

MATÉRIA

1

DATA

PTC 2419 - Controle Digital

Prof. Ricardo

Sala C2-01

email: rpm@lac.usp.br

### Programa

1. Introdução

2. Sinais amostrados; Conversores A/D e D/A; Transformada Z; Função de Transferência; Estabilidade; outros tópicos básicos

3. Aproximações discretas; outros tópicos relacionados

4. Controladores PID discretos

5. Técnicas de projeto discreto: LGR, Projeto algébrico, Projeto no domínio da frequência, etc.

### Referências

Ogata K. Discrete-time control systems, 2nd ed. (1st ed também serve)

Franklin G.F., Powell J.D., Workman M.L. Digital Control of Dynamic Systems  
3r.ed. (outras edições servem)

Castrucci P.B.L., Moura Sales, R., Controle Digital

Avaliação

$$\text{Média} = \frac{P1 + P2 + P3}{3}$$

sem prova substitutiva!

eventuais trabalhos com o Matlab poderão melhorar a nota.

Requisitos

Conhecimentos de Controle I

Outros

Matlab (qq versão - se mais recente melhor)

Moodle : <http://moodle.stoa.usp.br>

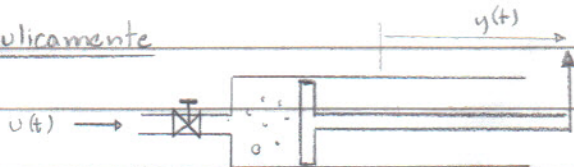
1. Introdução

Controle digital = "Controle para computadores"

A partir dos anos 30, com o advento da teoria de controle, implementar um controlador passou a significar também "realizar fisicamente a solução de uma equação diferencial".

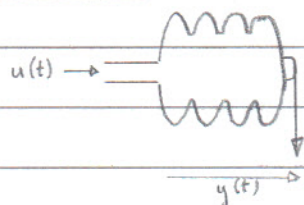
Exemplo:  $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$ ; (um integrador)

Hidraulicamente

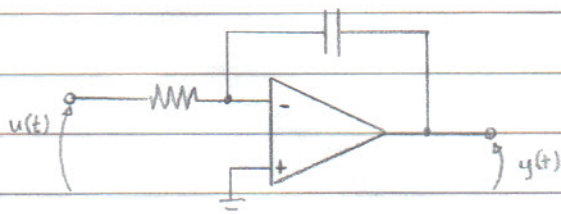


O deslocamento  $y(t)$  do pistão é proporcional à integral da vazão volumétrica  $u(t)$

Pneumaticamente



O deslocamento  $y(t)$  do fole é proporcional à integral da vazão volumétrica  $u(t)$

Eletrônica analógica

A tensão  $y(t)$  é proporcional à integral da tensão  $u(t)$   
Isso é computação analógica!

Em computador

?

(ver fotos históricas)

Quais são os pontos relevantes para implementação em computador?

Um pouco de terminologia

CAD : (computer aided design) computador como ferramenta  
para projeto (desde os anos 40)

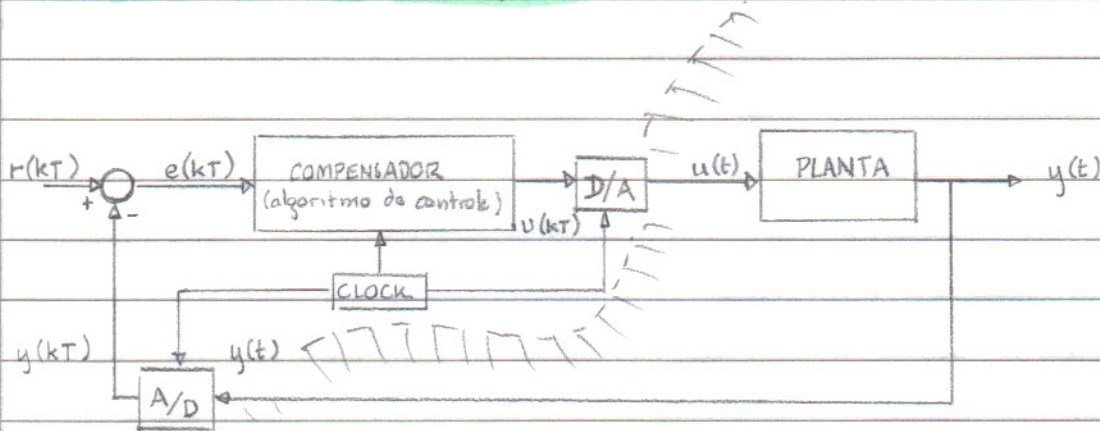
Supervisory Control : computador faz otimização e geração  
de setpoints (1954 - Digital - navegação)  
(1959 - RW300 - refinaria)

DDC : (direct-digital control) a malha é fechada através do computador  
(1959 - RW300 - refinaria)  
(1962 - Ferranti 200 - processo químico)

Só nos interessa o caso em que  $t \in \{0, T, 2T, 3T, \dots\}$  com  $T \in \mathbb{R}^+$  constante ("amostragem periódica"), ou seja  $t = kT$  para  $k \in \mathbb{N}^+$ .  $T$  é chamado "período de amostragem".

Vamos usualmente ignorar os efeitos da quantização, salvo quando eles forem importantes. (às vezes podem ocorrer problemas)

2.2 Elementos de um sistema DDC



Computador Digital (tempo discreto)      Mundo Físico (tempo contínuo)

A/D : Conversor analógico digital

Discretiza o sinal a uma dada frequência

Quantiza o sinal. Hoje em dia são usuais conversores A/D de 10 a 24 bits para um determinado range de entrada.

10 bits =  $2^{10}$  valores = 1024 valores  $\approx 0,098\%$  do range

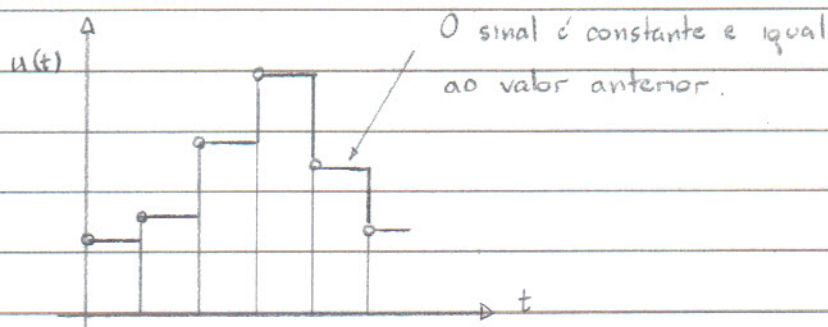
24 bits =  $2^{24}$  valores = 16 777 216 valores  $\approx 0,000 006\%$  do range

D/A : Conversor digital analógico

Converte o sinal discreto num sinal contínuo a uma dada frequência. O sinal discreto (quantizado ou não) é quantizado pelo D/A. Hoje em dia são usuais conversores A/D de 8 a 16 bits para um determinada range de saída.

Os D/As utilizam circuitos seguradores (holders) para preencher os espaços entre os instantes de amostragem.

O mais comum (de longe) é o segurador de ordem zero (zero-order holder - ZOH)



ALGORITMO DE CONTROLE :

O objeto principal do curso !

Pontos importantes :

É uma sequência de operações, obrigatoriamente discreta.

Os computadores também quantizam os dados

Em ponto fixo : 8, 16 bits usualmente

Em ponto flutuante : 32 ou 64 bits usualmente

Em condições especiais, mesmo 64 bits de quantização podem causar problemas (a discutir no futuro)

CLOCK: Controla a frequência de amostragem

PLANTA: Sistema físico (ou não) a ser controlado

Plantas físicas existem a tempo contínuo

Sinais contínuos

$u(t)$  entrada da planta ; saída do controlador // variável manipulada

$y(t)$  saída da planta // variável controlada

Sinais discretos

$u(kT)$  saída discreta do controlador

$y(kT)$  saída discretizada da planta

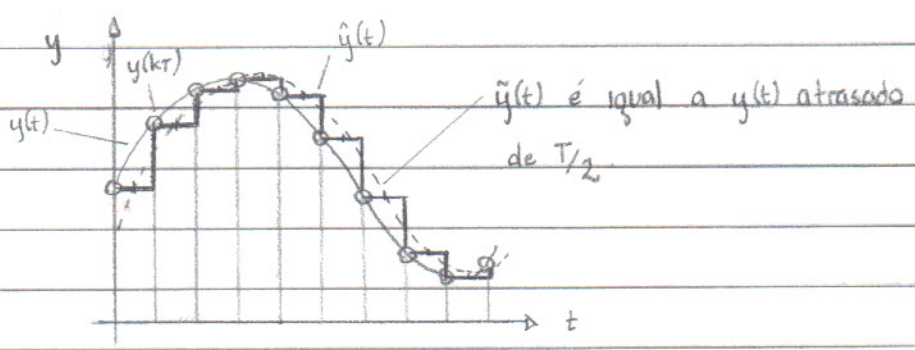
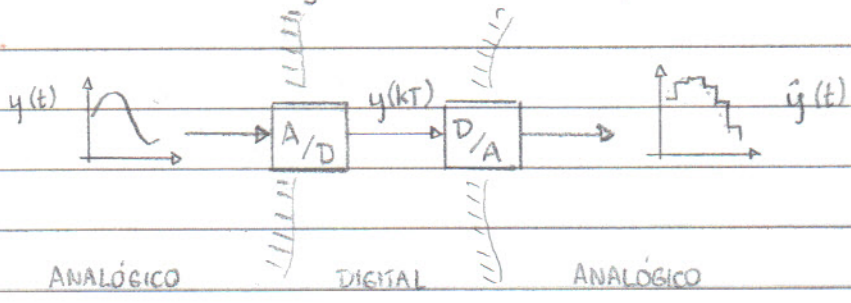
$r(kT)$  referência // set-point

$e(kT)$  erro

2.3 Efeitos do ZOH

O segurador de ordem zero tem influência sobre o sinal.

Considere a configuração abaixo (desprezando erros de quantização)



Pergunta: Qual sinal se parece mais com  $\hat{y}(t)$

$y(t)$

ou

$\tilde{y}(t)$  ← Resposta:  $\tilde{y}(t)$ !

Conclusão: A "distorsão" introduzida pelo ZOH pode ser aproximada por um atraso de meio período de amostragem

Esse "atraso" pode ser importante e ter que ser levado em conta no projeto do controle ou ser ignorado se a frequência for alta o suficiente.  
(T pequeno) (a discutir no futuro)

#### 2.4 Escolha de T

A escolha de T deve ser adequada à planta

$f = 1/T$  muito baixa: subamostragem  
Causa problemas óbvios

$f = 1/T$  muito alta: superamostragem  
Pode causar problemas nada óbvios

- problemas numéricos
- problemas com ruídos
- viabilidade técnica/econômica

(frequência custa caro!)

(a discutir no futuro)



AVRAS  
2008  
03/2010

2.5 Alguns aspectos de amostragem

Teorema da amostragem

Para que um sinal com banda limitada  $f_N$  (i.e. sem componentes espectrais para frequências maiores que  $f_N$ ) possa ser reconstruído completamente, ele deve ser amostrado a uma frequência  $f > 2f_N$ .

$f = 1/T$  é a frequência de amostragem

$f_N$  é a frequência de Nyquist

Importante: "reconstruído totalmente" quer dizer que as componentes frequenciais do sinal original podem ser identificadas e recuperadas a partir do sinal amostrado. NÃO quer dizer que o sinal amostrado seja uma representação perfeita (ou sequer boa) do sinal original, especialmente para aplicações de controle.

O que ocorre se houver componentes acima de  $f_N$  no sinal amostrado?

Ocorre "aliasing" (êi-lia-zin)

Exemplo:

Ver aliasing.m

Consequência: Toda conversor A/D deve ter um filtro passa-baixa analógico na entrada, preferencialmente com uma banda folgadoamente menor que  $f_N$  (filtro anti-aliasing)

(um ruído de alta frequência pode ser coletado como se fosse de baixa frequência)

## 2.6 Alguns aspectos dos algoritmos digitais de controle

Este curso é análogo ao de Controle I, então estudaremos técnicas análogas às daquele curso.

Uma das vantagens do controle por computadores é a flexibilidade. Praticamente qualquer estratégia de controle (não-linear, controle especialista, regras, otimização, etc.) pode ser implementada em computador, mas nesse curso isso não será abordado.

Por outro lado, as implementações de controladores lineares são usualmente melhores em computador do que as pneumáticas, hidráulicas, eletrônicas, etc. (principalmente por questões construtivas).

Hoje em dia, implementações digitais tomaram o lugar das analógicas, exceto nas casos extremos ou mais simples.

simples : \*

- \* implementação analógica mais barata que a digital
- \* controle incorporado ao sensor ou atuador

e.g. bimetais, bulbos  
válvulas com molas

extremos : \*

- \* velocidade extrema
- \* ambiente agressivo ou explosivo
- \* precisão extrema (somente aplicações científicas)

2.7 Transformada Z

Em Controle I: Plantas, Controladores (SLITs) descritos por equações diferenciais.

Ferramenta: Transformada de Laplace (1782)

Em Controle Digital: Equações de diferenças

e.g.  $y(kT) = y((k-1)T)/2$

Ferramenta: Transformada Z (Elihu Jury - 1958)

AULA 4  
2009

Definição

Seja um sinal  $f(t)$  a tempo discreto igual a  $\{f(0), f(T), f(2T), \dots\}$ .

A transformada Z unilateral deste sinal é dada por

$$Z[f(t)] = F(z) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$

onde  $z$  é uma variável complexa. (convergência, etc. Ver livros)

01/2010

A transformada Z é um artifício matemático que permitirá transformar equações de diferenças em equações polinomiais, com grandes vantagens para projeto e análise de controladores e sistemas em geral.

AULA 4  
2008

Daqui por diante vamos tirar o T da nossa notação, ou seja

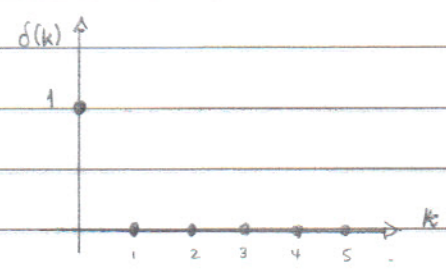
$$f(kT) \rightarrow f(k)$$

(vamos assumir sem perda de generalidade que  $T=1$ )

Transformada Z de algumas funções interessantes

a) Impulso unitário  $\delta(k)$  (delta de Kronecker)

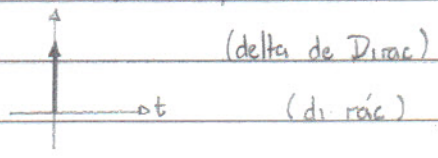
$$\delta(k) = \begin{cases} 1; & k=0 \\ 0; & k \neq 0 \end{cases}$$



daí  $\Delta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k) z^{-k} = 1$

Esta será uma das funções mais interessantes para o curso.

OBS: A função impulso  $\delta(t)$

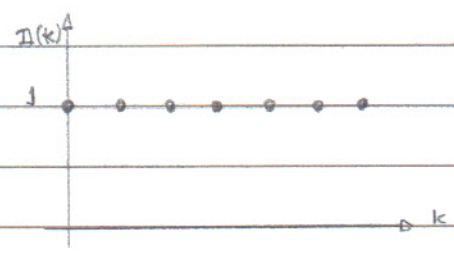


é tal que

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \Delta(s) = 1$$

b) Degrau unitário  $\Pi(k)$

$$\Pi(k) = \begin{cases} 1; & k \geq 0 \\ 0; & k < 0 \end{cases}$$



daí  $\Pi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi(k) z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$

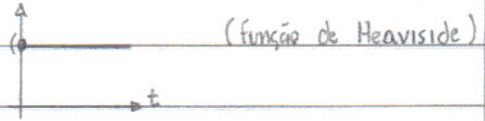
A série converge se  $|z| < 1$  (é o caso em que utilizaremos):

$$\Pi(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Função útil para:

- padronizar análise de resposta de sistemas
- setpoints.

OBS. A função  $\mathbb{1}(t)$



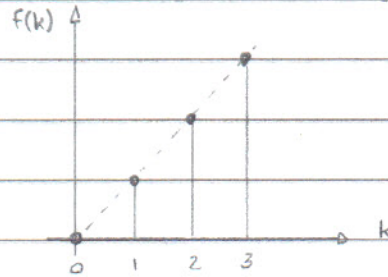
(função de Heaviside)

é tal que

$$\mathcal{L}[\mathbb{1}(t)] = \mathbb{1}(s) = \frac{1}{s}$$

c) Rampa unitária

$$f(k) = \begin{cases} kT & \text{se } k \geq 0 \\ 0 & \text{se } k < 0 \end{cases}$$



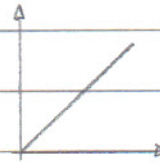
daí  $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = 0 + Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + \dots$

$$\begin{aligned} \text{daí } \frac{F(z)}{T} &= z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots = \\ &= (z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots) + (z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots) + (z^{-3} + z^{-4} + \dots) + \dots \\ &= \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{z^{-2}}{1-z^{-1}} + \frac{z^{-3}}{1-z^{-1}} + \dots \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} (z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots) = \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \end{aligned}$$

então  $F(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$  (assumindo convergência)

Mais comum que degraus em sistemas industriais

OBS: A função  $f(t)$

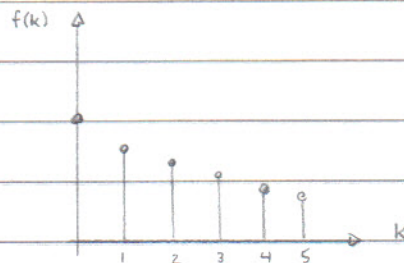


é tal que

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{1}{s^2}$$

d) Exponencial

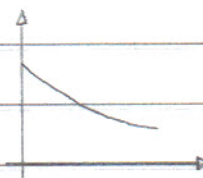
$$f(k) = \begin{cases} e^{-akT} & \text{se } k \geq 0 \\ 0 & \text{se } k < 0 \end{cases}$$



daí  $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = 1 + e^{-aT}z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2} + \dots$

$$F(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

OBS: A função  $f(t)$



é tal que

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{1}{s+a}$$

e) Sequência  $a^k$

$$f(k) = \begin{cases} a^k & \text{se } k \geq 0 \\ 0 & \text{se } k < 0 \end{cases} ; F(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z+a}$$

f) Função seno

$$f(k) = \begin{cases} \text{sen}(\omega(kT)) & \text{se } k \geq 0 \\ 0 & \text{se } k < 0 \end{cases} ; F(z) = \frac{z \cdot \text{sen}(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$$

g) Função cosseno

$$f(k) = \begin{cases} \cos \omega(kT) & ; \text{ se } k \geq 0 \\ 0 & ; \text{ se } k < 0 \end{cases} ; F(z) = \frac{z^2 - z \cdot \cos(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$$

### Propriedades da Transformada Z

a) Linearidade

Sejam  $f(k), g(k)$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$Z[\alpha f(k) + \beta g(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha f(k) + \beta g(k)) z^{-k} =$$

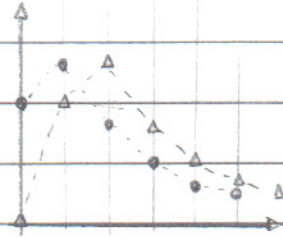
$$= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} + \beta \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} = \alpha F(z) + \beta G(z)$$

b) Atraso

Sejam  $f(k), g(k)$  tais que

$$g(k) = \begin{cases} f(k-n) & ; k \geq n \\ 0 & ; k < n \end{cases}$$

Ex.



•  $f(k)$   
 $\Delta q(k) = f(k-1)$

Seja  $m = k-n$ , daí

$$G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{-(m+n)} =$$

$$= z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{-m} = z^{-n} F(z)$$

$$G(z) = z^{-n} F(z)$$

c) Avanço

Sejam  $f(k), h(k), \hat{h}(k)$  tais que

$$\hat{h}(k) = \begin{cases} f(k+n) & ; \text{ se } k \geq -n \\ 0 & ; \text{ se } k < -n \end{cases} \quad (\text{ops! definida p/ } k < 0)$$

e

$$h(k) = \begin{cases} f(k+n) & ; \text{ se } k \geq 0 \\ 0 & ; \text{ se } k < 0 \end{cases} \quad (\text{devidamente truncada})$$

Seja  $m = k+n$ , daí

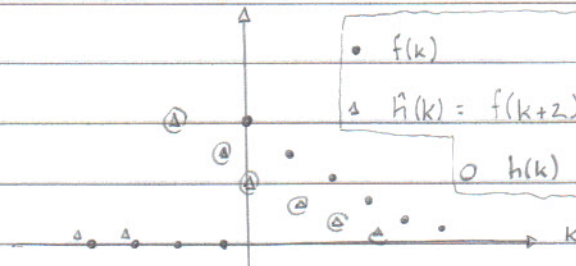
termos "avangados" de  
 antes da zero.

$$H(z) = \sum_{m=n}^{\infty} f(m) z^{-(m-n)} = z^n \left( \sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{-m} - \sum_{m=0}^{n-1} f(m) z^{-m} \right) =$$

"condições iniciais"

$$\Rightarrow H(z) = z^n \left( F(z) - \sum_{m=0}^{n-1} f(m) z^{-m} \right)$$

Ex.



•  $f(k)$   
 $\Delta \hat{h}(k) = f(k+2)$   
 $\circ h(k)$



OBS: Isso nos sugere encarar "z" como se fosse um "operador avanço"

multiplicar por "z" → avança o sinal

dividir por "z" → atrasa o sinal

Lembrar de "s" que podia ser encarado como um "operador derivada" em tempo contínuo

multiplicar por "s" → deriva o sinal

dividir por "s" → integra o sinal

Ir para pag. 18-A

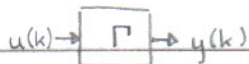
AULA 5  
2008  
2009.

Função de transferência

Seja um sistema dinâmico  $\Gamma$  a tempo discreto.

A entrada e a saída são seqüências de números.

A dinâmica do sistema pode ser descrita por uma equação de diferenças. Para um sistema SLIT:



$$y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + a_{n-2} y(k+n-2) + \dots + a_0 y(k) =$$

$$= b_m u(k+m) + b_{m-1} u(k+m-1) + b_{m-2} u(k+m-2) + \dots + b_0 u(k)$$

"n" é a ordem do sistema.

$a_i, b_j$  coeficientes constantes

A transformada Z é uma boa ferramenta para se trabalhar com a equação acima.

Temas úteis

Teorema do valor inicial

Seja  $F(z)$  a transformada  $Z$  de um sinal  $f(k)$

O valor inicial  $f(0)$  é dado por

$$f(0) = \lim_{k \rightarrow 0^+} f(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad \text{se os limites existirem.}$$

lembrando que  $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} \dots$ , quando  $z \rightarrow \infty$ , resta apenas o termo  $f(0)$

Exemplo: valor inicial do degrau unitário:

$$\mathbb{1}(z) = \frac{z}{z-1} \quad ; \quad f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z-1} = 1$$

OBS: Em tempo contínuo com transformada de Laplace

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (\text{se os limites existirem})$$

05/2010

Teorema do valor final

Seja  $F(z)$  a transformada  $Z$  de um sinal  $f(k)$  e seja

$f_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(k)$ .  $f_{\infty}$  é dado por

$$f_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) F(z) \quad \text{se os limites existirem}$$

(a prova é simples, porém mais longa)

Exemplo: valor final do degrau unitário:

$$f_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z}{z-1} = 1$$

OBS: Em tempo contínuo

$$f_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s.F(s)$$

(se os limites existirem)

OBS: Analogia

tempo (t,k)	"s"	"z"
$\rightarrow 0^+$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$
$\rightarrow \infty$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 1$

Voltar para pag. 18

Vamos desprezar as condições iniciais e aplicar a transformada Z

$$z^n Y(z) + a_{n-1} z^{n-1} Y(z) + \dots + a_0 Y(z) =$$

$$= b_m z^m U(z) + b_{m-1} z^{m-1} U(z) + \dots + b_0 U(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0) Y(z) = (b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0) U(z)$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$$

Vamos definir o que é função de transferência :

$$G(z) \triangleq \left. \frac{Y(z)}{U(z)} \right|_{\text{c.i. nulas}}$$

no nosso exemplo de estrutura :  $G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$

Observações :

\* Porque desprezar condições iniciais ?

Porque assim a FT só depende da estrutura do sistema (ela descreve o sistema e não um contexto específico). Serve para entradas e saídas genéricas

\* A FT descreve um sistema. Ela não é a transformada de uma sequência temporal (mesmo que a notação seja muito parecida)

\* Se o grau do numerador for maior que o grau do denominador o sistema é "não causal"

$m > n$  ; FT imprópria (sistema não causal)

$m = n$  ; FT própria , tbm biprópia (difícil de implementar)

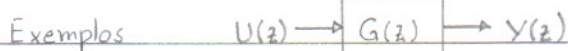
$m < n$  ; FT estritamente própria (o tipo que preferimos)

\* Note que

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-n-1} + \dots + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-n}}$$

basta multiplicar por  $\frac{z^n}{z^n}$ . Esta forma é menos intuitiva, mas

a implementação é direta. Elas são equivalentes a menos de condições iniciais (que desprezamos)



a) Seja  $G(z) = \frac{2z^2}{z^3}$  (estritamente própria)

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{2z^2}{z^3} \Rightarrow z^3 Y(z) = 2z^2 U(z)$$

No domínio do tempo:  $y(k+3) = 2u(k+2)$  (sabemos anti-transferir!)

ou

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-3} \cdot 2z^2}{z^{-3} \cdot z^3} = \frac{2z^{-1}}{1} \Rightarrow Y(z) = 2z^{-1} U(z)$$

No domínio do tempo:  $y(k) = 2u(k-1)$

Implementação no computador

Início:  $Y = 0$  ;

Início:  $UK_{-1} = 0$  ;

Loop: (a cada T segundos)

Loop: (a cada T segundos)

```

    U = readAD;
    writeDA ( Y );
    Y = 2 * U
  
```

não são a mesma coisa!

```

    UK = readAD
    YK = 2 * UK_{-1}
    writeDA ( YK )
    UK_{-1} = UK ;
  
```

AULA 6  
2008

b) Seja  $G(z) = \frac{z}{z^2 + 3z}$  (estritamente própria)

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z}{z^2 + 3z} \Rightarrow z^2 Y(z) + 3z Y(z) = z U(z)$$

ou seja:  $y(k+2) + 3y(k+1) = u(k+1)$

ou

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-2} \cdot z}{z^{-2} \cdot (z^2 + 3z)} = \frac{z^{-1}}{1 + 3z^{-1}} \Rightarrow Y(z) + 3Y(z^{-1}) = U(z^{-1})$$

ou seja:  $y(k) + 3y(k-1) = u(k-1) \Rightarrow$   
 $y(k) = -3y(k-1) + u(k-1)$

No computador:

Início:  $Y(0) = 0$  ,

Início:  $Y(0) = 0 ; U(0) = 0 ;$

Loop: for  $k = 0 : 1000$

Loop: for  $k = 1 : 1000$

```

    U(k) = readAD;
    writeDA ( Y(k) )
    Y(k+1) = -3 * Y(k) + U(k)
    waitfor T ;
  
```

não são a mesma coisa!

```

    U(k) = readAD;
    Y(k) = -3 * Y(k-1) + U(k-1)
    writeDA ( Y(k) )
    waitfor T
  
```

Note que a saída no instante  $k$ ,  $Y(k)$  depende apenas de valores nos instantes  $k-1$ , ( $Y(k-1)$  e  $U(k-1)$ ), ou seja a saída no presente depende apenas de valores no passada (o sistema é estritamente causal)

c) Seja  $G(z) = \frac{z^3}{2z+3}$  (imprópria)

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1}}{z^{-1}} \cdot \frac{z^3}{2z+3} \Rightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2}{2+3z^{-1}} \Rightarrow 2Y(z) + 3z^{-1}Y(z) = z^2U(z)$$

ou seja:  $2y(k) + 3y(k-1) = u(k+2) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow y(k) = \frac{-3y(k-1) + u(k+2)}{2}$

Ops! A saída no instante  $k$  (presente) depende da entrada no instante  $k+2$  (futuro)  
 O sistema é não-causal! Não dá para implementar.

AVLA 6  
2009

d) Seja  $G(z) = \frac{z}{z+2}$  (biprópria)

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1}}{z^{-1}} \cdot \frac{z}{z+2} \Rightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{1+2z^{-1}} \Rightarrow Y(z) + 2z^{-1}Y(z) = U(z)$$

ou seja:  $y(k) + 2y(k-1) = u(k) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow y(k) = -2y(k-1) + u(k)$

A saída no instante  $k$  depende da entrada no instante  $k$ . A implementação nesse caso é mais delicada.

06/2019

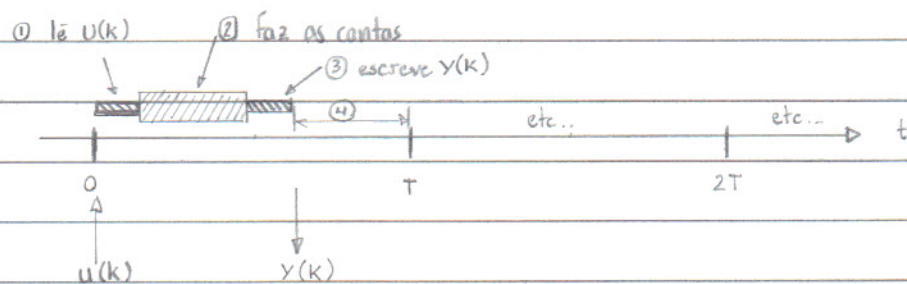
Vejamos uma implementação:

Início:  $Y(0) = 0$ ;

Loop: for  $k = 1:100$

- ①  $U(k) = \text{readAD};$
  - ②  $Y(k) = -2 * Y(k-1) + U(k);$
  - ③  $\text{writeDA}(Y(k));$
  - ④  $\text{waituntil}(T);$
- end;

Analisando as tempos



Supostamente  $Y(k)$  deve ser gerado no mesmo instante que  $u(k)$ , o que é impossível (precisaríamos de um computador infinitamente rápido)

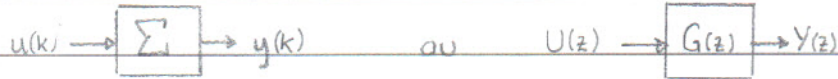
Porém, se os tempos de ① + ② + ③ forem desprezíveis perto do tempo  $T$ , dá para assumir como verdade que  $u(k)$  e  $Y(k)$  são simultâneas.

Ver algoritmo.m



Resposta impulsiva

Seja o sistema  $\Sigma$



com  $u(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k=0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$  e  $U(z) = 1$

daí como  $\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z)$ , tem-se que  $G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$ , ou

seja, a função de transferência é igual à transformada Z da resposta impulsiva  $y(k)$ , daí

$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}[G(z)]$   
 ↑ anti-transformada

Anti-transformando

Seja uma transformada  $F(z) = \frac{z}{(z-0,5)(z-1)^2} = \frac{z^{-2}}{1-2,5z^{-1}+2z^{-2}-0,5z^{-3}}$

a) Numericamente

Basta supor que  $F(z)$  seja a resposta impulsiva de um sistema hipotético.

$\frac{F(z)}{U(z)} = \frac{z^{-2}}{1-2,5z^{-1}+2z^{-2}-0,5z^{-3}} \Rightarrow z^2 U(z) = F(z) - 2,5z^{-1}F(z) + 2z^{-2}F(z) - 0,5z^{-3}F(z)$

daí  $f(k) = 2,5f(k-1) - 2f(k-2) + 0,5f(k-3) + u(k-2)$

com  $u(0)=1$  e  $u(1)=u(2)=\dots=0$ .

Por definição  $f(-3)=f(-2)=f(-1)=0$ . Não é necessário supor que  $f(0)=0$  (da definição de função de transferência).

Dai é só resolver a equação de diferenças

k	u(k)	f(k)
-3	0	0
-2	0	0
-1	0	0
0	1	0
1	0	0
2	0	1
3	0	2,5
4	0	4,25
5	0	6,125
⋮	⋮	⋮
∞	0	?

} condições iniciais

} calculado

← Não dá para usar o teorema do valor final. O limite não existe (de fato a função cresce indefinidamente)

OBS: Dá para obter uma curva da função, mas não uma forma analítica.

b) Expansão em série

$$F(z) = \frac{z^{-2}}{1 - 2,5z^{-1} + 2z^{-2} - 0,5z^{-3}}$$

Basta dividir o numerador pelo denominador.

$$\begin{array}{r}
 z^{-2} \\
 \hline
 -z^{-2} + 2,5z^{-3} - 2z^{-4} + 0,5z^{-5} \\
 \hline
 0 + 2,5z^{-3} - 2z^{-4} + 0,5z^{-5} \\
 \hline
 -2,5z^{-3} + 6,25z^{-4} - 5z^{-5} + 1,25z^{-6} \\
 \hline
 0 \quad 4,25z^{-4} - 4,5z^{-5} + 1,25z^{-6} \\
 \vdots \\
 \text{etc.}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 1 - 2,5z^{-1} + 2z^{-2} - 0,5z^{-3} \\
 \hline
 z^{-2} + 2,5z^{-3} + 4,25z^{-4} + \dots +
 \end{array}$$

Portanto  $F(z) = 0 \cdot z^0 + 0 \cdot z^{-1} + z^{-2} + 2,5z^{-3} + 4,25z^{-4} + 6,125z^{-5} + \dots$

Daí

f(k)	0	0	1	2,5	4,25	6,125	..
k	0	1	2	3	4	5	..

OBS: Novamente, dá para obter a sequência numérica, mas não uma expressão analítica

c) A partir de uma tabela de transformadas

Passos

- 1) Expandir em frações parciais
- 2) Encontrar cada fração numa tabela de transformadas
- 3) Aplicar a tabela ver tabela

$$F(z) = \frac{z^{-2}}{1 - 2,5z^{-1} + 2z^{-2} - 0,5z^{-3}} = \frac{4z}{z - 0,5} + \frac{2z}{(z-1)^2} - \frac{4z}{z-1}$$

(como fazer? Igual a Controle I - ver livros)

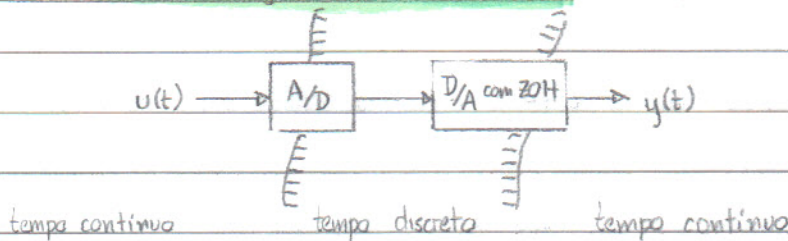
Das tabelas:  $f(k) = \begin{cases} 4(0,5)^k + 2k - 4 & \text{para } k \geq 0 \\ 0 & \text{para } k < 0 \end{cases}$

OBS: É obtida uma expressão matemática para  $f(k)$

- Se o objetivo for analisar  $f(k)$  esse método é interessante, caso contrário não há grande vantagens. A complexidade é maior, e tem que ser feito manualmente (a não ser que se use computação simbólica). Será útil posteriormente.

AULA 7  
2009

2.8 De volta ao seguidor de ordem zero



Um modelo para o processo A/D + D/A

Seja

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) \delta(t - kT) = u(0) \delta(t) + u(T) \delta(t - T) + u(2T) \delta(t - 2T) + \dots$$

atenção: amplitude infinita! energia modelada



Um sinal contínuo, modulado por um trem de pulsos (deltas de Dirac) será a primeira parte do nosso modelo. (apenas um artifício matemático) que chamaremos "impulse sampler"

Seja a transformada de Laplace de  $u^*(t)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u^*(t)] &= U^*(s) = u(0) \mathcal{L}[\delta(t)] + u(T) \mathcal{L}[\delta(t - T)] + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) e^{-kTs} \end{aligned}$$

Vamos definir

$$e^{Ts} = z \quad \text{daí} \quad s = \frac{1}{T} \ln(z) \quad (\text{importantíssimo})$$

Com isso:

$$U^*(s) \Big|_{s = \frac{\ln(z)}{T}} = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) z^{-k}$$

(é a transformada  $Z$  de  $u(t)$ )

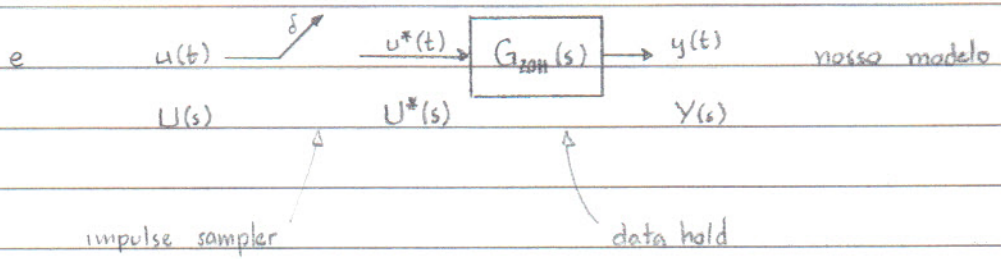
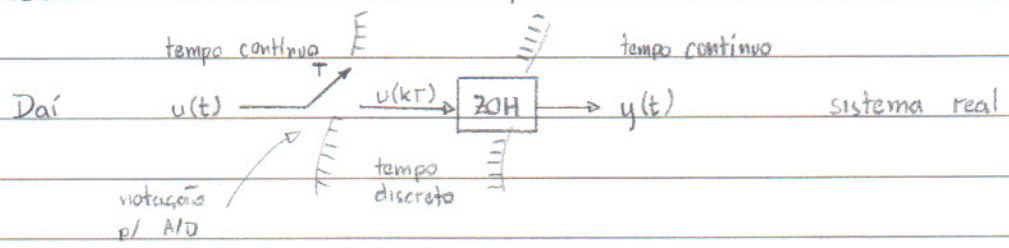
ou seja

$$Z[u(t)] = U(z) = U^*(s) \Big|_{s = \frac{\ln(z)}{T}}$$

A segunda parte do nosso modelo, que chamaremos de "data hold", converte o trem de pulsos para o sinal característico constante por trechos (também é um artifício matemático)

$$y(kT + \tau) = u(kT) \quad \text{para} \quad 0 \leq \tau < T \quad \text{e} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Com isso temos um modelo para A/D + D/A



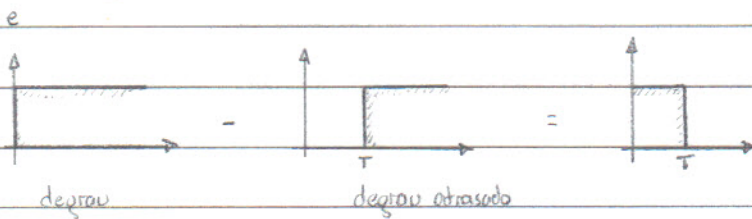
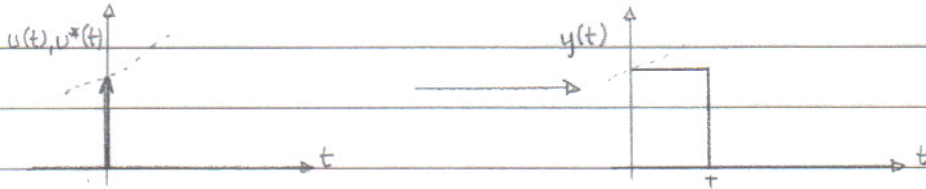
Aulas  
2008

Vamos por o que vimos em uso

Função de transferência do ZOH

Temos que  $G_{ZOH}(s) = \frac{Y(s)}{U^*(s)}$

Note que se a entrada for um impulso (delta de Dirac), temos



Portanto

$$Y(s) = \mathcal{L}[1(t)] - \mathcal{L}[1(t-T)] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

como  $u^*(t)$  é um delta de Dirac,  $G_{ZOH}(s) = \frac{Y(s)}{U^*(s)} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$

Relações entre o plano [s] e o plano [z]

Como vimos:  $z = e^{sT}$  e  $s = \frac{1}{T} \ln(z)$

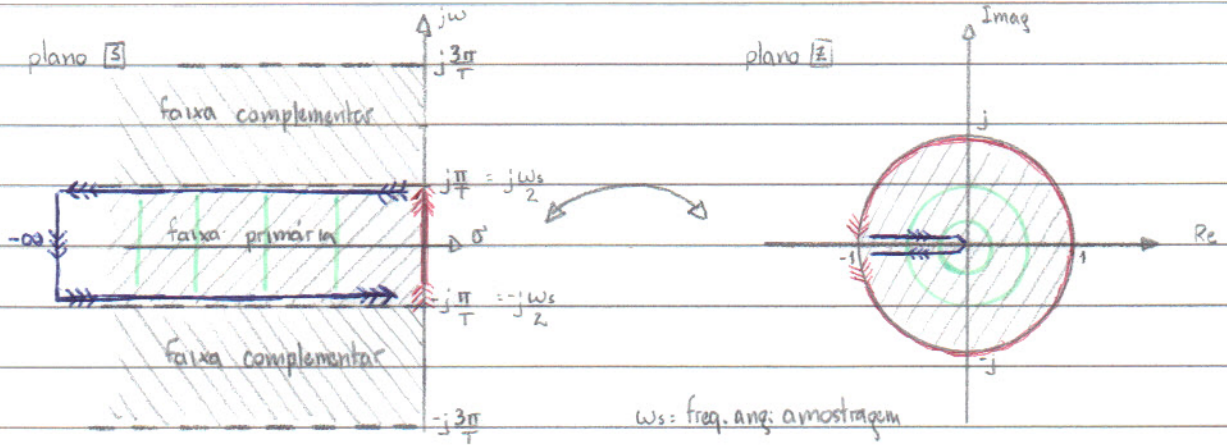
Considere um ponto no plano complexo [s]:  $s_0 = \sigma + j\omega$

No plano [z] temos  $z_0 = e^{T\sigma + jT\omega} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T}$

ou seja:  $|z_0| = e^{\sigma T}$

$\angle z_0 = \omega T$

O que resulta no seguinte mapeamento:



semi-plano esquerda



círculo de raio unitário

eixo imaginário  $j\omega$



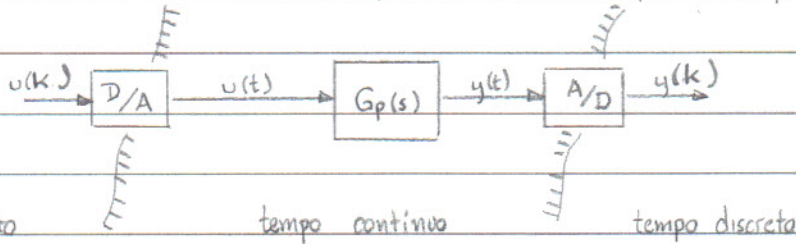
circunferência de raio unitário

OBS: Para  $\omega \in (-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T})$ , a circunferência é percorrida completamente  
 $\omega \in (\frac{\pi}{T}, \frac{3\pi}{T})$  ela é percorrida novamente e assim por diante

Infinitos pontos no plano  $\mathbb{S}$  são mapeados no mesmo ponto no plano  $\mathbb{Z}$ .

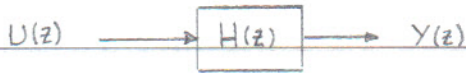
substema D/A - PLANTA - A/D

O substema abaixo é particularmente importante para o nosso curso.

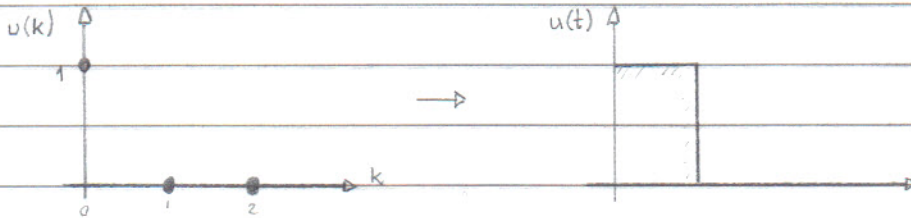


A planta no nosso esquema DDC se insere bem na estrutura acima.

O subsistema é (ou gostaríamos que fosse) equivalente a



Seja  $v(k)$  um delta de Kronecker, temos então (resposta impulsiva)



A transformada de Laplace de  $u(t)$  é dada por

$$U(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (\text{já vimos esse cara antes!})$$

A transformada de Laplace de  $y(t)$  é dada por

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = G(s) \cdot \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

E a transformada Z de  $y(k)$  por

$$Y(z) = H(z) \cdot U(z)$$

↪  $U(z) = 1$  ; pois  $v(k)$  é um impulso unitário

$$\text{portanto } Y(z) = H(z) = Z[y(k)] = Z[Y(s)] = Z\left[G(s) \cdot \frac{1 - e^{-sT}}{s}\right] =$$

$$\text{ou seja } H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

$H(z)$  é um equivalente discreto do subsistema

D/A - PLANTA - A/D

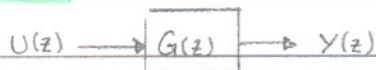


2.9 Estabilidade

Há vários tipos de estabilidade. Nesse curso vamos utilizar "estabilidade externa", conhecida como "estabilidade BIBO" (bounded input, bounded output)

Ou seja, o sistema é estável se a entradas limitadas corresponderem saídas limitadas, ou melhor, se a qualquer entrada limitada corresponder uma saída limitada.

Lema importante:



Um sistema discreto SLIT, com resposta impulsiva  $y(k)$  é BIBO-estável se e somente se

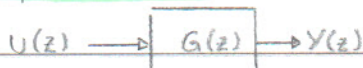
$$\sum_{k=0}^{\infty} |y(k)| < \infty$$

(provas: ver livros)

Corolário

Se  $\sum_{k=0}^{\infty} |y(k)| < \infty$  então  $\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = 0$

Teorema importantíssimo



Um sistema discreto SLIT com função de transferência  $G(z) = \frac{\text{num}(z)}{\text{den}(z)}$  onde num, den são polinômios é BIBO-estável

se e somente se todas as raízes de  $\text{den}(z)$  (chamadas de polos do sistema)  $z_i, i=1, \dots, n$  são tais que  $|z_i| < 1$ , i.e. todas as raízes complexas se localizam dentro do círculo de raio unitário

OBS: \*As raízes de  $\text{num}(z)$ , chamadas de zeros do sistema, não têm influência direta na estabilidade do sistema em si, mas influenciam grandemente o desempenho e estabilidade do sistema controlado em malha fechada.

\* Cuidado com cancelamentos entre polos e zeros.

(provas: ver livros)

Exemplo ilustrativo:

$$\text{Seja } G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z-a} = \frac{z^{-1}}{1-az^{-1}} \quad \text{com } a \in \mathbb{R}$$

$$\text{logo } y(k) = a \cdot y(k-1) + u(k-1)$$

Considerando  $u(k)$  nulo, temos  $y(k) = a y(k-1)$

obviamente: se  $|a| > 1$ ,  $y(k) \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$

se  $|a| < 1$ ,  $y(k) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$

se  $a = 1$ ,  $y(k)$  é constante (veja as condições do livro)

Exemplo:

$$G(z) = \frac{n(z)}{z^5 + 0,9z^4 + 3z^2 + 3z - 0,7} \quad \text{é estável?}$$

$$\text{polos de } G(z): 0,7147 \pm j1,281 \quad \text{l.l.} = 1,47$$

$$-1,262 \pm j0,278 \quad \text{l.l.} = 1,29$$

$$0,1948$$

conclusão: sistema instável

ver exemplo estabilidade.m

Crêterios de estabilidade

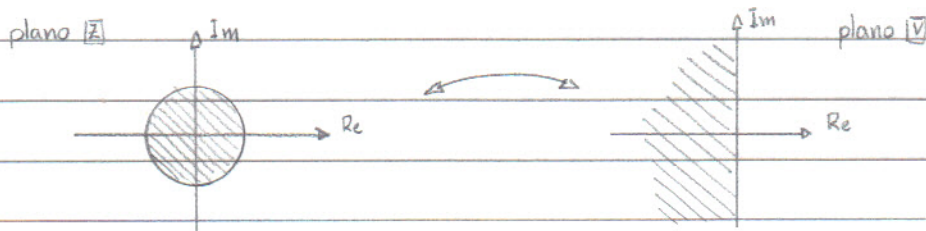
Como descobrir se um sistema   estável sem calcular as raízes do polin mio

Cr terio de Routh (de tempo contínuo)

Seja a transforma o bilinear

$$z = \frac{v+1}{v-1}$$

propriedade interessante:  $|z| < 1 \iff \text{real}(v) < 0$



Como usar: substituir  $z$  por  $\frac{v+1}{v-1}$  na fun o de transferência e

aplicar o cr terio de Routh ao denominador da fun o em termos de  $v$

OBS: A quantidade de cálculos pode ficar muito grande

FT própria: basta olhar o denominador

Cr terio de Jury (tempo discreto)

ver antiga apostila

OBS: Hoje em dia é fácil obter raízes de polinômios (e.g. Matlab). Os critérios são úteis para análise.

Por exemplo

$$G(z) = \frac{1}{z^3 + (2+\alpha)z^2 + 3}$$

para que valores de  $\alpha$  o sistema é estável?