1. Ache os polinômios ortogonais em relação à tabela:

x	0	1	2	3
y	2.2	3.5	1	1

2. Dada a tabela abaixo, encontrar o polinômio de grau 3 que melhor se ajuste à tabela. Achar o resíduo quadrático neste caso. Existe algum polinômio de grau menor ou igual a quatro que se ajuste à tabela, deixando o resíduo quadrático igual a zero?

x	-1	-0.5	0	0.5	1
y	0.5	0.94	1	0.94	0.5

3. Considere a tabela:

x	-2	-1	1	2
y	1	-3	1	9

Tabela 1: tabela da questão 2

Pelo MMQ ajuste à tabela uma função da forma $g(x) = ax^2 + b$ e por uma outra função da forma $h(x) = cx^2 + dx$. Qual dessas duas funções fornece o melhor ajuste pelo critério dos mínimos quadrados?

4. Encontre a reta que melhor se ajuste, usando o método dos mínimos quadrados, à tabela $T_1 = \{(0, -2), (1, -3), (2, 0)\}$. Qual é o resíduo quadrático?

5. Construa os três primeiros polinômios ortogonais em relação ao produto interno

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

6. Usando os polinômios do exercício anterior ache uma aproximação para a função $f(x) = \sin(\pi x/6)$ pelo método dos mínimos quadrados no intervalo $x \in [0, 1]$.

7. Para a mesma tabela T_1 da questão anterior, encontre o polinômio de grau menor ou igual a dois que melhor se ajuste à tabela pelo MMQ. Este polinômio coincide com o polinômio interpolador da tabela? Justifique.

8. Dados os seguintes polinômios $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x - 0.5$ e $p_2(x) = x^2 - x + 1/6$, encontre o polinômio mônico de grau 3, $p_3(x)$ que é ortogonal aos outros polinômios dados segundo o produto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

9. Dada a tabela $T_2 = \{(0, 1), (1, -1), (2, 6)\}$, encontre o polinômio interpolador $p_2(x)$. Modifique a ordenada de apenas um ponto da tabela dada para que o novo polinômio interpolador tenha uma raiz em -1.

10. Determinar os dados de uma tabela $T_3 = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$, sabendo que os polinômios de Lagrange de T_3 são, respectivamente:

$$L_0(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{6}$$
$$L_1(x) = \frac{-x^2 + 3x}{2}$$
$$L_2(x) = \frac{x^2 - 2x}{3}$$

e o polinômio interpolador de T_3 é $p_2(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Se juntarmos à esta tabela o ponto $(5, -3)$, qual será o novo polinômio interpolador.

11. Encontre a família de polinômios mônicos ortogonais em relação à tabela: $T = \{(0, -2), (1, -3), (2, 0)\}$.

12. Dada uma tabela $T = \{(x_0, y_o), (x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$. Mostre que os polinômios de Lagrange satisfazem a relação:

$$L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) = 1$$

13. Dada a tabela:

$$T_2 = \{(-1, 0); (0, 2); (1, 1); (3, 0)\}$$

Ache os polinômios mônicos ortogonais $p_0(x)$, $p_1(x)$ e $p_2(x)$. Escreva o polinômio $q(x) = 6x^2 - 2x$ como combinação linear de p_0, p_1 e p_2.

14. Determinar os dados de uma tabela $T_3 = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$, sabendo que os polinômios de Lagrange de T_3 são, respectivamente:

$$L_0(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{6}$$
$$L_1(x) = \frac{-x^2 + 3x}{2}$$
$$L_2(x) = \frac{x^2 - 2x}{3}$$

e o polinômio interpolador de T_3 é $p_2(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Se juntarmos à esta tabela o ponto $(5, -3)$, qual será o novo polinômio interpolador.

15. Ache o polinômio interpolador na forma de Lagrange da tabela:

x	0	1	2
y	2	1	4

16. Aproxime a função $f(x)$ dada abaixo por uma função $g(x)$ da forma

$$g(x) = A\cos(\pi x) + B\sin(\pi x) + C\cos(2\pi x) + D\sin(2\pi x)$$

A função $f(x)$ é periódica de período 2, é impar, e no intervalo $[0, 1]$ é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in [0, 0.5] \\ 1 & \text{se } x \in (0.5, 1] \end{cases} \tag{1}$$

17. Ache os três primeiros polinômios mônicos ortogonais pelo produto interno:

$$< f, g >= \int_0^1 x^2 f(x) g(x) dx \tag{2}$$

18. Mostre que com o produto escalar definido no exercício anterior, ainda vale a fórmula de recorrência: se $\{p_0, \dots, p_n\}$ é uma família de polinômios mônicos ortogonais então se

$$p_{n+1}(x) = (x - A)p_n(x) - Bp_{n-1}(x)$$

com

$$A = \frac{\langle p_n, xp_n \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle}$$

$$B = \frac{\langle p_n, xp_{n-1} \rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle}$$

p_{n+1} é um polinômio mônico ortogonal à família $\{p_0, \ldots, p_n\}$.

19. Dada a seguinte tabela de pontos, encontre o polinômio interpolador na forma de Newton. (Indique os cálculos das diferenças divididas.)

x	0	1	3	4	6
y	3	0	18	63	285

20. Considere a seguinte tabela de valores da função exponencial:

x	1.0	1.1	1.2
e^x	2.718	3.004	3.320

Achar o polinômio interpolador pelo método de Newton. Avaliar, usando o polinômio interpolador $\exp(1.05) = p_2(1.05)$. Fazer uma avaliação do erro cometido.

21. Na tabela abaixo calcular o valor de α sabendo que o polinômio interpolador é da forma: $p_3(x) = 3x^3 + kx^2 - x + 1$.

x	-1	0	1	2
y	1	1	5	α

22. Conhecemos os valores de uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, infinitamente diferenciável, apenas nos valores tabelados abaixo. Supondo que para todo $c \in [-1, 1]$ temos que $|g'''(c)| \leq 3$, qual seria o valor de $g(0.5)$?

x	-1	0	1
$g(x)$	0.5	1	0.5

23. Suponha que $g(x)$ é uma função infinitamente diferenciável no intervalo $[0, 1]$ e tal que $|g^{(n)}(x)| \leq 4$. Os valores de $g(x)$ conhecidos são dados pela tabela:

x	0	0.5	1	2
g(x)	1	0.54	-1	-0.84

Achar o polinômio interpolador na forma de Newton. Usando este polinômio interpolador dar uma aproximação para $g(0.65)$ e avaliar o erro cometido.

24. Seja Π_4 o conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a 4. Seja $P_5(x)$ um polinômio de grau cinco ortogonal ao espaço Π_4 segundo o produto interno

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

Mostre que $P_5(x)$ tem cinco raizes reais no intervalo $[-1, 1]$.

25. Considerando $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$. Sendo $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ e $L_3(x)$ os polinômios de Lagrange com relação a estes pontos, mostre que eles são linearmente independentes.