

Atividade de treinamento 2 - Introdução:

Esta atividade tem dois objetivos:

- 1) Apresentar os conceitos de distribuições contínuas de carga e momento de dipolo
- 2) Revisar técnicas de cálculo e sistemas de coordenadas

A) Distribuições contínuas de carga

Frequentemente não é possível tratar um certo conjunto de cargas individualmente (devido ao seu elevado número e insuficiente informação da exata localização de cada carga – os 10^{23} elétrons presentes em algumas gramas de uma substância, por exemplo). Define-se então uma densidade local de cargas que corresponde à concentração média de cargas dentro de uma região limitada do espaço, suficientemente pequena, ao redor de um ponto do espaço (quanto é “pequena” depende da precisão exigida e da variabilidade da concentração de cargas de um ponto a outro). Podem-se definir 3 tipos de densidade de carga:

1- Densidade linear, λ 

Para objetos filiformes, retilíneos ou não, é conveniente definir a carga elétrica por unidade de comprimento (em C/m, no SI). Um fio uniformemente carregado com $2\mu\text{C}$ no total e 0,5 m de comprimento teria uma densidade linear de $\lambda=4\mu\text{C/m}$. No caso da distribuição não ser uniforme esta densidade será uma função da posição, geralmente o comprimento s ao longo do fio: $\lambda(s)$, ou outra forma de localização de um ponto no fio.

2- Densidade superficial, σ 

É a carga por unidade de área de uma superfície, plana ou não (em C/m^2 no SI). Este tipo de densidade é frequentemente encontrada, porque as elétricas cargas tendem a se acumular nas superfícies dos condutores. Uma esfera condutora com carga de $2\mu\text{C}$ e raio de 1cm deverá ter uma densidade superficial média de $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} = 1,59 \times 10^{-3} \text{C/m}^2$. Caso a distribuição não seja uniforme (devido, por exemplo, à polarização de provocada por um objeto carregado nas proximidades), a densidade poderá depender da posição na superfície da esfera. Um sistema de coordenadas natural para isto seria o de coordenadas esféricas, r , θ e φ . Neste caso a densidade superficial seria descrita por uma função destas coordenadas $\sigma(r, \theta, \varphi)$ (que no exemplo em questão, poderia ser simplificada para $\sigma(\theta, \varphi)$, já que $r=R$ sempre).

3- Densidade volumétrica, ρ 

A densidade de carga volumétrica ou simplesmente densidade de carga, seria a carga por unidade de volume (C/m^3 no SI). É a forma mais geral de densidade, mas normalmente requer a especificação de 3 coordenadas, por exemplo $\rho(x, y, z)$ ou $\rho(r, \theta, \varphi)$. O semiconductor é um tipo de material que, quando polarizado, tende a apresentar a carga distribuída em todo o seu volume, e não somente em uma superfície. Mesmo os condutores, em uma escala mais microscópica, tem a carga distribuída não exatamente em uma superfície matemática bi-dimensional, mas em uma superfície com determinada espessura (um volume, portanto), que pode ser de várias camadas atômicas.

Dada uma distribuição de carga, obtém-se a carga total Q por integração $Q = \int dq$ onde dq é o *elemento de carga*, de acordo com o tipo de densidade envolvida: $dq = \lambda ds$ (onde ds é o elemento de comprimento da coordenada linear), $dq = \sigma da$ (da é o elemento de área) ou $dq = \rho dv$ (dv é o elemento de volume). Na física, em muitos problemas pode-se assumir que a partir de determinada escala de dimensões suficientemente pequenas, a densidade (de qualquer tipo que seja) é aproximadamente constante,

isto é, varia pouco ao redor de um dado ponto P (note que isto não é verdadeiro em escala atômica! A escala não pode ser pequena “demais” - a região do espaço deve conter um número suficiente de partículas para que se possa obter uma densidade de carga média). A ideia é que a carga Δq contida em certa região pequena do espaço é dada, aproximadamente, pelo produto da densidade em um ponto interior do espaço pelo tamanho daquela região do espaço. No limite matemático de dimensões tendendo a zero temos os elementos diferenciais infinitesimais mencionados acima.

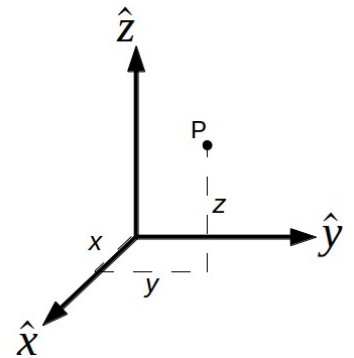
Para cada tipo de sistema de coordenadas, estes elementos infinitesimais são descritos de forma diferente. A seguir serão apresentados os sistemas de coordenadas mais usuais.

B) Sistemas de coordenadas

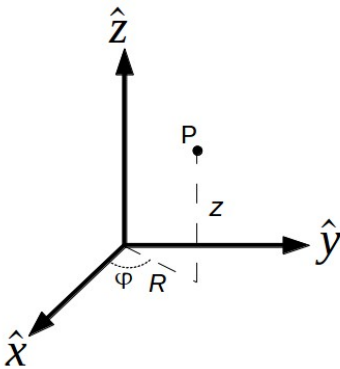
Diversos sistemas de coordenadas permitem localizar um determinado ponto no espaço tridimensional com relação a uma origem (ou ponto O do sistema). A escolha do sistema mais conveniente para cada caso depende do tipo de simetria envolvida no problema físico. Os mais frequentemente utilizados são:

1- Sistema de coordenadas cartesianas

Este é o sistema usual de 3 coordenadas mutuamente ortogonais. O ponto P é especificado por (x,y,z) . A origem O, é claro, está em $(0,0,0)$. Nestas coordenadas o elemento de volume é dado por: $dv=dx dy dz$. Em uma superfície plana, digamos, no plano xy, o elemento de área seria $da=dx dy$. Em uma linha reta, por exemplo paralela ao eixo z, o elemento de comprimento seria $ds=dz$.



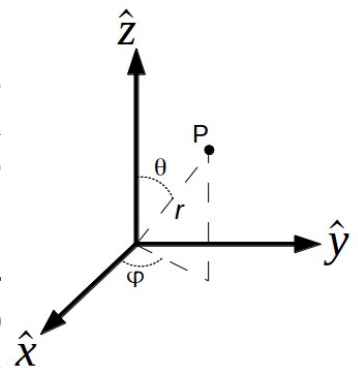
2- Sistema de coordenadas cilíndricas



Neste sistema o ponto $P(R,z,\varphi)$ é especificado por duas coordenadas lineares (R e z) mutuamente perpendiculares, e uma coordenada angular (φ). A coordenada R é medida da origem até a projeção do ponto P no plano xy. O ângulo φ mede o ângulo da reta R com relação ao eixo x. O elemento de volume neste caso é dado por: $dv=R d\varphi dR dz$. Um elemento de área de uma superfície cilíndrica (com eixo de simetria passando pelo eixo z) seria $da=R d\varphi dz$. Um arco de círculo de raio R paralelo ao plano xy teria elemento de comprimento $ds=R d\varphi$.

3- Sistema de coordenadas esféricas

Neste sistema há duas coordenadas angulares (φ e θ) e uma linear r que especificam a posição do ponto, $P(r,\theta,\varphi)$. A coordenada r mede diretamente a distância da origem ao ponto P (é o módulo do vetor posição \vec{r}), θ é o ângulo entre o eixo z e a reta r , e φ é, como no caso de coordenadas cilíndricas, o ângulo entre o eixo x e a reta que passa da origem à projeção de P no plano xy. O ângulo θ é limitado de 0 a π , enquanto o ângulo φ pode variar de 0 a 2π . O elemento de volume é dado por $dv=r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr$. O elemento de área na superfície de uma esfera seria $da=r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$. Um comprimento ao longo de um “meridiano” (um círculo num plano paralelo ao eixo z) da esfera seria $ds=r d\theta$ e ao longo de um “paralelo” (um círculo paralelo ao plano xy): $ds=r \sin\theta d\varphi$.

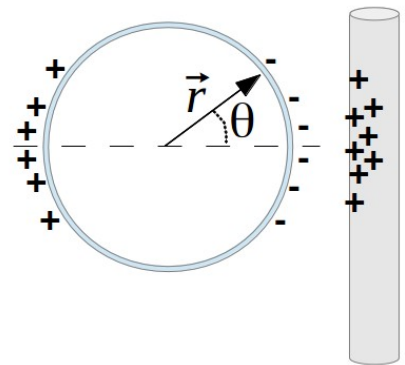


C) Momento de dipolo de uma distribuição de carga

Define-se o *momento de dipolo* de uma distribuição de carga como sendo a integral: $\vec{P} = \int \vec{r} dq$. A carga total $Q = \int dq$ seria o *momento de monopolo* da distribuição. Um dipolo, normalmente constituído de duas cargas iguais em módulo mas de sinais opostos afastadas de uma certa distância, tem carga total zero, portanto o seu momento de monopolo também é zero, mas seu momento de dipolo não é zero. Por outro lado, um sistema pode ter carga não nula e momento de dipolo também não nulo – não confundir dipolo com momento de dipolo. Uma carga $Q=1,0 \text{ nC}$ distribuída ao redor do ponto $\vec{r}=3\hat{y}$ tem momento de dipolo $\vec{P}=3,0 \times 10^{-9} \text{ Cm } \hat{y}$ (o momento de dipolo depende em geral do sistema de referência – se a carga estivesse na origem teria momento de dipolo zero), mas não é um dipolo. Um dipolo tem um momento de dipolo que é independente do sistema de referência (mas tem carga total zero).

Exemplo:

Suponhamos que um anel metálico esteja inicialmente descarregado. A seguir aproxima-se dele um bastão eletrizado positivamente (vide figura). Aparecerá no anel, por polarização, uma distribuição de carga não uniforme, a carga negativa tendendo a se aproximar do bastão, e a positiva concentrando-se do outro lado. Neste caso, para descrever o sistema é conveniente usar uma distribuição linear de carga (desprezando-se a espessura do anel) dependente da coordenada angular θ . Imagine um pequeno trecho do anel ao redor de um ponto na extremidade do vetor posição. O elemento de carga será dado por $dq = \lambda ds$ e o elemento de comprimento por $ds = r d\theta$ (em coordenadas esféricas com O no centro do anel, mas poderia ser usado um sistema de coordenadas cilíndricas $ds = R d\varphi$ – só mudariam as letras das coordenadas).



Suponhamos agora que as condições sejam tais que a carga se distribua de acordo com a fórmula:

$$\lambda(\theta) = -\lambda_0 \cos \theta$$

Onde λ_0 é uma constante positiva. A partir desta expressão podemos determinar:

- (a) A carga total Q do anel (deve dar zero...).
- (b) O módulo da carga de cada metade (direita ou esquerda) do anel $Q_{1/2}$.
- (c) O momento de dipolo da distribuição de carga do anel \vec{P} .

(a) $Q = \int dq = \int \lambda ds = \int_0^{2\pi} (-\lambda_0) \cos \theta r d\theta = -\lambda_0 r \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = -\lambda_0 r [\sin \theta]_0^{2\pi} = -\lambda_0 r (\sin(2\pi) - \sin(0)) = 0$

(b) $Q_{1/2} = -\lambda_0 r \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos \theta d\theta = -\lambda_0 r [\sin \theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -\lambda_0 r ((-1) - (+1)) = 2\lambda_0 r$ (Aqui integramos somente a metade esquerda do anel, que em carga positiva, para obter o módulo da carga).

(c) $\vec{P} = \int \vec{r} dq = \int (x\hat{x} + y\hat{y})(-\lambda_0)r d\theta = \int (r \cos \theta \hat{x} + r \sin \theta \hat{y})(-\lambda_0)r \cos \theta d\theta = -\lambda_0 r^2 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \hat{x} + \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \hat{y} \right)$

A primeira integral é $\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi$, enquanto a segunda é nula (use relações trigonométricas para deduzir estes resultados). Em conclusão, $\vec{P} = -\lambda_0 \pi r^2 \hat{x}$, isto é, o momento de dipolo é um vetor na direção de x negativo, como seria de se esperar, e seu módulo é proporcional à área do anel (isto ocorre “por acaso”).

A seguir estão apresentados 3 exercícios para tentar aplicar estes conceitos. Os procedimentos são análogos aos do exemplo. Em casos bi e tri-dimensionais será necessário realizar integrais múltiplas. É conveniente revisar os conceitos e técnicas de cálculo para aplicar nestes exercícios. Parte destes conceitos não são normalmente apresentados no curso de física III neste momento mas, se forem dominados, trarão grandes vantagens para os assuntos que serão estudados mais adiante, quando serão aplicados em situações conceitualmente mais complexas, para o cálculo do campo elétrico, por exemplo.

Atividade 2 - Treinamento

1) Um fio retilíneo é carregado com uma densidade linear de carga dada pela equação:

$$\lambda(x) = \lambda_0 \left(\frac{x}{l}\right)^3$$

onde x é a coordenada linear ao longo do fio, com origem no centro, l é o comprimento total do fio

Dados: $\lambda_0 = 0,8 \text{ nC/cm}$; $l = 0,2 \text{ m}$.

- Determine a carga total Q do fio.
- Determine o módulo da carga $Q_{1/2}$ de cada metade do fio.
- Determine o momento de dipolo do fio.

2) Uma semi-esfera está carregada com uma densidade de carga distribuída conforme a eq.:

$$\rho(r, \theta) = 3\rho_0 e^{\left(\frac{r}{R_0}\right)^3} \cos(\theta)$$

onde a coordenada angular θ é o ângulo polar com relação ao eixo z , perpendicular ao plano de corte da esfera, e R_0 é o raio da esfera. Determine a carga total da esfera em termos dos parâmetros R_0 e ρ_0 .

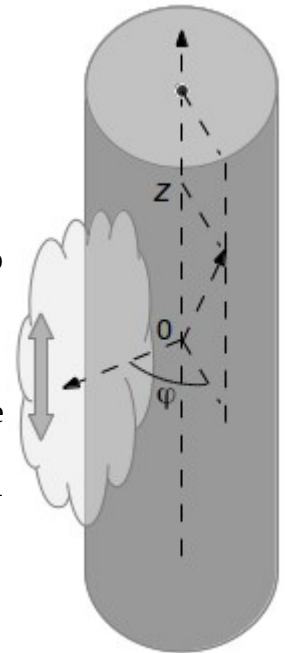
3) Um bastão de plástico de 2 cm de diâmetro e $l = 20 \text{ cm}$ de comprimento é eletrizado por atrito ao ser esfregado com um pano. Supondo que a densidade superficial de carga gerada na superfície do cilindro seja dada por:

$$\sigma(z, \varphi) = \frac{\sigma_0}{a_0} \left(\left(\frac{l}{2}\right)^2 - z^2 \right) \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Onde z é a coordenada linear ao longo do eixo do cilindro, com origem no centro do cilindro, e φ é a coordenada angular em torno do eixo do cilindro.

Determine:

- a carga total Q na superfície do cilindro
- o valor máximo σ_M da densidade superficial e as coordenadas z_M e φ_M em que este máximo se localiza.
- a equação $\varphi(z)$ que define a linha da superfície do cilindro sobre a qual $\sigma = \frac{\sigma_0}{2}$.
- os valores máximos de z e de φ (z_m e φ_m) ao longo desta linha.



DADOS: $\sigma_0 = 600 \mu\text{C/m}^2$; $a_0 = 0,01 \text{ m}^2$.

Respostas:

1) **a)** $Q = 0.$; **b)** $Q_{1/2} = 0,25\text{nC}$; **c)** $\vec{P} = 4 \times 10^{-11} \text{Cm } \hat{x}$

2) $Q = 9 \pi \rho_0 R_0^3 (e - 1) = 48,6 \rho_0 R_0^3$

3) **a)** $Q = 2,5 \mu\text{C}$; **b)** $\sigma_M = \sigma_0 = 600 \mu\text{C}$; $z_M = 0$; $\varphi_M = 0$; **c)** $\varphi = 2 \arccos \sqrt{\frac{a_0}{2(\frac{l^2}{4} - z^2)}}$;

d) $\varphi_{m\varphi} = \frac{\pi}{2}$; $z_{mz} = 7,07 \text{cm}$