# Complementos de Mecânica Clássica – Exercício em classe

26 de setembro de 2016, Vito R. Vanin

Escolhi este problema para treinarmos em classe a construção da lagrangiana em uma situação em que esse é o melhor caminho para encontrar a equação de movimento.

## Problema

Um haltere é formado por duas esferas, cada uma com massa $M$, ligadas por uma barra de comprimento $L$, uniforme e indeformável, cuja massa pode ser ignorada em relação a $M$. As dimensões da esfera são pequenas em relação à barra. Esse haltere é posicionado junto a um canto de parede lisa, em um lugar em que o piso também é liso, de modo que o atrito pode ser ignorado. O haltere, que forma inicialmente um ângulo $\theta_o$ com a parede, cai movendo-se em um **plano vertical**. A aceleração local da gravidade é $g$.

a) Encontre a equação de movimento do sistema.
b) Adote $L$ = 1 m, $g$ = 9,8 m/s$^2$ e integre numericamente a equação de movimento. Determine o tempo para a queda do halter quando $\theta_o$= 15º; 30º; 45º e 60º.

## Roteiro para a solução

### a) *Obtenção da equação de movimento*

1. Faça um esboço do sistema. Represente nesse esboço os eixos coordenados $x$ e $y$, a origem do sistema de referência, e o ângulo $\theta$ que o halter forma com a parede

2. A equação de vínculo entre as posições das esferas do halter é uma função quadrática de $x$ e $y$. Quando isso acontece, raramente vale a pena usá-la para eliminar uma das variáveis. Assim, escreva as posições das duas massas do halter em função de $L$ e $\theta$.

3. Escreva a energia cinética $T$ nas coordenadas cartesianas e use as equações do item 2 para transformar as derivadas de $x$ e $y$ em derivadas de $\theta$ e obter $T$ como função de $\theta$.

4. Escreva a energia potencial nas coordenadas cartesianas e transforme-a para uma função de $\theta$.

5. Escreva a lagrangiana e verifique que você pode usar $\theta$ como coordenada generalizada.

6. Deduza a equação de movimento. Você conhece algum outro sistema que tenha uma equação de movimento parecida (com uma diferença de sinal muito importante)? Especifique o limite de validade dessa equação de movimento.

7. Note que a aproximação de pequenos ângulos é pouco útil neste problema, embora ajude a compreender qualitativamente o movimento.

Esse problema foi sugerido pelo Prof. Otaviano Helene

## Procedimento para integrar a equação de movimento em uma planilha

Leia as seções 9.5 e 9.6 do livro *Feynman Lectures on Physics*, onde está apresentado o procedimento que usaremos. Ele é particularmente interessante neste caso, em que a aceleração não depende da velocidade.

Este procedimento baseia-se na equação de movimento, que relaciona a aceleração $a(t)$ em um instante com a posição $x(t)$ naquele instante, $a(x;t)$, e ao conhecimento da posição e velocidade iniciais, $x(0)$ e $v(0)$, se escolhemos começar do instante $t$ = 0 s.

i) Calcule $a(0) = a(x(0); t = 0)$

ii) Escolha um intervalo $\Delta t$ pequeno, digamos 0,05 s, e calcule

$$v(\Delta t) \cong v(0) + a(0) \cdot \Delta t \qquad (1)$$

iii) Calcule a posição em um instante posterior. Quando estimamos a velocidade instantânea nos movimentos filmados dos experimentos virtuais, usamos a velocidade média em um intervalo simétrico em torno do instante de interesse

$$\bar{v}_{[t_{i-1};i+1]x} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

que é mais preciso que usar a equação (1) (veja o guia do sítio do fisfoto sobre o assunto, [http://www.fep.if.usp.br/~fisfoto/guias/integracao_numerica_2015.pdf](http://www.fep.if.usp.br/~fisfoto/guias/integracao_numerica_2015.pdf), para uma interpretação gráfica dessa propriedade). Dessa expressão, calculamos

$$x(t_{i+1}) = x(t_{i-1}) + v(t_i)(t_{i+1} + t_{i-1})$$

Portanto, calculamos

$$x(2\Delta t) = x(0) + v(\Delta t)(2\Delta t) \qquad (2)$$

iv) Com esse valor de posição, pode-se calcular a aceleração

$$a(2\,\Delta t) = a(x(2\,\Delta t); 2\,\Delta t) \qquad (3)$$

v) e com ela a nova velocidade,

$$v(3\,\Delta t) \cong v(\Delta t) + a(2\,\Delta t) \cdot 2\Delta t \qquad (4)$$

vi) Itere o processo. As equações (2), (3) e (4), podem ser repetidas indefinidamente, uma vez que todos os valores necessários ao seu cálculo são conhecidos. A equação (1) é necessária para dar início ao processo e é usada uma única vez.

A planilha abaixo, extraída direto do programa, refere-se a este problema, com as condições iniciais $\theta$=15º e $\omega$ = 0 em $t$ = 0 s, com $g$ = 9,8 m/s$^2$ e $L$ = 1 m. Note que, pela natureza do problema, o cálculo perde o sentido depois que $\theta$ = 90º = π/2 rd ~ 1,57 rd. Da tabela se deduz que o tempo de queda da barra, nessa situação, é pouco maior que 0,8 s. Se queremos um resultado mais preciso, basta reduzir $\Delta t$.

Tabela. Planilha que ilustra o esquema de integração numérica da equação de movimento deste problema, quando as condições iniciais são $\theta_o$ =15º e $\omega_o$ = 0 em $t$ = 0 s, com $g$ = 9,8 m/s$^2$ e $L$ = 1 m. O valor de $\theta$ em $t$ = 0,9 s não tem sentido físico neste problema, mas pode ser usado para estimar o instante de queda $t_{queda}$, por interpolação linear entre os valores $(t,\theta)$ =(0,8; 1,511) e (0,9;1,982). A caixa tracejada destaca a região da planilha que tem que ser programada com funções que fazem referência relativas e absolutas de modo a poderem ser copiadas para as células abaixo e repetir o esquema de cálculo das expressões 2 a 4. Os valores das duas primeiras linhas são a base do processo e a inserção desses valores e fórmulas não se repete ao longo da planilha.

| $t$ (s) | $\theta$ (rd) | $\omega$ (rd/s) | $a$ (rd/s$^2$) |
|---|---|---|---|
| 0 | **0,262** | **0,000** | 2,536 |
| 0,05 | | 0,127 | |
| 0,1 | 0,274 | | 2,656 |
| 0,15 | | 0,392 | |
| 0,2 | 0,314 | | 3,024 |
| 0,25 | | 0,695 | |
| 0,3 | 0,383 | | 3,664 |
| 0,35 | | 1,061 | |
| 0,4 | 0,489 | | 4,606 |
| 0,45 | | 1,522 | |
| 0,5 | 0,642 | | 5,865 |
| 0,55 | | 2,108 | |
| 0,6 | 0,852 | | 7,378 |
| 0,65 | | 2,846 | |
| 0,7 | 1,137 | | 8,892 |
| 0,75 | | 3,735 | |
| 0,8 | 1,511 | | 9,782 |
| 0,85 | | 4,714 | |
| 0,9 | 1,982 | | 8,983 |