Capítulo 2

PME2360 - TRANSFERÊNCIA DE CALOR

PROF. DR. GUENTHER CARLOS KRIEGER FILHO

guenther@usp.br

INTRODUÇÃO À CONDUÇÃO

- ***Condução:***

- Transferência de energia devida a um gradiente de temperatura no meio;

- Mecanismo físico: Atividade atômica ou molecular - difusão de energia.

2.1 A Equação da Taxa de Condução

- ***Lei de Fourier:***

- Generalização de evidencias experimentais;

- Não se deduz de princípios fundamentais.

Experiência

- Regime permanente;
- Cilindro isolado e submetido a ∇T como apresentado na Fig. 2.1
- Mede-se a taxa de transferência de calor na direção x, q_x $(J/s = W)$

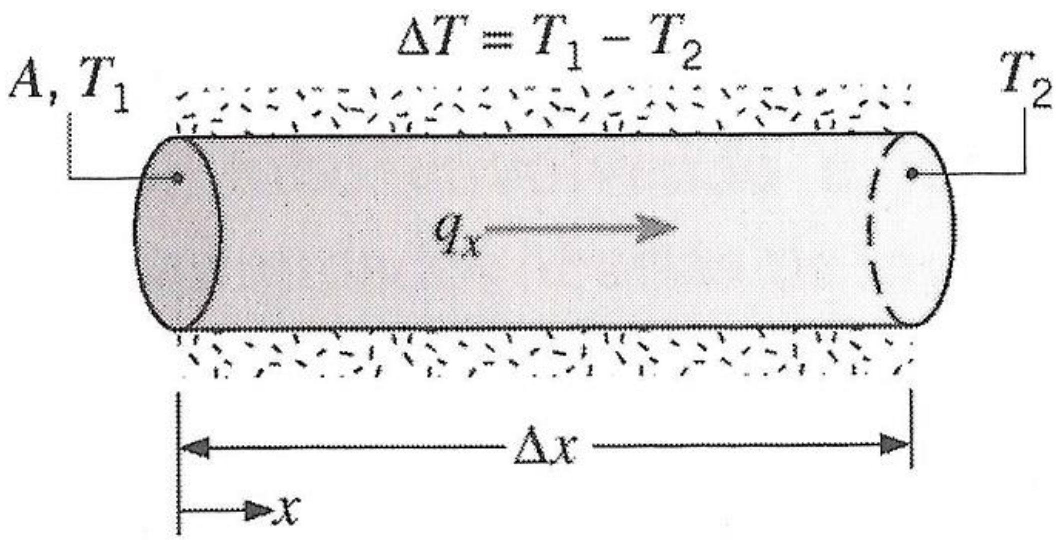

Figura 2.1: Condução de calor numa barra cilíndrica

-Variação dos parâmetros: ∇T, A e Δx:

- ∇T e Δx constantes: $q_x \propto A$ - $A \uparrow, q_x \uparrow$

- ∇T e A constantes: $q_x \propto \frac{1}{\Delta x}$ - $\Delta x \uparrow, q_x \downarrow$

- A e Δx constantes: $q_x \propto \Delta T$ - $\Delta T \uparrow, q_x \uparrow$

$$q_x \propto A\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

-Refazendo-se o experimento para outros materiais, mantendo-se as combinações de ∇T, A e Δx:

- A dependência paramétrica continua válida;
- Os valores de q_x, entretanto, mudam em função do material;

então:

$$q_x = -kA\frac{\Delta T}{\Delta x}, \qquad (2.1)$$

- k é a *Condutibilidade Térmica do Material* (W/m.K)
- Sinal negativo vem da 2a. Lei: Fluxo de Energia (calor) da maior para menor temperatura e $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ negativo no sentido positivo de x

Escrevendo a expressão para o limite quando

$\Delta x \rightarrow 0$ tem-se:

$$q_x = -kA\frac{dT}{dx} \tag{2.2}$$

Fluxo de calor na direção x:

$$q_x^{``} = \frac{q_x}{A} = -k\frac{dT}{dx} \tag{2.3}$$

- grandeza vetorial - $\frac{dT}{dx}$, A

- normal à área de temperatura constante (superfície isotérmica)
- fluxo conforme a 2a Lei:

$$\frac{dT}{dx} \text{ - negativo; fluxo no sentido positivo de } x$$

- Geralizando-se a Lei de Fourier:

$$\vec{q}'' = -k\nabla T = -k\left(\vec{i}\frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial T}{\partial z}\right), \quad (2.4)$$

• Onde:

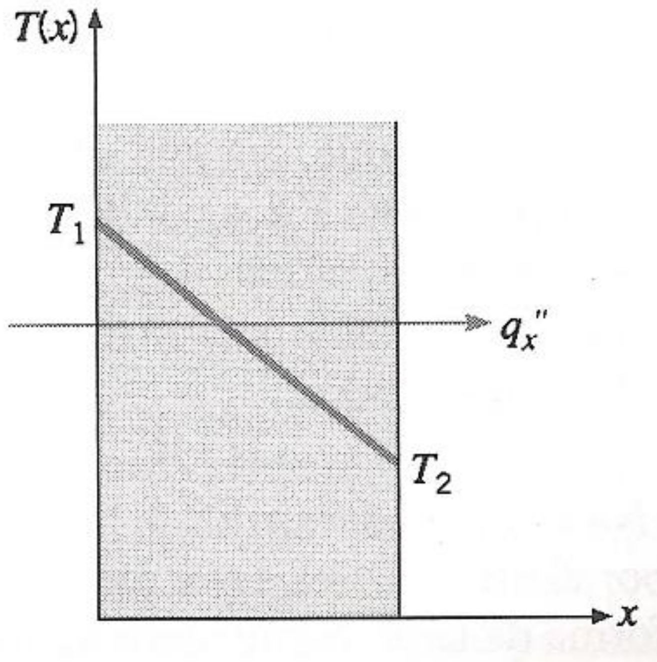

Figura 2.2: Fluxo de calor unidimensional

- ∇ -operador del ou nabla;

- $T(x, y, z)$ - campo escalar de temperatura;

- k - condutibilidade térmica isotrópica e independente da temperatura

RESUMO DA LEI DE FOURIER

- Generalização de observações experimentais;

- Define a propriedade *Condutibilidade Térmica*;

- Expressão vetorial: o fluxo de calor é normal à superfície isotérmica e no sentido de T decrescente;

- Aplica-se a todos os estados da matéria.

2.1.1 Propriedades Térmicas da Matéria

-Condutibilidade Térmica (k):

$$k \equiv -\frac{q_x^{''}}{(\partial T/\partial x)} \tag{2.5}$$

- propriedade de transporte;
- fenômeno físico: Atividade Atômica e Molecular;
- em geral: $k_{sol} > k_{liq} > k_{gas}$

2.1.1 Propriedades Térmicas da Matéria

-Difusividade Térmica (α $[m^2/s]$)

$$\alpha \equiv \frac{\text{conduzir energia térmica}}{\text{acumular energia térmica}} = \frac{k}{\rho c_p} \qquad (2.6)$$

2.1.2 Equação da Difusão de Calor

Objetivos:

- Quantificar o fenômeno da T.C.;
- Distribuição de temperatura no corpo;
- Considerações do material: resistência; durabilidade, processos, etc.

Hipóteses:

- meio homogêneo;
- só transferência de energia por calor;

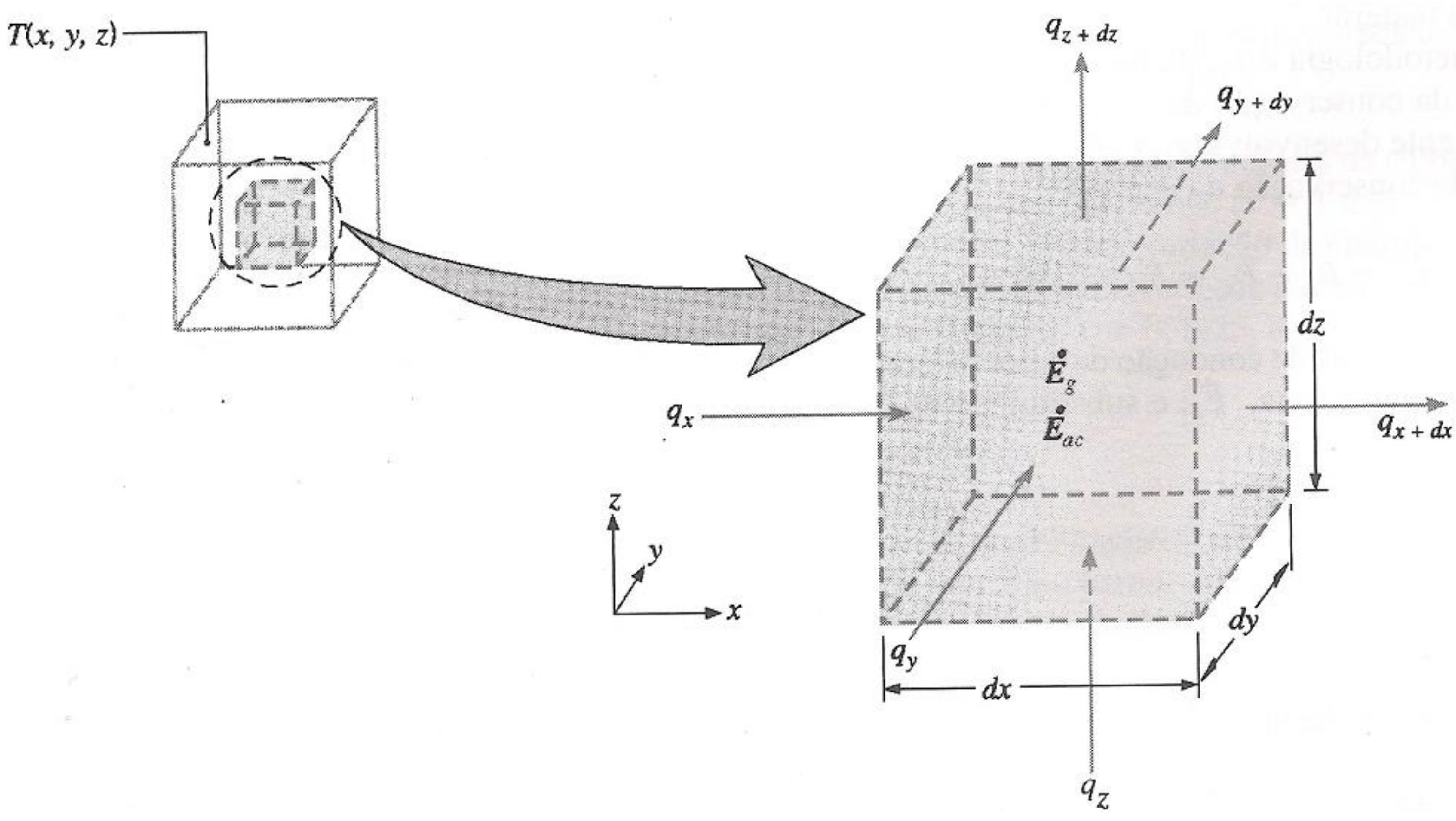

Figura 2.3: Volume de Controle em Coordenadas Cartesianas

- As taxas de condução nas superfícies $x + dx$, $y + dy$ e $z + dz$ podem ser expressas por expansão em série de Taylor:

$$
\begin{aligned}
q_{x+dx} &= q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \\
q_{y+dy} &= q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \\
q_{z+dz} &= q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

- Se houver fonte ou sorvedouro de energia no V.C.:

$$
\dot{E}_g = \dot{q}\, dx dy dz \tag{2.8}
$$

onde $\dot{q}$ é a taxa de geração por unidade de volume (W/m^3)

- Energia acumulada no V.C.:

$$\dot{E}_{ac} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz \tag{2.9}$$

- 1a. Lei da Termodinâmica para o V.C.:

$$\dot{Q} - \underbrace{\dot{W}}_{=0} = \frac{\partial U}{\partial t} \tag{2.10}$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial U}{\partial t} \tag{2.11}$$

Fazendo-se o balanço das taxas de condução na faces e substituindo em 2.11 tem-se:

$$
\begin{aligned}
&(q_x + q_y + q_z)_{in} \qquad - \\
&(q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz})_{out} + \dot{E}_g = \dot{E}_{ac}
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

substituindo as expressões 2.7, 2.8 e 2.9 na eq. 2.12:

$$
\begin{aligned}
&(q_x + q_y + q_z)_{in} - \\
&\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx + q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y}dy + q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z}dz\right)_{out} + \\
&\dot{q}dxdydz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

ou então:

$$
\begin{aligned}
&- \left(\frac{\partial q_x}{\partial x}dx + \frac{\partial q_y}{\partial y}dy + \frac{\partial q_z}{\partial z}dz\right) \\
&+ \dot{q}dxdydz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

- Utilizando-se a Lei de Fourier 2.4 para as taxas q_x, q_y, q_z tem-se:

$$
\begin{aligned}
&- \frac{\partial}{\partial x}\left(-kdydz\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx \\
&- \frac{\partial}{\partial y}\left(-kdxdz\frac{\partial T}{\partial y}\right)dy \\
&- \frac{\partial}{\partial z}\left(-kdxdy\frac{\partial T}{\partial z}\right)dz \\
&+ \dot{q}dxdydz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}dxdydz
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

divide-se toda a expressão pelo volume $dxdydz$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right)+\dot{q}=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.16}$$

$$\boxed{\text{EQUAÇÃO GERAL DA DIFUSÃO (CONDUÇÃO) DE CALOR}}$$

Em notação simbólica:

$$\underbrace{\nabla \cdot (k \nabla T)}_{I} + \underbrace{\dot{q}}_{II} = \underbrace{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}}_{III} \qquad (2.17)$$

- *em palavras:* A taxa (III) de variação temporal da energia interna dentro do V.C. é igual à taxa líquida (I) de condução de calor para o V.C. mais a taxa volumétrica de geração (II) de energia interna no V.C.

CASOS PARTICULARES:

- $k = cte$

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.18}$$

- Regime permanente

$$\nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q} = 0 \tag{2.19}$$

- Regime permanente, 1D, sem geração interna

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) = 0 \tag{2.20}$$

2.1.3 Cilindro

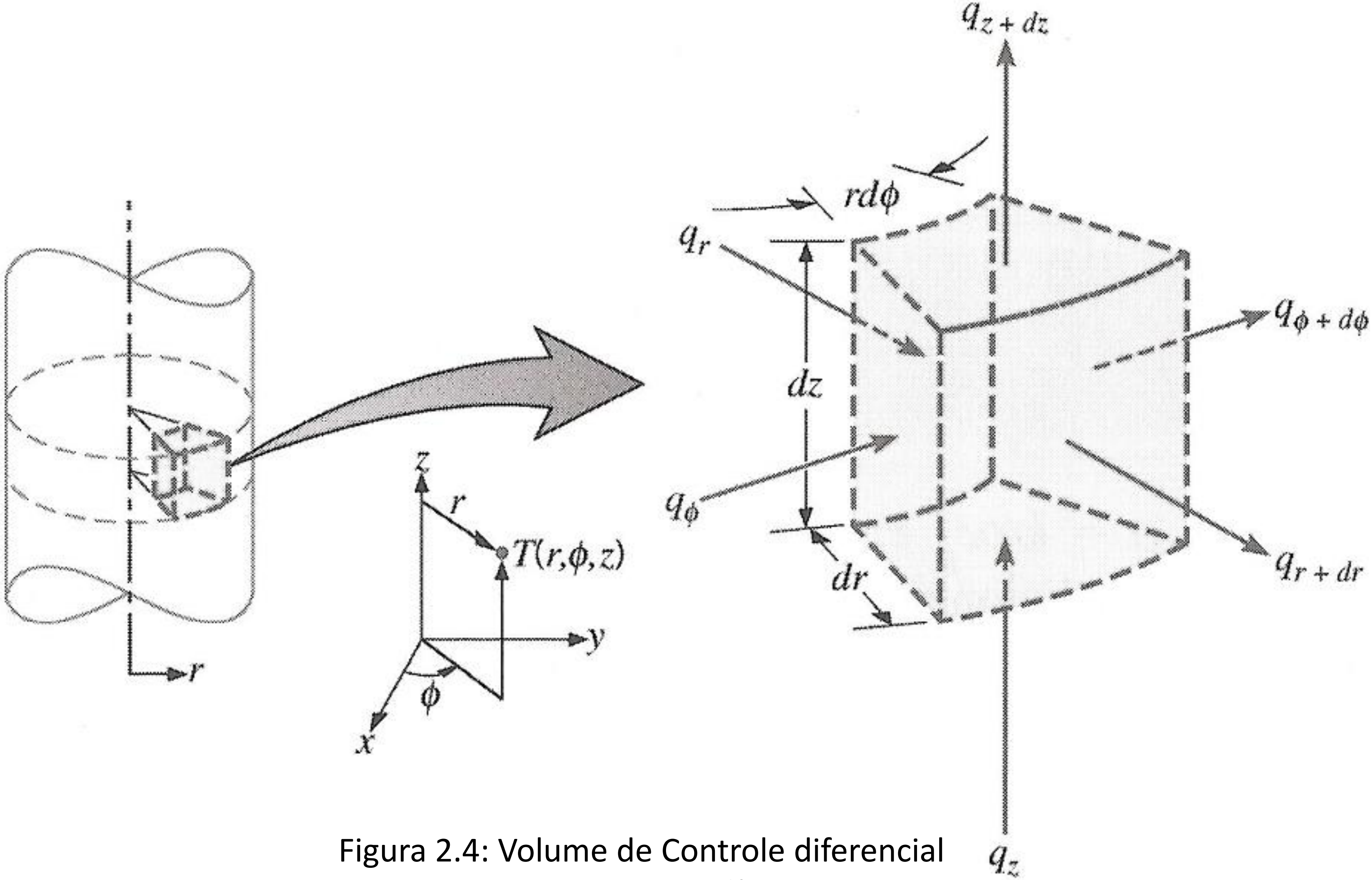

Figura 2.4: Volume de Controle diferencial para coordenadas cilíndricas

Vetor Fluxo de Calor (Lei de Fourier)

$$\vec{q}'' = -k\nabla T = -k\left(\vec{i}\frac{\partial T}{\partial r} + \vec{j}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi} + \vec{k}\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{2.21}$$

Aplicando o Operador Divergente

$$\nabla \cdot (k\nabla T) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{2.22}$$

Equação Geral em Coordenadas Cilíndricas

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} = \rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

2.2 Condições de Contorno

- Temperatura na superfície constante

$$T(0,t) = T_{sup} \qquad (2.24)$$

- Fluxo térmico na superfície constante

a) Fluxo térmico finito

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = q''_{sup} \qquad (2.25)$$

2.2 Condições de Contorno

b) Superfície isolada ou adiabática

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \qquad (2.26)$$

- Condição de convecção na superfície

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = h[T_\infty - T(0,t)] \qquad (2.27)$$