções pode ser vista nas equações adimensionais.

- Velocidade:

$$u^* = f_1 \left(x^*, y^*, Re_L, \frac{dp^*}{dx^*} \right) \quad (6.51)$$

- A pressão e o gradiente só dependem do escoamento fora da C.L.

- Tensão de cisalhamento:

$$\tau_{sup} = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \left(\frac{\mu V}{L} \right) \left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} \quad (6.52)$$

- Coeficiente de atrito:

$$C_f \equiv \frac{\tau_{sup}}{\rho V^2 / 2} = \frac{\mu V}{L \rho V^2 / 2} \left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = \frac{2}{Re_L} \left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} \quad (6.53)$$

6.6.2 Forma Funcional das Soluções (*continuação*)

mas

$$\left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = f_2 \left(x^*, Re_L, \frac{dp^*}{dx^*} \right) \quad (6.54)$$

para uma *dada geometria* $\frac{dp^*}{dx^*}$ é próprio do problema e então

$$C_f = \frac{2}{Re_L} f_2(x^*, Re_L) \quad (6.55)$$

determina-se a função f_2 analítica ou experimentalmente.

- Temperatura

$$T^* = f_3 \left(x^*, y^*, Re_L, Pr, \frac{dp^*}{dx^*} \right) \quad (6.56)$$

da definição de h e de T^* :

6.6.2 Forma Funcional das Soluções (*continuação*)

$$\begin{aligned} h &= \frac{-k_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{T_{sup} - T_{\infty}} = -\frac{k_f (T_{\infty} - T_{sup})}{L (T_{sup} - T_{\infty})} \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} \\ &= \frac{k_f}{L} \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} \end{aligned} \quad (6.57)$$

define-se o *Número de Nusselt* (Nu):

$$Nu \equiv \frac{hL}{k_f} = \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} \quad (6.58)$$

então a função f_3 simplifica-se, para uma *dada geometria* para:

$$Nu = f_4(x^*, Re_L, Pr) \quad (6.59)$$

6.6.2 Forma Funcional das Soluções (*continuação*)

- Valor médio para uma dada superfície:

$$\overline{Nu} = f_5(Re_L, Pr) \quad (6.60)$$

procura-se a função f_5 analítica ou experimentalmente parametrizada por Re_L e Pr .

O coeficiente médio de T.C. é calculado por:

$$\bar{h} = \frac{\overline{Nu} k_f}{L} \quad (6.61)$$

6.6.3 Analogia de Reynolds

Para um problema (ou geometria) onde $\frac{dp^*}{dx^*} = 0$ e $Pr = 1$, as C. L. fluidodinâmica e térmica têm a mesma solução. Veja tabela. Assim vale:

$$f_1 = f_3 \quad (6.62)$$

então pode-se escrever:

$$C_f \frac{Re_L}{2} = Nu \quad (6.63)$$

6.6.3 Analogia de Reynolds (*continuação*)

define-se o *Número de Stanton* como:

$$St \equiv \frac{h}{\rho V c_p} = \frac{Nu}{RePr} \quad (6.64)$$

e a eq. (6.63) torna-se:

$$\frac{C_f}{2} = St \quad (6.65)$$

6.6.3 Analogia de Reynolds (*continuação*)

- Esta equação é a *Analogia de Reynolds*.
- Ela permite, a partir do coeficiente de atrito (fácil de medir), calcular o coeficiente de T.C.
- Verifica-se experimentalmente que a analogia vale também para $Pr \neq 1$ e geometrias onde $\frac{dp^*}{dx^*} \neq 0$.
Analogia de Reynolds Modificada:

$$\frac{C_f}{2} = St Pr^{2/3} \quad (6.66)$$

Tabela 6.1: Equações da camada limite e suas C.C na direção y na forma adimensional

<i>Camada Limite</i>	Equação de Conservação	Condições de Contorno		Parâmetro(s) de Similaridade
		Parede	Corrente Livre	
Fluidodinâmica (velocidade)	$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{dp^*}{dx^*} + \frac{\nu}{VL} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$ (6.63)	$u^*(x^*, 0) = 0$ $v^*(x^*, 0) = 0$	$u^*(x^*, \infty) = \frac{u_\infty(x^*)}{V}$ (6.66)	Re_l
Térmica	$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{\alpha}{VL} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$ (6.64)	$T^*(x^*, 0) = 0$	$T^*(x^*, \infty) = 1$ (6.67)	Re_l, Pr
Concentração	$u^* \frac{\partial C_\Lambda^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial C_\Lambda^*}{\partial y^*} = \frac{D_{\Lambda B}}{VL} \frac{\partial^2 C_\Lambda^*}{\partial y^{*2}}$ (6.65)	$C_\Lambda^*(x^*, 0) = 0$	$C_\Lambda^*(x^*, \infty) = 1$ (6.68)	Re_l, Sc