

## Complementos de Mecânica - Exercícios em classe – 1/9/2016

O princípio de Fermat, de que a luz se propaga de um ponto a outro pela trajetória que demora o menor tempo que é compatível com sua velocidade nesses meios, permite deduzir a lei de Snell. Essa demonstração pode ser realizada de várias maneiras; para uma demonstração puramente geométrica, veja o livro do Feynman, capítulo 26 do volume I ([http://www.feynmanlectures.caltech.edu/I\\_26.html](http://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_26.html)).

Aqui, nosso foco é nos multiplicadores de Lagrange. Para demonstrar a lei de Snell, siga os passos abaixo.

- a. Faça um esboço de um raio de luz que atravessa uma interface entre dois meios, saindo de um ponto P no meio 1, em que a velocidade da luz é  $v_1$ , para um ponto Q no meio 2, em que a velocidade da luz é  $v_2$ .
- b. Marque os ângulos de incidência e refração,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ .
- c. Escolha um sistema de referência  $xOy$  de modo que o eixo  $Ox$  esteja sobre a interface.
- d. Identifique as coordenadas  $y$  de P e Q com os nomes  $a$  e  $b$  e a distância entre P e Q ao longo do eixo  $Ox$  por  $r$ .
- e. Escreva uma equação para o tempo de percurso da luz,  $T$ , que envolva apenas  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $a$  e  $b$ ,  $v_1$  e  $v_2$ .
- f. Escreva uma equação para  $r$  que envolva as grandezas usadas na equação para  $T$ :  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $a$  e  $b$ ; dessa equação, deduza a relação de vínculo  $\varphi(\theta_1, \theta_2) = 0$ . Note que, qualquer que seja o percurso da luz, o ponto em que ela incide na interface é o ponto em que ela inicia sua propagação no meio 2, por isso escolhemos a distância entre P e Q medida ao longo do eixo  $Ox$  para desenvolver a equação de vínculo.
- g. Adote o método dos multiplicadores de Lagrange para escrever as equações que permitem determinar o mínimo da função  $T + \lambda \varphi$ .
- h. Elimine o multiplicador de Lagrange  $\lambda$  das equações obtidas e verifique a Lei de Snell.

Obs.: Se as equações que você obteve no item g ficarem complicadas, você perdeu alguma simplificação ou errou alguma derivada. Verifique, corrija e simplifique, até que o resultado se pareça com o que você necessita para mostrar a lei de Snell.