Complementos de Mecânica Clássica – Exercício em classe

22 de setembro de 2016

Escolhi este problema do Marion para treinarmos em classe a construção da lagrangiana, a dedução da equação de movimento e sua integração, até chegar na equação horária da posição. Este problema também pode ser resolvido com as leis de Newton, de modo a facilitar a comparação das soluções. O sistema em questão não tem utilidade prática, mas podemos deduzir a equação horária com lápis e papel, sem necessidade de efetuar o cálculo numérico em um computador, uma vez que as equações horárias são analíticas.

Problema 7.10 do Marion.

Dois blocos, cada um com massa M, são conectados por um fio de comprimento L, inextensível e uniforme. Um bloco é posicionado sobre uma mesa horizontal lisa, e o outro é suspenso verticalmente por um fio que passa sem atrito por um apoio, de modo que a parte do fio acima da mesa fica esticado na direção horizontal. A aceleração local da gravidade é g.

Descreva o movimento do sistema

a) ignorando a massa do fio.
b) quando a massa do fio for m.

Roteiro para a solução da parte a) fio sem massa

1. Faça um esboço do sistema. Represente nesse esboço os eixos coordenados x e y e a origem do sistema de referência.

2. Escreva a equação de vínculo, que é uma expressão que envolve as posições dos blocos nas direções horizontal e vertical, respectivamente x e y, e **pode** envolver o comprimento do fio e constantes que marcam o ponto de apoio em relação à origem do sistema de referência. Caso defina algum parâmetro que não esteja no enunciado do problema (por exemplo, a posição do apoio no sistema de referência adotado), registre suas propriedades e, se possível, inclua uma representação no esboço.

3. Escreva a energia cinética nas coordenadas cartesianas. Escolha uma das coordenadas como coordenada generalizada e use a relação de vínculo para eliminar a outra coordenada.

4. Escreva a energia potencial nas coordenadas cartesianas e, caso necessário, use a relação de vínculo para que ela seja função da coordenada generalizada escolhida.

5. Escreva a lagrangiana e, a partir da equação de lagrange, deduza a equação de movimento.

6. Compare a equação de movimento obtida com a que se deduz pela 2ª lei de Newton.

7. Integre a equação de movimento usando como condição inicial que o bloco está inicialmente parado em um ponto determinado, de sua escolha.

Roteiro para a solução da parte b) fio com massa m

8. Determine a energia cinética do fio – note que o fio inteiro se move com a mesma velocidade que o bloco. Lembre-se que a *energia cinética* é um escalar, assim a direção da velocidade não tem importância na sua definição.

9. Determine a energia potencial do fio. Note que cada pequena parte pendurada da corda tem uma energia potencial *diferente*, de modo que você precisará integrar essa diferencial de energia potencial ao longo da corda. Atenção aos limites de integração, que devem valer para uma posição y arbitrária do bloco que está pendurado, de modo que inspecione seu esboço do item 2 com atenção para determiná-los.

10. Escreva a Lagrangiana e compare-a qualitativamente com a do item 5.

11. A partir da equação de lagrange, deduza a equação de movimento. Verifique o que mudou em relação à do item 5. Classifique a equação diferencial.

12. A equação de movimento é linear e não homogênea. No entanto, o termo que não envolve a coordenada generalizada é uma constante, de modo que há dois procedimentos para resolver essa equação.

> Tática i: absorver a constante na coordenada generalizada. Se você escolheu y como coordenada generalizada, substitua essa coordenada por $y' = y - \frac{ML}{m}$ ou $y' = y + \frac{ML}{m}$, conforme a orientação do seu eixo. Se você escolheu x como coordenada generalizada, a mudança é parecida. Você deve fazer uma translação de coordenadas para transformar a equação de movimento em uma equação diferencial linear e **homogênea**, caso em que a solução é obtida da maneira descrita no item 13 abaixo.
>
> Tática ii: a solução geral é a solução da homogênea somada com uma solução particular, que, neste caso, é uma constante α; determine essa solução particular e veja no item 13 abaixo como resolver a equação homogênea.

13. A equação de movimento é linear a coeficientes constantes e de 2ª ordem, e aqui vamos resolver a equação homogênea, que é o que falta após aplicar a manobra matemática de uma das táticas i e ii do item 12. A solução, então, será $Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}$ em que as todo-importantes grandezas p_1 e p_2 são as raízes da equação característica obtida pela substituição da solução formal e^{pt} na equação diferencial. As duas constantes A e B serão determinadas pelas condições iniciais do movimento.

14. Determine as constantes da equação horária usando as mesmas condições iniciais do item 7 acima.

15. Devemos ver como esse resultado se comporta quando $m \ll M$ – é sempre importante verificar se o movimento previsto nas condições limites é o que se obtém usando essas condições desde o início da solução. Note que, nessa situação, para t pequeno, os expoentes são pequenos, de modo que podemos expandir as exponenciais em série de Taylor em torno de $t = 0$. Compare essa aproximação com o resultado obtido no item 7.

16. Em casa, compare os resultados dos itens 7 e 14 para alguns valores da razão m/M, a fim de enxergar como um cosseno hiperbólico pode virar uma parábola, com os parâmetros apropriados.