Integração numérica

1. Seja $[a,b]$ um intervalo qualquer e $\alpha = (a+b)/2$. Calcule a integral $\int_a^b (x-\alpha)^3 dx$ usando a fórmula de Simpson. Usando este fato, mostre que a fórmula de Simpson dá a integral exata para todos os polinômios de grau menor ou igual a três.

2. Estime o valor da integral $\int_0^4 \cos(\frac{\pi}{2}x^2).x dx$ usando o método dos trapézios com duas repetições. Qual é a estimativa do erro?

3. Determine $\int_1^\infty (1+x^4)^{-1} dx$ com a regra do trapézio com cinco repetições e compare o resultado com a integral "exata" 0.24375. Sugestão, faça a mudança de variável $x^3 = 1/t$.

4. Calcule a integral $\int_0^\infty \dfrac{dx}{1+x^2}$ de forma que o erro fique menor que 0.02.

5. Considere o conjunto de nós $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ do intervalo $[a,b]$, onde $h = (b-a)/3$ e $x_i = a + ih$. Encontre a fórmula de integração numérica

$$I(f) = \sum_{i=0}^{3} A_i f(x_i)$$

baseada no polinômio interpolador de grau 3 sobre esses nós.

6. Use o método do trapézio com duas repetições para calcular a integral

$$\int_0^2 \mathrm{e}^x dx$$

Faça uma avaliação do erro máximo cometido neste caso?

7. Calcule a integral $\int_1^3 1/(5x-3)dx$ usando o método dos trapézios com duas repetições e faça uma avaliação do erro cometido.

8. Avalie os erros cometidos usando o método do trapézio com n repetições nas integrais

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx \text{ e } \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} dx$$

9. Considere a fórmula de aproximação de integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(\frac{-\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

. Mostre que a fórmula é exata para todos os polinômios de grau menor ou igual a três.

10. Encontre uma fórmula de integração $\int_0^1 f(x)\log(x) = w_1 f(x_1)$ que seja exata para as funções lineares $f(x) = ax + b$.