Guia de Leitura do Marion – versão em português

Vito R. Vanin, agosto de 2016

Capítulo 6. *Alguns métodos de cálculo das variações*

6.1 Introdução

O autor explica que vai discutir primeiro a questão das variações em geral e especializar para a equação de Euler depois. Como ele aborda o tema de uma maneira adequada a essa especialização, termina sem discutir os aspectos mais gerais por trás dos princípios de mínimo (ou máximo). Por isso, antes de entrar no texto desse capítulo, vamos fazer um passeio por um dos capítulos do livro do Feynman, que atualmente está disponível pela internet, endereço http://www.feynmanlectures.info/. Nesse sítio, clique em "READ" (2º item da barra de menus à esquerda), selecione Volume II, abra o capítulo 19 – The principle of least action. O material que nos interessa vai do início do capítulo até 4 parágrafos depois da Fig. 19-10 (ou até o último parágrafo da página 19-6, para quem tem o livro).

6.2 Formulação do problema

Note a forma curiosa do integrando da equação (6.1), que está elaborada sob medida para o problema da mecânica – basta trocar x por t que identificamos y(x) e y'(x) como a posição e a velocidade. É verdade, porém, que essa mesma dependência particular serve para outros problemas, como veremos adiante.

6.3 Equação de Euler

Na página 186, em dois lugares, aparece **a integração** onde devia aparecer **o integrando**. Corrija o final da primeira frase da página 186: "Uma vez que ... afeta somente ***o integrando***" e, na linha imediatamente anterior à equação (6.18): "..., ***o integrando*** na Equação (6.17) deve desaparecer..."

No exemplo 6.2, a 1ª frase da pg. 187 deve ser lida assim:
Se medirmos o potencial **a partir** do ponto x=0 [isto é, U(x=0)=0], então**, como** a partícula inicia do repouso**,** ~~será~~ T+U=0.

Logo depois da fórmula (6.19) tem uma locução verbal muito estranha, melhor assim:
"O tempo necessário para a partícula ***se deslocar*** da origem para (x_2,y_2) é"

Logo depois da (6.21), *f* deve ser derivado em relação a *y* e não *y'* , como está no livro
"E, por causa de $\partial f/\partial y$, a equação..."

Toda a atenção é pouca para entender a mudança de variável (6.24) e o gráfico da figura 6.4, em que *x* é a ordenada e *y*, a abscissa; a equação (6.23) sugere que $y = y(x)$ (uma função de *x*), mas a figura mostra *dois* valores de *y* no intervalo $[x_2,2a]$, então teria sido melhor achar uma equação diferencial que permitisse encontrar diretamente $x = x(y)$, mas não sei se essa equação existe (se existe, não tenho ideia como acha-la). Essa manobra de introduzir a variável θ é necessária para a solução do problema e permite a interpretação dada na figura: a braquistócrona é a trajetória descrita por um ponto na circunferência de uma roda que rola sem deslizar.

No Exemplo 6.3, se você integrar a equação (6.32), vai provavelmente encontrar um logaritmo. Note a identidade:

$$\cos\mathrm{h}^{-1} x = \mathrm{Log}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

que permite chegar ao resultado (6.33)

O exemplo da bolha de sabão da página 190 tenta explicar o que você devia estar desconfiando, depois do problema da braquistócrona: uma escolha errada de sistema de coordenadas pode fazer o problema ficar intratável.

6.4 A "segunda forma" da equação de Euler

Essa seção, do jeito que está, é puramente matemática, mas talvez valha a pena ver o truque usado na dedução e saber que se chega ao resultado (6.40). Se você trocar f pela Lagrangeana (T-V) e x pelo tempo, quando a Lagrangeana independe do tempo, a grandeza representada pela equação (6.40) é a energia, H=T+V, e essa função é chamada de Hamiltoniana.

O Exemplo 6.4 é clássico e é uma aplicação da equação (6.40). Esse exemplo não é fundamental para nosso estudo, de modo que **você pode saltá-lo**. Se você tiver tempo, ele pode ajudá-lo a habituar-se com as manobras algébricas necessárias para chegar a um resultado. Note também o truque de multiplicar (6.48) por ρ sen θ, a fim de chegar a uma forma que permite interpretar o significado da equação (6.48). Aos poucos, a gente se acostuma com a transformação de coordenadas esféricas para retangulares e termina por enxergar a equação (6.52) na (6.49).

6.5 Funções com diversas variáveis dependentes

Explica porque a equação de Euler mantem a forma para muitas variáveis.

6.6 As equações de Euler quando condições auxiliares são impostas

O autor apresenta as modificações no formalismo das equações de Euler necessárias quando há vínculos que podem ser expressos como g(x,y,z,...) = 0. A inclusão do *multiplicador de Lagrange* é essencial nos problemas (frequentes) em que não se consegue encontrar um conjunto de coordenadas que atenda implicitamente o vínculo. Há várias maneiras de deduzir a fórmula (6.68), mas infelizmente nenhuma é fácil. Antes de estudar a dedução do livro, leia o texto "Multiplicadores de Lagrange", que está na pasta "Textos Complementares", para uma outra dedução. Também ainda não dá para acreditar que essas equações facilitem alguma coisa, mas isso ficará claro rapidamente.

O exemplo 6.5 mostra *apenas* qual é a equação de vínculo para um disco que rola sem deslizar, que é a mesma tanto no plano inclinado quanto numa superfície horizontal; não diz uma palavra sobre a dinâmica do sistema. Claro que o ângulo do plano inclinado com a horizontal é α e não $\alpha\theta$, como aparece na figura 6-7.

No texto que segue o exemplo, note que ele *não* deduz a fórmula (6.78), mas sim apenas apresenta essa equação, que tem um multiplicador de Lagrange λ e que se aplica quando o vínculo tem a forma de uma integral e não uma função. Também nós não iremos nos preocupar em demonstrar essa fórmula.

O exemplo 6.6 resolve o problema isoperimétrico, que é um clássico. Neste caso, note que a equação (6.78) está sob medida para resolver esse problema. Aqui, a dificuldade não é algébrica, e sim de montar toda a superestrutura necessária à solução. Apenas um detalhe: o livro diagrama muito mal a equação (6.80), onde parece que y(x) está dividido por y(-a). Não é isso, ele apenas diz que,

para y(x), as condições são y(-a) =0, y(a) = 0

e ele escreveu essa frase sem o "para" e trocou "as condições são" por ":".

6.7 A notação δ

Nessa seção, o autor explica o significado do símbolo δ, que indica variação. Essa notação é usada em muitas situações, de modo que é boa ideia sempre explicar que grandezas são mantidas fixas e quais serão variadas, ao usá-la.