

ÍNDICE

INTRODUÇÃO.....	1
1. EQUILÍBRIO	2
1.1. Equilíbrio dos corpos rígidos.....	2
1.2. Diagrama de corpo livre	2
1.3. Equilíbrio de estruturas planas	2
1.4. Classificação das estruturas e das ações	3
1.4.1. Classificação das estruturas	3
1.4.2. Estruturas reticuladas.....	4
1.5. Apoios.....	5
1.6. Esforços na estrutura	6
1.6.1. Tipos de forças	7
1.7. Condições necessárias para o cálculo.....	7
1.8. Classificação das estruturas conforme sua estabilidade	8
1.9. Classificação dos esforços	8
1.9.1. Esforços externos ativos	8
1.9.2. Esforços externos reativos	9
1.9.3. Esforços internos	9
1.10. Esforços solicitantes	9
1.11. Método das seções	9
1.12. Diagramas dos esforços solicitantes	10
1.12.1. Linhas de estado em vigas retas	10
1.13 Relações entre carregamento e momento fletor	13
2. TRELIÇAS	14
2.1. Definição	14
2.2. Treliça simples.....	14
2.3. Método do equilíbrio dos nós	14
2.4. Método de Ritter ou das seções	15
3. TENSÕES E DEFORMAÇÕES	16
3.1. Tensões	16
3.2. Deformações.....	17
3.3. Lei de Hooke	18
3.4. Diagrama dos ensaios de tração	19
4. TENSÕES ADMISSÍVEIS, COEFICIENTE DE SEGURANÇA E TRAÇÃO E COMPRESSÃO SIMPLES	21
4.1. Tensões admissíveis	22
4.2. Coeficiente de segurança.....	23

4.3. Tração e compressão simples	24
5. MOMENTO DE INÉRCIA DE FIGURAS PLANAS	25
5.1. Momentos de inércia de uma área plana em relação a um eixo situado no seu plano	25
5.2. Translação dos eixos. Teorema dos eixos paralelos (ou de Steiner)	27
CONCLUSÃO.....	28
Apêndice: Momentos de inércia de figuras geométricas comuns	30
Referências bibliográficas	32

INTRODUÇÃO

Para a elaboração deste texto de apoio às disciplinas PEF2308 e PEF2309 - Fundamentos de Mecânica das Estruturas, os assuntos descritos em seus conteúdos programáticos foram consultados na bibliografia sugerida. Assim, os tópicos selecionados aqui apresentados referem-se aos mesmos assuntos apresentados nas aulas presenciais.

A cada quadrimestre ou semestre, os alunos incumbidos de compilar e ordenar os tópicos são desafiados a superar seus antecessores. Assim, eles são orientados para sempre privilegiar o conjunto e o conceito deixando para uma outra etapa o estudo das partes e dos detalhes. Como um dos objetivos da disciplina é a construção do vocabulário de Resistência dos Materiais e o domínio dos conceitos, não há uma preocupação maior com o cálculo ou o projeto das estruturas.

As fontes de consulta estão citadas e registradas com []. Como estratégia foram adotadas, às vezes, abordagens distintas para que o entendimento dos conceitos fosse alcançado se não por um, por outro caminho.

Portanto, alguns dos resumos foram integralmente elaborados pelos autores, outros possuem pequenas modificações dos originais, de modo que esses se adaptassem ao contexto do trabalho, e finalmente há os textos que foram transcritos das fontes.

Todas as figuras que ilustram este trabalho foram desenhadas a partir dos seus originais nos livros.

É evidente que as fontes utilizadas continuam insubstituíveis e que devem ser consultadas sempre que surja a necessidade de maiores esclarecimentos.

Oferece-se este texto de apoio com a intenção de facilitar o acompanhamento dos tópicos tratados nas aulas presenciais das disciplinas PEF2308 e PEF2309, ambas valendo dois créditos-aula. Por isso mesmo não se tem intenção de se elaborar um texto completo e sendo assim, alguns itens não foram abordados e outros o foram superficialmente.

Outro ponto importante é que este texto foi uma retomada de um projeto executado por alunos de uma turma anterior a nossa (PEF2308 – 1º semestre de 2004). **Por falta do nome dos componentes do grupo original, estes não puderam ser creditados.** Caso algum aluno desse grupo queira ter seu nome incluso neste trabalho, entre em contato com o professor coordenador da disciplina, Professor Osvaldo Shigeru Nakao.

1. EQUILÍBRIO

[2]

1.1. Equilíbrio dos corpos rígidos

O equilíbrio dos corpos rígidos é definido como a situação em que as forças externas, atuantes em um corpo rígido, formam um sistema equivalente a zero.

Decompondo cada força e cada momento em suas componentes cartesianas, as condições necessárias e suficientes para o equilíbrio de um corpo rígido são expressas através das seguintes seis equações:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0 \end{aligned}$$

Assim, determinam-se as eventuais forças desconhecidas aplicadas ao corpo rígido ou as reações exercidas pelos vínculos.

1.2. Diagrama de corpo livre

Diante de um problema envolvendo o equilíbrio de um corpo rígido, é essencial que todas as forças que agem sobre o corpo sejam consideradas. Portanto, desenha-se um diagrama de corpo livre, mostrando o corpo em estudo e todas as forças que agem sobre ele. Tanto as conhecidas, como aquelas a determinar.

1.3. Equilíbrio de estruturas planas

Supõe-se que todas as forças aplicadas estão contidas no plano da própria estrutura e as reações associadas a seus vínculos podem ser decompostas em três incógnitas, dependendo do tipo de vínculo. Essas reações são as restrições ao movimento que aparecem em função da vinculação e devem estar, nesse caso, contidas no plano da estrutura.

No caso de uma estrutura plana (bidimensional), as equações de equilíbrio se reduzem a três, por exemplo:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_A = 0$$

onde A é um ponto arbitrário no plano da estrutura.

Essas equações podem ser utilizadas para se calcular as três incógnitas.

Acrescente-se ainda que embora ao sistema de três equações de equilíbrio não se possam acrescentar novas equações, cada uma das equações pode ser substituída por

uma outra equação.

Assim, as equações de equilíbrio podem ser:

$$\sum F_x = 0, \sum M_A = 0, \sum M_B = 0 \text{ onde AB está numa direção distinta da do eixo y.}$$

Ou ainda, $\sum M_A = 0, \sum M_B = 0, \sum M_C = 0$ onde os pontos A, B e C não estão alinhados.

Como cada um dos conjuntos de equações de equilíbrio determina apenas três variáveis, as reações sobre uma estrutura rígida plana podem não ser completamente determinadas se houver mais de três incógnitas. Elas serão então consideradas estaticamente indeterminadas.

1.4. Classificação das estruturas e das ações

[1][4]

Estrutura é o conjunto das partes resistentes de um objeto. Tal objeto pode ser uma casa, uma cadeira, aviões, carros, enfim, qualquer objeto que contenha partes que são capazes de transmitir esforços, sem se deformar significativamente.

Para compreender o funcionamento de uma estrutura é necessário identificar cada um dos seus diversos elementos, seja pela forma ou pela função.

1.4.1. Classificação das estruturas

Os elementos estruturais podem ser

- Lineares: são os elementos em que uma das dimensões é muito maior do que as outras. São os cabos, tirantes, vigas e barras. É caracterizada por um eixo e por seções transversais a este eixo.
- De superfície: uma das dimensões é muito menor do que as outras. É descrita por uma superfície média e valores de espessura nos pontos desta superfície. Caso a superfície média for curva é chamada de casca; se for plana, pode ser uma chapa, quando os esforços externos atuam no plano médio ou pode ser uma placa, quando os esforços atuam em planos perpendiculares ao plano médio.
- De volume: quando todas as dimensões do objeto têm a mesma ordem de grandeza.

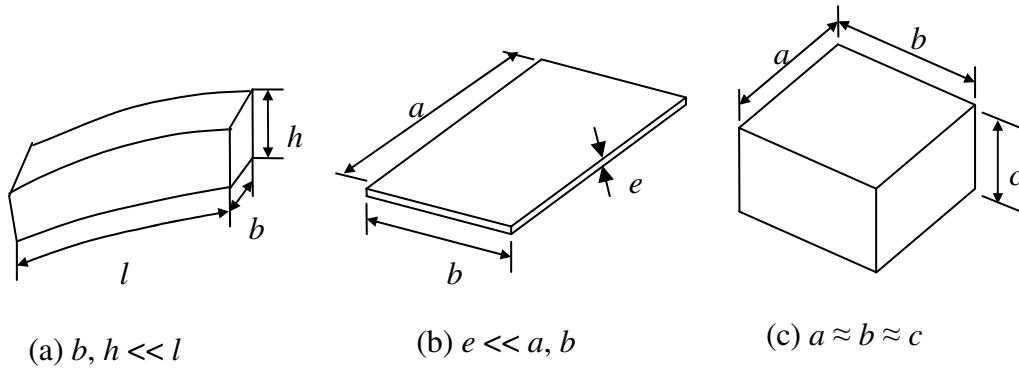


Figura 1.1: Classificação quanto à geometria: (a) estrutura linear, (b) de superfície e (c) de volume.

1.4.2. Estruturas reticuladas

Estrutura reticulada é aquela formada somente por elementos estruturais lineares.

Mostramos, em seguida, o conceito de barra, trecho e nó para exemplificar a descrição de estruturas reticuladas.

- Barra: é o elemento sólido gerado por uma figura plana que se desloca no espaço permanecendo normal ao caminho percorrido. O lugar geométrico dos baricentros da figura plana recebe o nome de eixo longitudinal da barra.

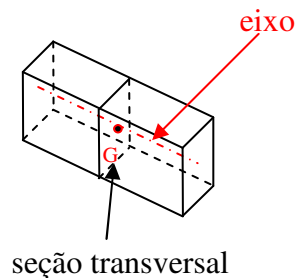


Figura 1.2: Eixo e seção transversal de uma barra

- Trecho: um trecho é um segmento de barra delimitado por seções transversais nas quais
 - insere-se uma nova barra ou uma articulação etc;
 - altera-se a equação que rege a posição do eixo da barra;
 - introduz-se uma carga concentrada;
 - começa e termina um carregamento distribuído.

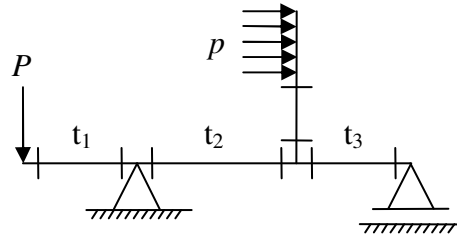


Figura 1.3: Delimitação das seções extremas dos eixos.

- Nós: são os encontros das extremidades de barras que compõem a estrutura. Os nós são ditos articulados quando eles permitem rotações relativas entre as extremidades das barras, caso contrário, diz-se que são rígidos.

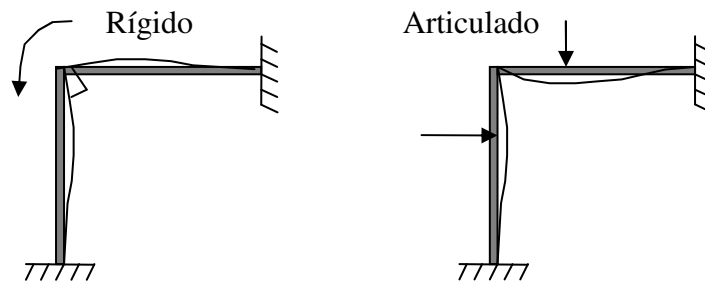


Figura 1.4: Nó rígido e nó articulado.

1.5. Apoios

Apoios são dispositivos que vinculam uma estrutura a outras estruturas, restringindo seu movimento.

Os três tipos básicos de apoios são apresentados a seguir.

- articulação móvel (apoio simples): impede deslocamento na direção normal a um plano definido.

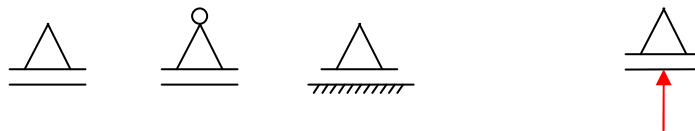


Figura 1.5: Articulação móvel: representações e força de reação.

- articulação fixa (apoio fixo): impede translação, a força reativa pode ser decomposta em duas componentes.

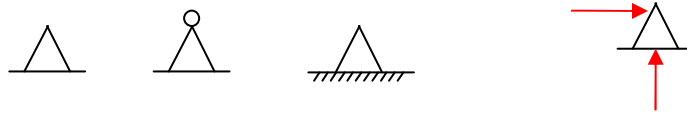


Figura 1.6: Articulação fixa: representações e forças reativas.

- engastamento (engaste): impede qualquer movimento (translação e rotação). Suas reações são um momento e uma força, a qual pode ser decomposta em duas componentes.



Figura 1.7: Engastamento: representação e reações.

Combinações de vínculos originam outros tipos de apoio, como os engastes móveis mostrados abaixo.

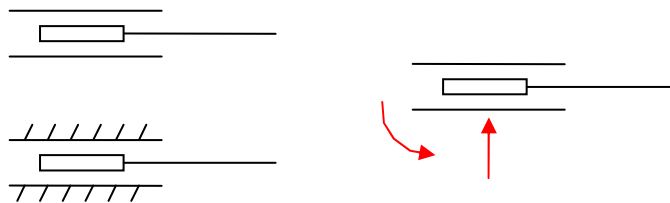


Figura 1.8: Engastamento móvel na direção longitudinal à barra.

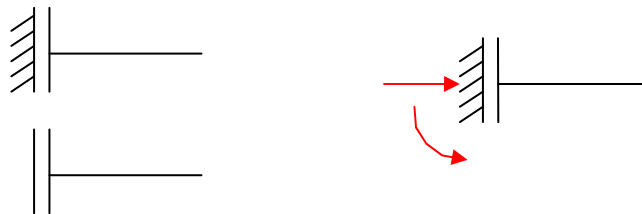


Figura 1.9: Engastamento móvel na direção transversal à barra.

1.6. Esforços na estrutura

O termo esforço abrange as idéias de força (concentrada, distribuída, de superfície etc), momento e tensão.

Uma vez definida a estrutura, é necessário determinar os esforços que ela irá suportar. A análise desses esforços é utilizada para se adotar a forma mais adequada

para a estrutura.

1.6.1. Tipos de forças

São de dois tipos as forças de interação entre sólidos:

- Forças de superfície (de contato): forças que atuam na superfície dos sólidos, como a pressão de um líquido, as forças de atrito.
- Forças de volume (de massa): forças que atuam nas partículas que compõe o sólido, sem existir contato entre os sólidos, como a força gravitacional e as forças eletromagnéticas.

Existem dois importantes tipos de forças idealizadas, definidos a partir das resultantes parciais ou totais das forças mencionadas anteriormente.

- Força distribuída linear: força por unidade de comprimento representando forças distribuídas em superfícies estreitas ou em volumes alongados.
- Força concentrada: é a resultante de forças distribuídas em pequenas superfícies ou volumes, aplicada pontualmente.

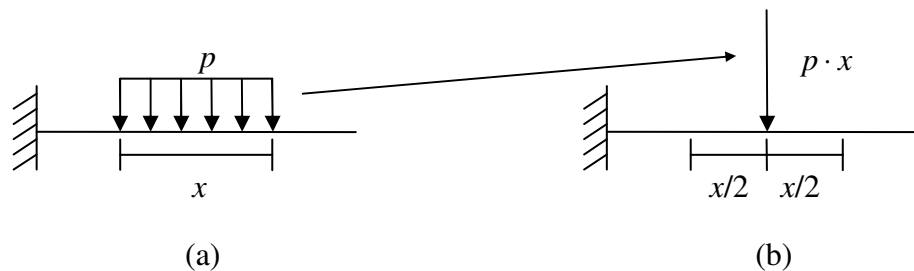


Figura 1.10: Forças (a) distribuída linear e (b) concentrada. Neste caso, a força distribuída em (a) tem o mesmo efeito da força concentrada em (b).

1.7. Condições necessárias para o cálculo

As equações de equilíbrio fornecem ambas as condições necessárias e suficientes para as condições de equilíbrio.

Quando todas as forças em uma estrutura podem ser determinadas estritamente por essas equações, a estrutura é considerada estaticamente determinada. Caso contrário, a estrutura é considerada estaticamente indeterminada, e para sua resolução são necessárias equações adicionais.

Para uma estrutura bidimensional, há no máximo três equações para cada parte e, portanto podemos sendo n o número de incógnitas, e r o número de reações, podemos afirmar que a estrutura será:

- estaticamente determinada para $r = 3n$;
- estaticamente indeterminada para $r > 3n$;

1.8. Classificação das estruturas conforme sua estabilidade

Caso as equações de equilíbrio sejam satisfeitas, para se assegurar que a estrutura é estável, precisamos garantir que a estrutura é propriamente segura e restrita pelos apoios. Podemos classificar as estruturas a partir de sua estabilidade como:

- Hipostáticas: o número de vínculos é menor que o número necessário para a estrutura se apresentar em equilíbrio, ou seja, a estrutura adquire movimento sob a ação de forças.

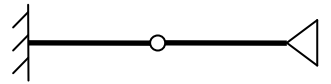


Figura 1.11: Estrutura hipostática.

- Isostáticas: o número de vínculos é o mínimo necessário para impedir movimento.

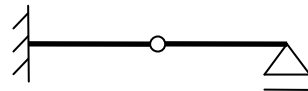


Figura 1.12: Estrutura isostática.

- Hiperestáticas: o número de vínculos na estrutura é maior que o necessário e por isso a estrutura pode não apresentar movimento mesmo retirando-se algum vínculo. Define-se o grau de hiperestaticidade como sendo o número máximo de vínculos que podem ser suprimidos sem que a estrutura apresente instabilidade.

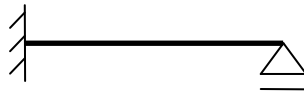


Figura 1.13: Estrutura hiperestática.

1.9. Classificação dos esforços

[4]

1.9.1. Esforços externos ativos

São os carregamentos que atuam sobre uma estrutura e cujos efeitos precisam ser analisados ao se projetá-la. Há os esforços considerados “mortos”, que são aqueles associados permanentemente à estrutura, como o peso de cada uma de suas partes, ou os

esforços “vivos” que são aqueles cuja atuação varia de acordo com a situação, como o peso de um veículo que passa por uma ponte ou a ação do vento sobre a estrutura ou ainda a ação de um dedo no teclado de um computador.

1.9.2. Esforços externos reativos

São as reações do apoio de uma estrutura. Os apoios conectam as diversas partes da estrutura, impondo certas restrições no movimento desta. Ao restringir o movimento, o apoio introduz reações na estrutura e, deste modo, a estrutura se mantém em equilíbrio. Caso a estrutura seja isostática, estes esforços podem ser calculados através da aplicação das equações de equilíbrio estático, em função das cargas externas aplicadas.

1.9.3. Esforços internos

São as interações entre partes da mesma estrutura. Podem ser:

- tensões: esforços internos que descrevem a interação entre as partículas;
- esforços solicitantes: resultantes de força e momento que descrevem a interação no plano da seção transversal.

1.10. Esforços solicitantes

São os esforços internos à estrutura. Em uma estrutura a carga de uma estrutura é geralmente constituída por:

- **Força normal (N)** que é perpendicular à seção;
- **Força cortante (V)** na direção do plano da seção;
- **Momento fletor (M)**, no plano perpendicular à seção.

Essas três componentes aparecem caso a estrutura esteja contida em um único plano. Caso ela seja tridimensional, também se tem um:

- **Momento de torção (T)**, tende a torcer a estrutura em torno de seu eixo.

Para o cálculo dessas forças internas deve-se usar o **método das seções**, que será apresentado mais adiante.

1.11. Método das seções

Antes de apresentar o método, é importante estabelecer convenções pra definir os valores positivos e negativos. Embora a escolha possa ser arbitrária, adotaremos uma convenção de sinais que é amplamente aceita na prática.

A convenção de sinais é adotada de forma que, a força normal no sentido positivo tende a “alongar” a peça, a força cortante no sentido positivo tende a “rotacionar” a peça no sentido horário, e o momento fletor tende a “entortar” a seção para cima.

Veja a figura para entender melhor a convenção:

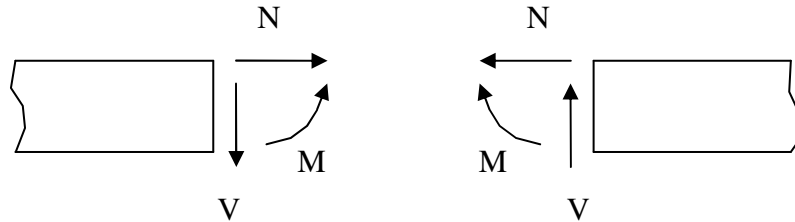


Figura 1.14: Convenção de sinais para os esforços solicitantes no caso plano.

Tendo-se adotado uma convenção, pode-se iniciar a explicação sobre o **método das seções**.

Primeiramente, devem ser calculadas as reações no apoio.

Depois, é importante fazer o diagrama de corpo livre da estrutura para facilitar a análise e os cálculos. Após isso, deve-se imaginar uma seção que corte a figura perpendicularmente à seção, no ponto em que se deseja determinar as forças internas.

Então, basta fazer o diagrama de corpo livre de uma das duas partes (de preferência a que possua a menor quantidade de cargas sobre), e colocar sobre elas as incógnitas N , V e M no sentido positivo.

Em seguida, aplicar as equações de estática sobre a parte selecionada, lembrando-se que para o cálculo do momento M , deve-se pegar um ponto em que os momentos causados pelas forças N e V sejam nulos.

Deve-se ter em mente também que, caso os valores obtidos sejam negativos, o sentido real da força, ou do momento, é o contrário ao adotado.

1.12. Diagramas dos esforços solicitantes

[4]

1.12.1. Linhas de estado em vigas retas

Para o projeto de uma viga reta, é importante saber como as forças internas N e o momento M variam sobre o seu eixo axial. A força normal N geralmente não é considerada porque muitas vezes a carga aplicada não causa o aparecimento de uma força normal, e porque é mais importante que a peça resista a uma força cortante do que a uma força normal.

Para a determinação das equações de variações de N , V e M em função de uma posição x , deve-se aplicar o **método das seções**, aplicando-se o corte em uma distância arbitrária x .

Em geral, as forças e o momento internos serão descontínuos, ou suas derivadas serão descontínuas, em pontos em que o tipo, ou a magnitude da carga muda. Por causa disso, as funções de N , V e M deverão ser calculadas para cada região localizada entre duas descontinuidades de carga.

Exemplo 1) Desenhar o diagrama da força cortante e do momento fletor para a viga da figura 1.15.

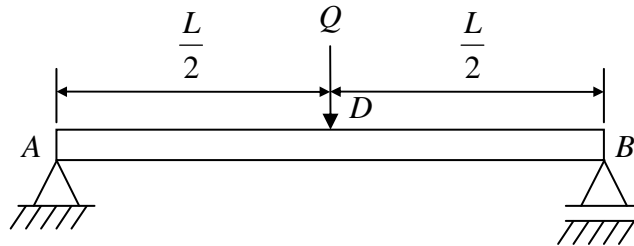


Figura 1.15: Exemplo 1.

Primeiramente, determinam-se as reações de apoio, pelo diagrama de corpo livre, colocando as reações dos apoios e impondo as condições de equilíbrio, obtém-se:

$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$

como visto na figura 1.16.

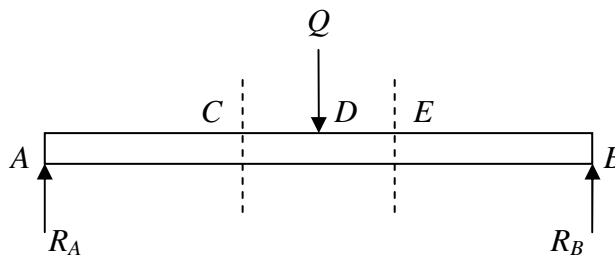


Figura 1.16: Diagrama de corpo livre.

Em seguida corta-se a viga no ponto C entre A e D, desenha-se o diagrama de corpo livre de AC e CB. Adotando que as forças cortantes e momentos fletores são positivos, como indicado na figura 1.17, impondo as condições de equilíbrio encontra-se:

$$V = \frac{P}{2}, \quad M = P \frac{x}{2}.$$

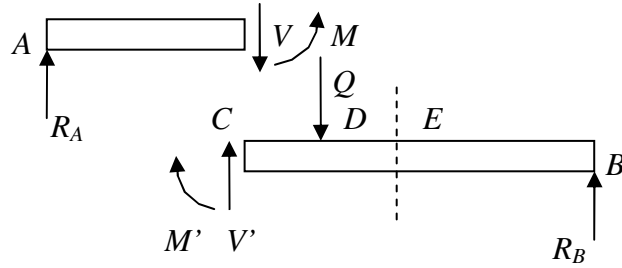


Figura 1.17: Aplicação do método das seções.

Agora, corta-se a viga no ponto E entre D e B, e segue-se o mesmo procedimento anterior para se obter:

$$V = -\frac{P}{2}, M = P\frac{(L-x)}{2}.$$

Assim podemos desenhar os diagramas da figura 1.18.

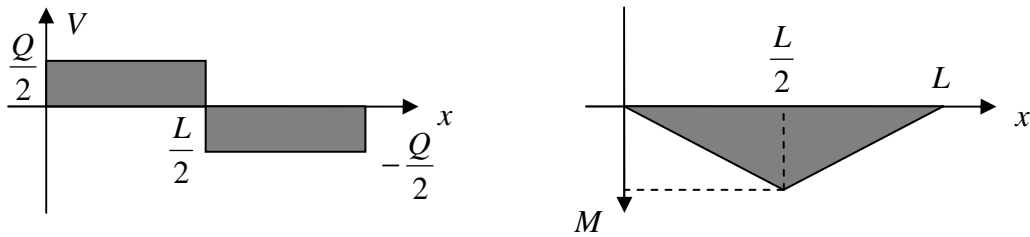


Figura 1.18: Diagramas da força cortante e do momento fletor.

Exemplo 2) Desenhar o diagrama da força cortante e do momento fletor para a viga da figura 1.19 submetida ao carregamento w .

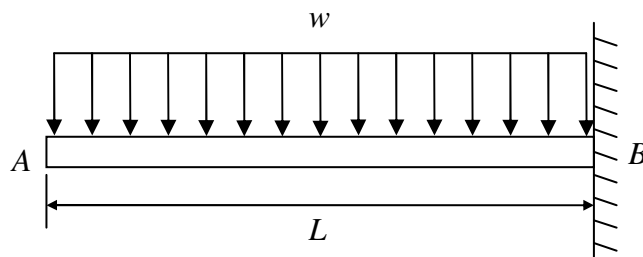


Figura 1.19: Exercício 2.

Corta-se a viga em um ponto C entre A e B e desenha-se o diagrama de corpo livre de AC como indicado na figura 1.20.

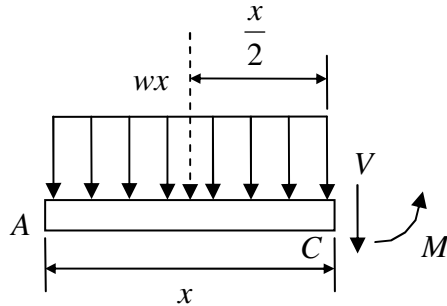


Figura 1.20: Aplicação do método das seções.

Define-se x a distância entre A e C e substitui-se a carga distribuída ao longo de AC por sua resultante $w x$ que é aplicada no ponto médio de AC. Escreve-se então:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V = -w x$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M = -\frac{w x^2}{2}$$

Podem-se, então, desenhar os diagramas da figura 1.21.

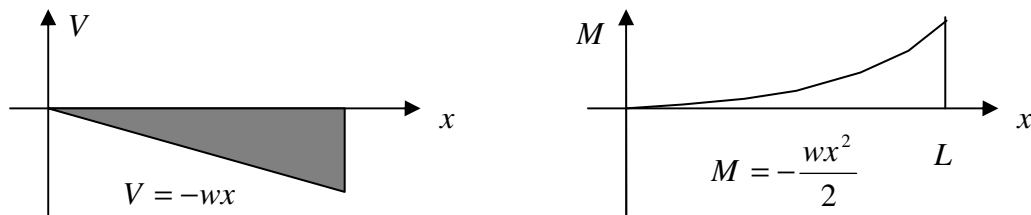


Figura 1.21: Diagramas da força cortante e do momento fletor.

1.13. Relações entre carregamento e momento fletor

Têm-se duas importantes relações, uma relaciona a força cortante com o carregamento:

$$\frac{dV}{dx} = -w$$

Observe-se que essa relação não é válida no ponto em que haja uma força concentrada aplicada, pois a curva da força cortante é descontínua.

Outra relaciona o momento fletor com a força cortante:

$$\frac{dM}{dx} = V$$

Relação que também não é válida para os pontos em que haja forças concentradas.

Pode-se verificar que essas duas relações são válidas nos exemplos 1 e 2.

2. TRELIÇAS

[2] [4]

2.1. Definição

As treliças são estruturas constituídas por barras, ligadas por articulações, geralmente dispostas em uma formação triangular, que podem estar arrançadas em um plano ou no espaço. Devido ao seu arranjo geométrico, as forças aplicadas nos nós, transformam-se em trações e compressões em cada uma de suas barras.

2.2. Treliça simples

Diz-se que uma treliça é rígida se ela foi projetada de forma a não sofrer deformações grandes e não ruir sob uma pequena carga. Uma treliça triangular formada por três barras ligadas por pinos nas três juntas é claramente uma treliça rígida, assim como a treliça obtida acrescentando-se duas novas barras à anterior e ligando-as, formando uma nova junta. Treliças obtidas pela repetição deste procedimento são consideradas treliças simples.

Quando se trabalha com treliças, admitem-se algumas hipóteses para o cálculo:

- as barras se ligam aos nós através de articulações perfeitas;
- as cargas e as reações de vínculo aplicam-se apenas nos nós das treliças;
- o eixo das barras coincide com as retas que unem os nós.

2.3. Método do equilíbrio dos nós

O método do equilíbrio dos nós pode ser estendido à análise de treliças tridimensionais ou treliças espaciais.

O princípio desse método é que, para uma treliça estar em equilíbrio, cada um de seus nós precisa estar em equilíbrio.

Antes de aplicar o método, é necessário determinar as reações no apoio, considerando a treliça inteira como um corpo livre.

É importante então, desenhar o diagrama de corpo livre de cada nó, aplicando-se as forças incógnitas provenientes das barras em cada nó, lembrando-se que a direção da força é a mesma da barra. Quando uma força está no sentido de “puxar” um nó, a barra está sendo tracionada, caso contrário, dizemos que ela está sendo comprimida.

O método do equilíbrio dos nós consiste em satisfazer as condições de equilíbrio ($\sum X = 0$, $\sum Y = 0$) para cada nó. Para isso, assume-se sempre que a força atuante no nó é de tração, e caso o valor obtido seja negativo, a força encontrada não é de tração, mas sim de compressão.

No caso de treliças simples é sempre possível desenhar o diagrama de corpo livre dos nós em uma ordem tal que somente duas forças desconhecidas são incluídas em cada diagrama. Estas forças podem ser calculadas a partir das duas equações de equilíbrio ou se houver apenas três forças, a partir do triângulo de forças correspondentes.

Como a força está na direção da barra, vale ressaltar que para a aplicação das equações de equilíbrio, devem-se considerar as componentes verticais e horizontais das forças.

2.4. Método de Ritter ou das seções

O método de Ritter é utilizado, preferencialmente, ao método dos nós, quando se deseja calcular as forças em apenas algumas partes da treliça. O método de Ritter é particularmente útil na análise de treliças compostas, isto é, treliças que não podem ser construídas com a treliça básica triangular.

O método das seções consiste em passar uma seção imaginária pela treliça, dividindo-a assim, em duas partes. Em seguida, faz-se o diagrama de corpo livre de ambas as partes. Estando a treliça em equilíbrio, cada uma de suas partes estará também em equilíbrio e, portanto podem-se aplicar as três equações da Estática em cada parte isolada da treliça.

Por exemplo, para determinar a força na barra BD da treliça da figura abaixo, secciona-se as barras BD, BE e CE, remove-se estas três barras e utiliza-se a parte ABC da treliça como corpo livre.

Escrevendo $\sum M_E = 0$ determina-se a intensidade da força na barra BD. Um sinal positivo indicará que a barra está sob tração, e um sinal negativo, compressão.

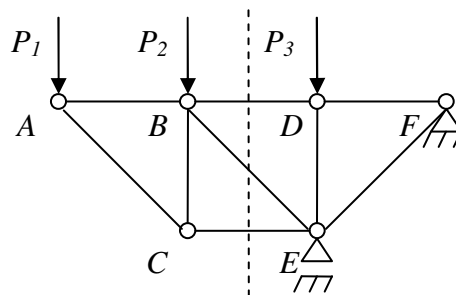


Figura 2.1: Aplicação do método de Ritter.

3. TENSÕES E DEFORMAÇÕES

[3]

3.1. Tensões

A mecânica dos materiais tem por objetivo principal fornecer ao engenheiro os meios que o possibilitem analisar e projetar máquinas e estruturas.

Para poder definir, por exemplo, se uma determinada barra suporta uma certa força, é necessário, além de determinar a intensidade da força a qual a estrutura vai estar sujeita, saber outros importantes parâmetros.

Conhecer a intensidade da força representa o primeiro passo na análise da estrutura, mas não leva à conclusão nenhuma de que a carga pode ser suportada com segurança.

A capacidade ou não de uma estrutura resistir a um determinado esforço está relacionado à área da sua seção transversal e das características do material de que é formada.

A força por unidade de área ou a intensidade das forças distribuídas numa certa seção transversal é chamada tensão atuante e é indicada pela letra grega σ (sigma). A tensão em uma barra de seção transversal A , sujeita a uma força axial P , é então obtida dividindo-se o módulo P da força pela área A :

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

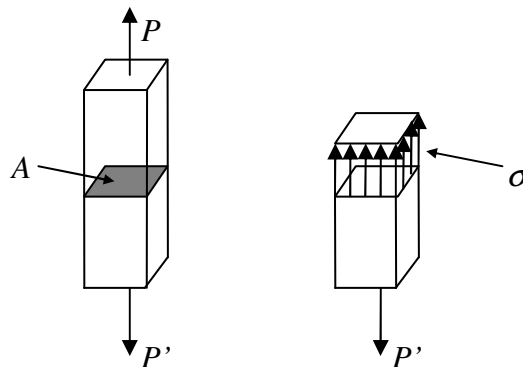


Figura 3.1: Tensão

Para indicar a tensão de tração (barras tracionadas) será usado o sinal positivo. O sinal negativo indicará tensão de compressão (barras comprimidas).

No Sistema Internacional, a força P é expressa em newtons (N) e A em metros quadrados (m^2). A tensão σ será expressa em N/m^2 , unidade que é denominada pascal (Pa). Para uso prático, no entanto, o pascal se revela uma medida muito pequena (as grandezas expressas em pascal tornam-se números muito grandes). Usam-se, então, múltiplos dessa unidade, que são o quilopascal (kPa), o megapascal (MPa) e o gigapascal (GPa).

$$1kPa = 10^3 N/m^2$$

$$1MPa = 10^6 N/m^2$$

$$1GPa = 10^9 N/m^2$$

Quando se usam unidades inglesas, P é expressa em libras (lb) ou quilolibras (kip), e a área da secção transversal se expressa em polegadas quadradas (in^2). A tensão σ será expressa em libras por polegada quadrada (psi) ou quilolibras por polegada quadrada (ksi).

3.2. Deformações

[7]

Admitimos que um corpo é constituído de pequenas partículas ou moléculas, entre as quais estão atuando forças. Estas forças moleculares opõem-se à mudança de forma que forças exteriores tendem a produzir. Se estas forças exteriores são aplicadas no corpo, suas partículas deslocam-se e os deslocamentos mútuos continuam até que o equilíbrio entre as forças exteriores e interiores seja estabelecido. Diz-se, então, que o corpo está num estado de deformação. Durante a deformação, as forças exteriores que estão atuando num corpo produzem trabalho, o qual é transformado completa ou parcialmente em energia potencial de deformação. Como exemplo deste acúmulo de energia potencial num corpo deformado, citaremos o caso da corda de relógio. Se as forças que produziram a deformação do corpo diminuïrem gradualmente, o corpo volta total ou parcialmente à sua forma inicial e, durante esta deformação inversa, a energia potencial de deformação acumulada no corpo, pode ser recuperada sob a forma de trabalho exterior, e o relógio funciona.

Tomemos, por exemplo, uma barra prismática carregada na extremidade, como mostra a figura 3.2. Sob a ação dessa carga, manifestar-se-á certo alongamento da barra. O ponto de aplicação da carga mover-se-á, então, para baixo e, durante este movimento, a carga produzirá trabalho positivo. Quando a carga diminui, o alongamento da barra também diminui, a extremidade carregada se desloca para cima e a energia potencial de deformação transformar-se-á em trabalho, produzido pelo movimento da carga para cima.

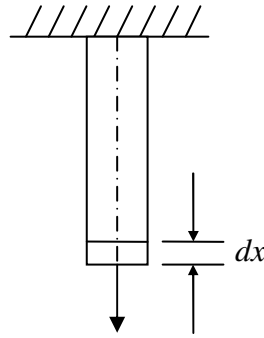


Figura 3.2: Deformação de barra carregada

A propriedade dos corpos de voltarem à forma inicial, após a retirada da carga, é chamada de elasticidade. Diz-se que o corpo é perfeitamente elástico, se recupera completamente sua forma original depois da retirada da carga; parcialmente elástico, se a deformação produzida pelas forças exteriores não desaparece completamente depois da retirada da carga. No caso de um corpo perfeitamente elástico, o trabalho produzido pelas forças exteriores durante a deformação, será completamente transformado em energia potencial de deformação. No caso de um corpo parcialmente elástico, parte do trabalho produzido pelas forças exteriores, durante a deformação, será perdida sob a forma de calor, o qual será desenvolvido no corpo durante a deformação não elástica. As experiências mostram que alguns materiais estruturais, como o aço, a madeira e a pedra podem ser considerados como perfeitamente elásticos entre certos limites, os quais dependem das propriedades do material. Admitindo-se que as forças exteriores que atuam na estrutura, sejam conhecidas, constitui um problema fundamental para o engenheiro que projeta estabelecer proporções para os elementos da estrutura tal que esta se aproxime da condição de um corpo perfeitamente elástico, sob todas as condições de trabalho. Somente sob estas condições, teremos uma utilização conveniente da estrutura, sem haver deformação permanente de nenhum de seus elementos.

3.3. Lei de Hooke

[7]

Por meio de experiências diretas relativas à distensão de barras prismáticas, estabeleceu-se, para vários materiais estruturais que o alongamento de barra, entre certos limites, é proporcional à força de tração. Esta relação linear simples entre a força e o alongamento que ela produz foi formulada, primeiramente, em 1678, pelo cientista inglês Robert Hooke e recebeu seu nome. Adotando-se as notações:

- P = força que produz a distensão da barra;

- l = comprimento da barra;
- A = área da seção transversal da barra;
- δ = alongamento total da barra;
- E = constante elástica do material, chamada módulo de elasticidade.

A lei experimental de Hooke pode ser dada pela seguinte equação:

$$\delta = \frac{P \cdot l}{A \cdot E}$$

O alongamento da barra é diretamente proporcional à força de tração e ao comprimento da barra, e inversamente proporcional à área da seção transversal e ao módulo de elasticidade.

3.4. Diagrama dos ensaios de tração

A proporcionalidade entre a força de tração e o alongamento, só existe até um certo valor limite da tensão de tração, chamado limite de proporcionalidade, o qual depende das propriedades do material. Além deste limite, a relação entre o alongamento e a tensão de tração, torna-se mais complicada. Para um material, como o aço de construção, a proporcionalidade entre a carga e o alongamento, existe numa zona considerável e o limite de proporcionalidade pode atingir a 1750 - 2100 kg/cm². Para materiais como ferro fundido ou cobre doce, o limite de proporcionalidade é muito baixo, de modo que podemos observar um afastamento da lei de Hooke para tensões de tração baixas. Estudando-se as propriedades mecânicas dos materiais além do limite de proporcionalidade, a relação entre a deformação e a tensão correspondente é, geralmente, representada em gráficos pelo diagrama de ensaios de tração. A figura 3.3 apresenta um diagrama típico para aço de construção. Aí, os alongamentos estão marcados no eixo horizontal e as tensões correspondentes são dadas pelas ordenadas da curva OABCD. De O a A, a tensão e a deformação são proporcionais; além

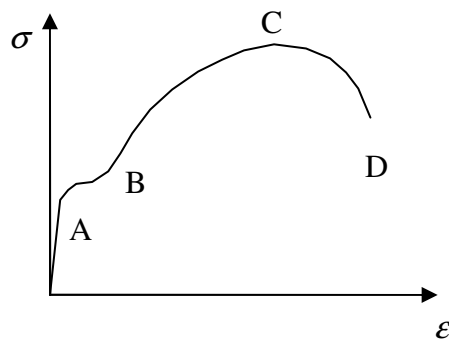


Figura 3.3: Diagrama tensão x deformação para aço de construção.

de A, o afastamento da lei de Hooke torna-se acentuado; portanto, a tensão em A é o limite de proporcionalidade. Carregando-se além deste limite, o alongamento cresce mais rapidamente e o diagrama torna-se curvo. Em B, manifesta-se alongamento rápido da barra sem acréscimo apreciável da força de tração. Este fenômeno, chamado escoamento do metal, acha-se representado no diagrama por uma parte da curva quase horizontal. A tensão correspondente ao ponto B é chamada de limite de escoamento. Após o escoamento da barra, o material sofre um revigoramento e, como se pode ver pelo diagrama, a força de tração necessária cresce com o alongamento até o ponto C, em que essa força atinge seu valor máximo. A tensão correspondente é chamada de tensão de ruptura do material. Além do ponto C, o alongamento da barra manifesta-se com diminuição de carga, ocorrendo, finalmente, a ruptura com uma carga correspondente ao ponto D do diagrama. Notemos que o escoamento da barra está ligado a uma contração lateral, mas é de prática corrente, ao calcular-se o limite de escoamento e a tensão de ruptura, usar-se a área inicial A da seção transversal.

A figura 3.4 representa o diagrama de ensaios de tração para ferro fundido. Este material tem limite de proporcionalidade muito baixo e não possui limite de escoamento definido. Diagramas análogos a esses de tração, também podem ser obtidos para a compressão de vários materiais e os pontos característicos (como o limite de proporcionalidade, o limite de escoamento no caso do aço e a tensão de ruptura à compressão) podem ser estabelecidos.

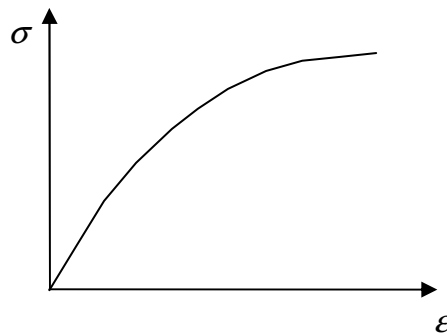


Figura 3.4: Diagrama tensão x deformação para ferro fundido.

Observamos pelas figuras que existe uma relação linear onde podemos escrever:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Esta relação é equivalente à primeira apresentada, na qual P/A foi substituído por σ .

Como exemplo será determinada a deformação da barra de aço da figura 3.5 abaixo sob ação das cargas indicadas ($E = 200\text{GPa}$):

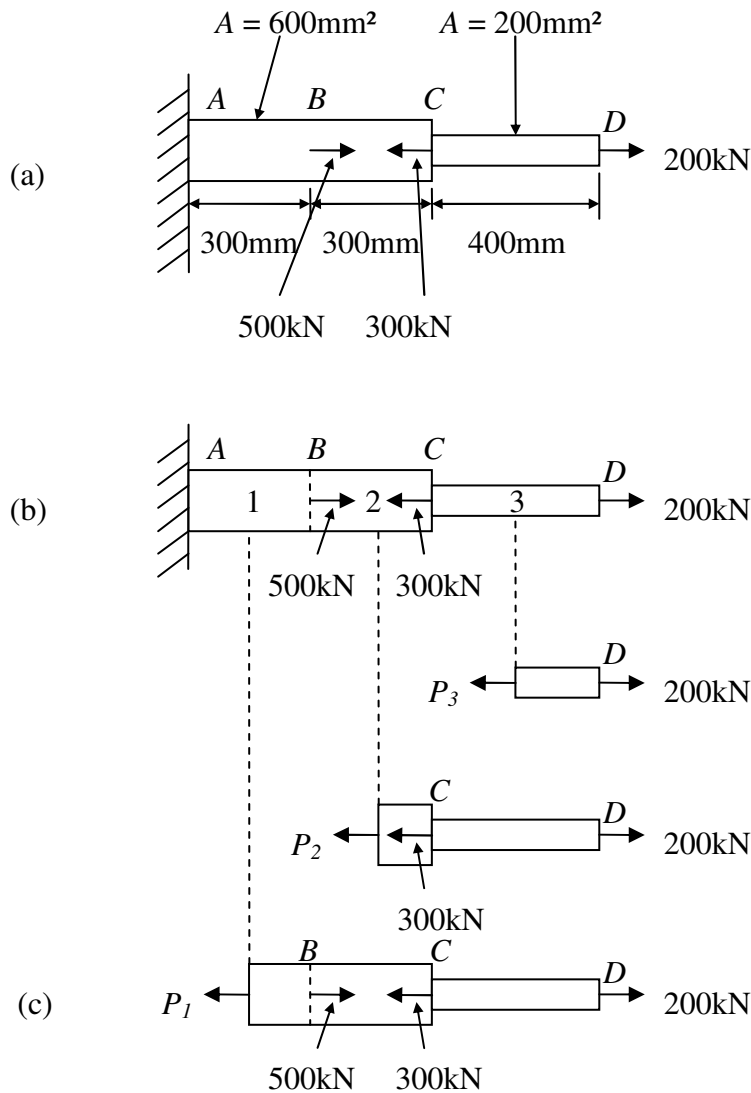


Figura 3.5: Barra de aço do exemplo.

Dividimos a barra nos três segmentos indicados na figura 3.5b e desenhamos o diagrama de corpo livre de cada segmento como indicado em 3.5c. Estudando o equilíbrio obtém-se:

$$P_1 = 400\text{kN} , P_2 = -100\text{kN} \text{ e } P_3 = 200\text{kN} .$$

Com esses valores calcula-se:

$$\sigma = \frac{1}{E} \left[\frac{(P_1 \cdot L_1)}{A_1} + \frac{(P_2 \cdot L_2)}{A_2} + \frac{(P_3 \cdot L_3)}{A_3} \right] = 2,75\text{mm}$$

4. TENSÕES ADMISSÍVEIS, COEFICIENTE DE SEGURANÇA E TRAÇÃO E COMPRESSÃO SIMPLES

[3]

4.1. Tensões admissíveis

Dentro das aplicações da engenharia, a determinação de tensões, bem como de outros tipos de esforços, não é o objetivo final, mas um passo necessário no desenvolvimento de dois dos mais importantes estudos:

- A análise de estruturas e máquinas existentes, com o objetivo de prever seu comportamento sob condições de carga especificadas.
- O projeto de novas máquinas e estruturas, que deverão cumprir determinadas funções de maneira segura e econômica.

Para encaminhar qualquer dos dois estudos acima, precisa-se saber como o material a ser utilizado vai atuar sob condições conhecidas de carregamentos. Para cada material, isso pode ser determinado realizando-se testes específicos em amostras preparadas do material. Por exemplo, podemos preparar um corpo de prova de ação e levá-lo a uma máquina de testes em laboratório, onde ele será submetido a uma carga axial de tração.

Enquanto fazemos a força aplicada aumentar progressivamente de intensidade, podemos medir várias modificações por que passa o corpo de prova, como por exemplo, alterações no comprimento e no diâmetro.

Em certo instante, a máxima força que pode ser aplicada ao corpo de prova é atingida e a amostra se quebra, ou começa a perder resistência, suportando forças menores. Essa força máxima é chamada de carregamento último dessa amostra, e é designada pelo símbolo P_u .

Como a força aplicada é centrada, podemos dividir a carga de ruptura pela área da seção transversal da barra, para obter a tensão normal última do material em estudo. Esta tensão, também conhecida como tensão última à tração, tem valor:

$$\sigma_u = \frac{P_u}{A}$$

Muitos procedimentos para testes são usados na determinação da tensão última a cisalhamento de um material. Um procedimento usual utiliza a torção de um tubo circular.

Um método mais direto, porém não tão preciso como o anterior, consiste em levar uma chapa a uma ferramenta de corte e aplicar um carregamento crescente, até que a carga última P_u para corte simples seja atingida (figura 4.1a). Se a extremidade livre da chapa estiver apoiada sobre as duas bordas cortantes da ferramenta (figura 4.1b), obtém-se a carga última para corte duplo. Nos dois casos, obtém-se a tensão última a cisalhamento, dividindo-se a carga última pela área cortada. No caso de corte

simples, essa área é igual à da seção transversal do corpo de prova, e no caso de corte duplo, vale o dobro da área da seção transversal.

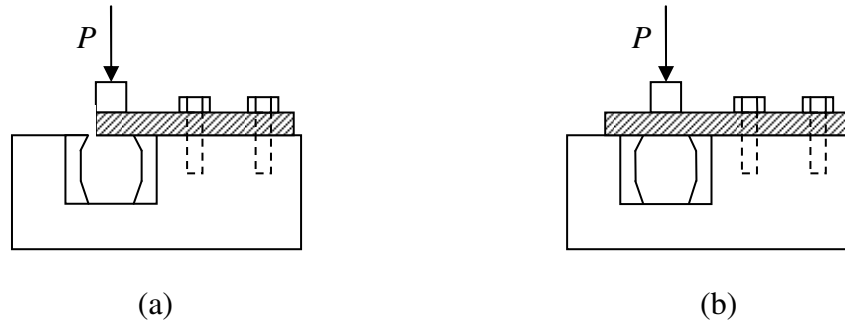


Figura 4.1: Obtenção da tensão última (a) para corte simples e (b) para corte duplo.

Uma peça estrutural ou componente de máquina deve ser projetada de tal forma que a carga última seja consideravelmente maior que o carregamento que essa peça ou elemento irá suportar em condições normais de utilização. Esse carregamento menor é chamado de carregamento admissível e, algumas vezes, carga de utilização ou carga de projeto. Então, quando se aplica a carga admissível, apenas uma parte da capacidade de resistência do material está sendo utilizada; a outra parte é reservada para assegurar ao material condições de utilização seguras.

4.2. Coeficiente de segurança

A relação entre o carregamento último e o carregamento admissível é chamada coeficiente de segurança.

$$\text{Coeficiente de segurança} = CS = \frac{\text{carga última}}{\text{carga admissível}}$$

Em muitas aplicações existe uma correspondência linear entre carga aplicada e tensão provocada pela carga. Nesse caso o coeficiente de segurança pode ser expresso por:

$$\text{Coeficiente de segurança} = CS = \frac{\text{tensão última}}{\text{tensão admissível}}$$

A determinação do valor a ser adotado para o coeficiente de segurança, nas muitas aplicações possíveis, é um dos mais importantes problemas da engenharia. Por um lado, a escolha de um coeficiente de segurança baixo pode levar a uma possibilidade muito alta de ruptura da estrutura; por outro lado, um coeficiente de segurança muito alto leva a projetos antieconômicos ou pouco funcionais. A escolha do coeficiente de segurança adequado para as diferentes aplicações práticas requer uma análise cuidadosa, em que se levam em consideração muitos fatores, como os que se seguem:

- Modificações que ocorrem nas propriedades do material. A composição, resistência

e dimensões dos materiais estão sujeitas a pequenas variações durante a fabricação das peças. Além disso, as propriedades do material podem ficar alteradas, e podem ocorrer tensões residuais, devido a deformações e variações de temperatura a que o material se sujeita no transporte, armazenamento ou na própria execução da estrutura.

- O número de vezes em que a carga é aplicada durante a vida da estrutura ou máquina. Para a maior parte dos materiais, a aplicação do carregamento, repetida muitas vezes, leva a um decréscimo no valor da tensão última. Este fenômeno é chamado de fadiga do material e, se não for levado em conta, poderá ocorrer uma ruptura brusca.
- O tipo de carregamento para o qual se projeta, ou que poderá atuar futuramente. A maior parte dos carregamentos adotados em projeto é estimada, pois são poucas as vezes em que um carregamento pode ser previsto com precisão. Ocorre também a possibilidade de alterações futuras na finalidade da máquina ou estrutura que está sendo projetada, como modificações nos valores previstos por ocasião do projeto. Cargas dinâmicas, cíclicas e instantâneas (choque) exigem altos valores de coeficientes de segurança.
- O modo de ruptura que pode ocorrer. Materiais frágeis apresentam ruptura repentina, sem nenhuma indicação de que o colapso é iminente. Já os materiais dúcteis, como o aço estrutural, apresentam grande deformação, chamada escoamento, antes de atingir a ruptura, e esse comportamento do material fornece um aviso de que está ocorrendo carregamento excessivo. A ruptura ocasionada por perda de estabilidade da estrutura é geralmente repentina, seja o material frágil ou não. Quando existe a possibilidade de ruptura repentina, o valor a se adotar para o coeficiente de segurança deve ser maior do que no caso de ruptura com aviso.
- Métodos aproximados de análise. Os métodos de cálculo e análise são baseados em certas simplificações que levam a diferenças entre as tensões calculadas e aquelas realmente atuantes na estrutura.
- Deterioração que poderá ocorrer no futuro devido à falta de manutenção ou por causas naturais imprevisíveis. Em locais em que a decomposição do material ou a ferrugem são difíceis de se controlar ou de se prever, deve ser adotado um coeficiente de segurança de valor elevado.

4.3. Tração e compressão simples

[6]

Considere uma barra prismática (de eixo reto e seção transversal constante) sob a

ação de duas forças iguais e opostas, coincidentes com o seu eixo (lugar geométrico dos centros de gravidade das seções transversais). Diz-se que a barra é tracionada quando aquelas forças são dirigidas para fora da barra; em caso contrário, diz-se que a barra é comprimida. Os dois casos estão indicados nas figuras 4.2a e 4.2b que se seguem.



Figura 4.2: (a) barra tracionada e (b) barra comprimida.

Sob a ação dessas forças externas, originam-se esforços internos na barra; para o seu estudo, pode-se imaginar que a barra seja cortada ao longo de uma seção transversal qualquer do plano do corte a-a, indicado na figura 4.3a.

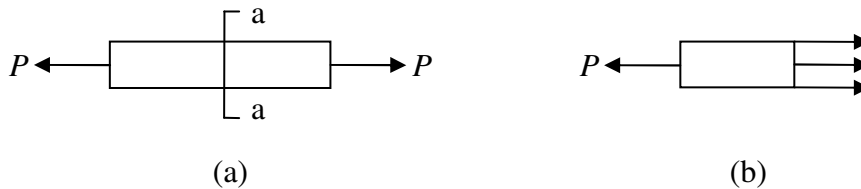


Figura 4.3: Esforços internos na barra.

E se supõe removida a parte do corpo que se situa, por exemplo, à direita do corte efetuado, tem-se a situação indicada na figura 4.3b, onde está representada a ação que esta parte suprimida exercia sobre a restante. Por este artifício, de se efetuar um corte, os esforços internos, na seção considerada transformam-se em externos, relativamente à parte do corpo que se conservou. Para que não se altere o equilíbrio, estes esforços devem ser equivalentes à resultante, também axial, de intensidade P ; além disso, supõe-se que eles atuem, em cada ponto da seção, paralelamente ao eixo da barra, isto é, sejam perpendiculares à seção transversal considerada.

5. MOMENTO DE INÉRCIA DE FIGURAS PLANAS

[7]

5.1. Momentos de inércia de uma área plana em relação a um eixo situado no seu plano

No estudo da flexão das vigas, encontram-se integrais do tipo:

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

nas quais cada elemento de área dA é multiplicado pelo quadrado de sua distância ao

eixo dos z e a integração é estendida ao longo de toda a seção transversal A da viga (figura 5.1a). Essa integral permite calcular o momento de inércia da área A em relação ao eixo dos z .

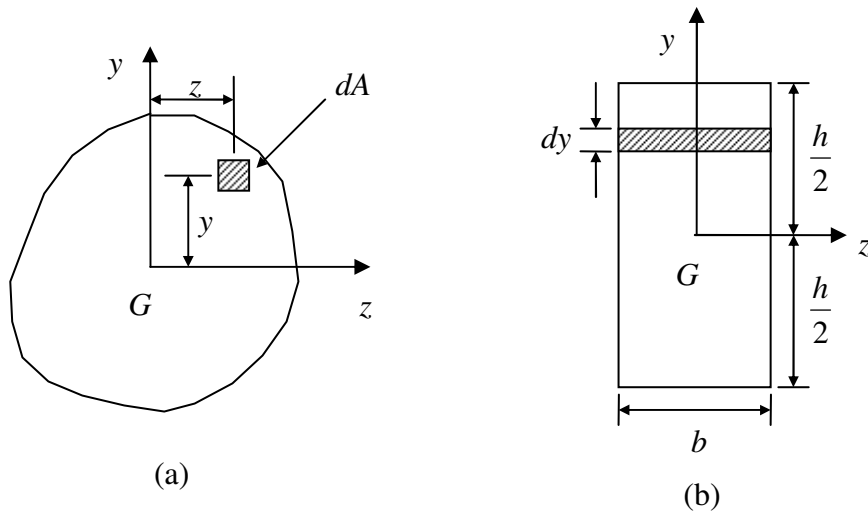


Figura 5.1: Elementos para o cálculo do momento de inércia de uma figura plana (a) genérica e (b) retangular.

Em casos simples, os momentos de inércia podem ser calculados analiticamente com bastante facilidade. Seja, por exemplo, um retângulo (figura 5.1b). Para calcular o momento de inércia deste retângulo em relação ao eixo de simetria horizontal z , pode-se dividi-lo em elementos infinitesimais, tais como a área tracejada que a figura mostra. Então, tem-se que:

$$I_z = 2 \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Analogamente, o momento de inércia do retângulo em relação ao eixo dos y será:

$$I_y = 2 \int_0^{\frac{b}{2}} z^2 h dz = \frac{b^3 \cdot h}{12}$$

A primeira equação também pode ser usada para o cálculo de I_z para o paralelogramo da figura 5.2a abaixo, porque este paralelogramo pode ser obtido a partir do retângulo indicado pelas linhas interrompidas, por meio de um deslocamento paralelo ao eixo dos z dos elementos, tais como o indicado.

As áreas tracejadas dos elementos e suas distâncias ao eixo dos z permanecem inalteradas durante tal deslocamento, de modo que I_z é o mesmo que o do retângulo.

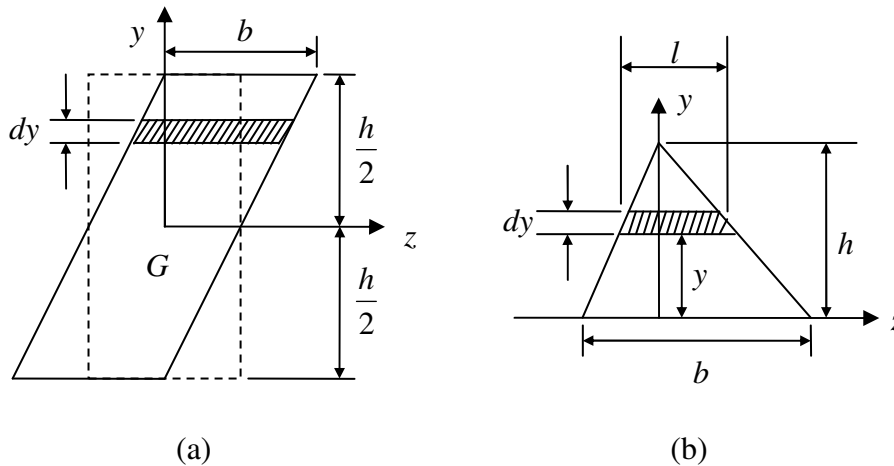


Figura 5.2: Momento de inércia de (a) um paralelogramo e (b) um triângulo.

No cálculo do momento de inércia de um triângulo em relação a um eixo que passa por sua base (figura 5.2b), obtemos a área de um elemento infinitesimal por semelhança de triângulos:

$$\frac{l}{b} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow l = b \cdot \frac{(h-y)}{h} \Rightarrow dA = b \cdot \frac{(h-y)}{h} dy$$

e a equação $I_z = \int_A y^2 dA$ resultará,

$$I_z = \int_0^h y^2 \cdot b \cdot \frac{(h-y)}{h} dy = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

O método de cálculo ilustrado pelos exemplos acima pode ser usado no caso geral. O momento de inércia é obtido dividindo a figura em faixas infinitesimais e depois integrando-as pela equação $I_z = \int_A y^2 dA$.

O cálculo, muitas vezes, pode ser simplificado no caso da figura poder ser dividida em partes cujos momentos de inércia em relação ao eixo sejam conhecidos. Em tal caso, o momento de inércia total, é a soma dos momentos de inércia de todas as partes.

5.2. Translação dos eixos. Teorema dos eixos paralelos (ou de Steiner)

Se o momento de inércia de uma área em relação a um eixo z que passa por seu centro de gravidade (figura 5.3) é conhecido, o momento de inércia em relação a qualquer eixo paralelo a esse eixo z pode ser calculado pela equação conhecida pelo nome de teorema dos eixos paralelos (ou de Steiner):

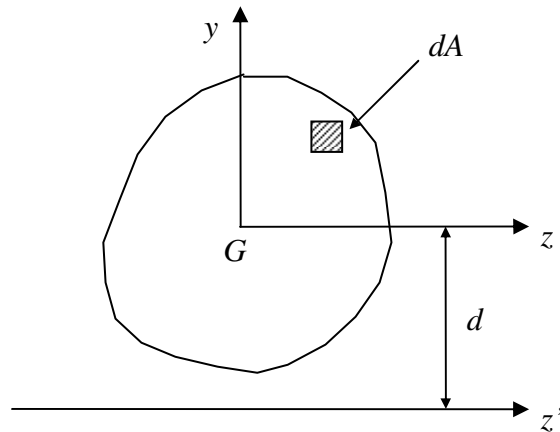


Figura 5.3: Teorema dos eixos paralelos (ou de Steiner).

$$I_z' = I_z + A \cdot d^2$$

em que A é a área da figura e d é a distância entre os eixos. Este teorema pode ser provado como se segue.

Em vista de $I_z = \int_A y^2 dA$ podemos escrever,

$$I_z' = \int_A (y + d)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2 \int_A y \cdot d dA + \int_A d^2 dA$$

A primeira integral do segundo membro é igual a I_z , a terceira igual a $A \cdot d^2$ e a segunda é nula devida ao fato do eixo passar pelo centro de gravidade, de modo que a equação fica reduzida à equação $I_z' = I_z + A \cdot d^2$. Esta equação é muito útil, especialmente para o cálculo dos momentos de inércia das seções transversais de vigas compostas. As posições dos centros de gravidade das diversas partes componentes, isto é, dos diversos perfis (cantoneiras, etc...) bem como seus momentos de inércia em relação a eixos passando por seus centros de gravidade, e suas áreas são dadas em diversos manuais. Por meio da translação dos eixos, o momento de inércia de uma tal seção composta em relação ao eixo dos z , pode ser calculado muito facilmente.

Ao final, traremos em apêndices, tabelas com os centróides e momentos de inércia de algumas figuras planas.

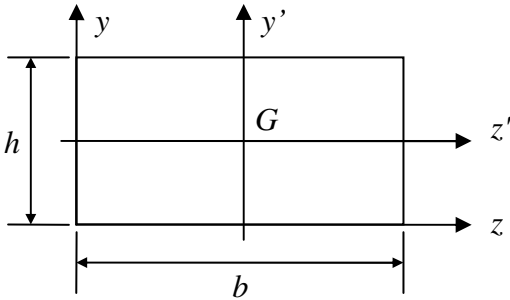
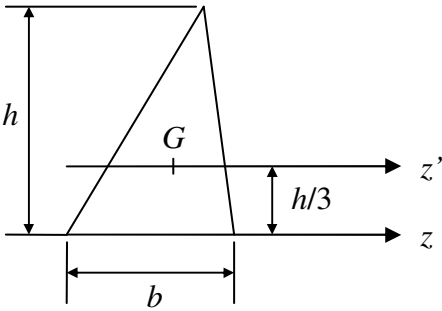
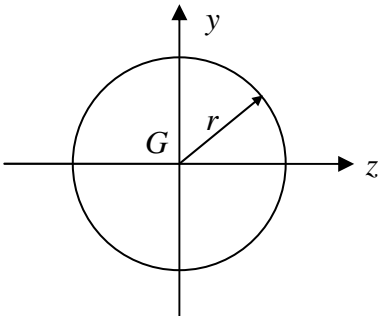
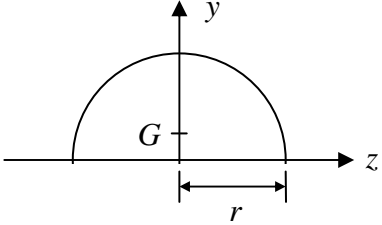
CONCLUSÃO

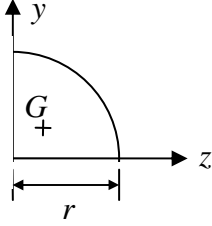
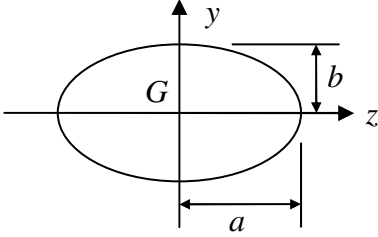
Esperamos que este trabalho tenha atingido seus objetivos, conseguindo servir de base teórica e facilitando a compreensão dos princípios básicos que fundamentam a mecânica das estruturas.

Este texto serviu-se minimamente de exercícios resolvidos por considerar que existem trabalhos de outros alunos da disciplina que cobrem de forma excelente esta lacuna.

Cabe lembrar que este trabalho seguiu uma seqüência especial de assuntos e que se trata de uma compilação de vários textos.

Apêndice: Momentos de inércia de figuras geométricas comuns

Retângulo		$I_{z'} = \frac{b \cdot h^3}{12}$ $I_{y'} = \frac{b^3 \cdot h}{12}$ $I_z = \frac{b \cdot h^3}{3}$ $I_y = \frac{b^3 \cdot h}{3}$
Triângulo		$I_{z'} = \frac{b \cdot h^3}{36}$ $I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$
Círculo		$I_z = I_y = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$
Semicírculo		$I_z = I_y = \frac{\pi \cdot r^4}{8}$

Quadrante		$I_z = I_y = \frac{\pi \cdot r^4}{16}$
Elipse		$I_z = \frac{\pi \cdot a \cdot b^3}{4}$ $I_y = \frac{\pi \cdot a^3 \cdot b}{4}$

Referências bibliográficas

- [1] ALMEIDA, E. S., Neto. *Conceitos fundamentais*. Versão preliminar. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2001.
- [2] BEER, F. P., RUSSELL, J., Jr. *Mecânica Vetorial para Engenheiros*. 5ª edição revisada. Editora Makron Books.
- [3] BEER, F. P., RUSSELL, J., Jr. *Resistência dos Materiais*. 2ª edição. Editora McGraw Hill.
- [4] HIBBELER, R. C. *Structural Analysis*. 4th edition. Prentice Hall.
- [5] MASUERO, J. R., CREUS, G. J. *Introdução à Mecânica Estrutural*. Nova Série Livro-Texto, 1ª edição. Editora da Universidade/UFRGS, 1997.
- [6] NASH, W. A. *Resistência dos Materiais*. 1ª edição reimpressa. Editora McGraw Hill, 1973.
- [7] TIMOSHENKO, S. P. *Resistência dos Materiais*. 3ª edição. Editora Livros Técnicos e Científicos.