

# Experiência I (aulas 01 e 02)

## Calibração de medidas e Pêndulo simples

---

1. Objetivos
2. Introdução
3. O pêndulo simples
4. Medida do período de oscilação de um pêndulo
5. Arranjo e procedimento experimental
6. Análise de dados

### 1. Objetivos

O objetivo desta experiência consiste em se realizar medidas usando padrões diversos e verificar como representá-los adequadamente. Além de medidas de distância mediremos o período de oscilação de um pêndulo simples. Em especial, esse sistema é de extremo interesse na física, pois permite um tratamento teórico preciso, além de permitir a discussão de vários conceitos da física experimental, como noções de estatística, erros aleatórios ou estatísticos, média e desvio padrão e histogramas.

### 2. Introdução

(Texto baseado na apostila de “Introdução às Medidas em Física” de 2004)

A preocupação com a quantificação de valores permeia toda a história da humanidade. As variações de padrões usados nessas avaliações sempre dificultaram a comparação de um parâmetro obtido por dois sistemas (ou investigadores) distintos. A definição de um sistema internacional de padrões para a realização intercomparação de medidas foi fundamental para minimizar essas dificuldades.

Como exemplo podemos citar as medidas de tempo, que sempre foram importantes devido às mais diversas motivações. Os sistemas de medidas de tempo vêm evoluindo desde a simples ordenação de eventos acontecidos, passando pela previsão de épocas de plantio e colheita na agricultura, duração de jornadas, observações astronômicas, etc., chegando aos nossos

dias, quando a medida do tempo regula o cotidiano de grande parte da humanidade.

Historicamente, o desenvolvimento de medidores de tempo (relógios) acompanha a evolução da necessidade de se medir o tempo, adequando-se a cada estágio desse processo evolutivo. Dos relógios de Sol até o hoje popular relógio de quartzo, se pensar unicamente em instrumentos do cotidiano, muitos caminhos foram trilhados. Por trás de cada instrumento está a necessidade da época. Se para algumas civilizações da Antiguidade bastava distinguir a manhã da tarde, diversas aplicações atuais necessitam de determinações de frações muito pequenas de segundo.

Ao mesmo tempo, a delimitação de intervalos de tempo através da observação de eventos por algum dos órgãos dos sentidos também está afetada pela própria capacidade do corpo humano perceber esses eventos. A vista humana, por exemplo, consegue distinguir eventos separados de 40 ms ( $1 \text{ ms} = 10^{-3} \text{ s}$ ) aproximadamente. É este limite de percepção que permite o efeito cinematográfico: quando assistimos a um filme, temos a impressão de que os movimentos ocorrem continuamente apesar de na verdade serem projetadas fotos a uma frequência de 30 por segundo.

Muitos dos intervalos de tempo entre eventos que ocorrem em nosso cotidiano podem ser medidos com um relógio de pulso comum, por exemplo, a duração da aula.

Outros eventos, apesar de serem facilmente percebidos pelos nossos sentidos, ocorrem em intervalos de tempos muito curtos para serem medidos dessa forma. Podemos adotar como sendo de alguns segundos o intervalo de tempo mínimo mensurável com um relógio comum. Esse limite é muito maior do que, por exemplo, o tempo de contato dos seus dedos com o tampo da mesa numa “batucada”.

Tente estimar valores para:

- O tempo de queda de uma borracha da mesa para o chão;
- O tempo de chute de uma bola de futebol;
- O tempo entre dois toques de dedo de uma batucada;
- O tempo gasto para escrever a palavra *tempo* e para assinar o seu nome.

Neste experimento, iremos medir o período de oscilação de um pêndulo com o intuito de:

- realizar medidas de intervalos pequenos de tempo e estudar algumas limitações impostas pela nossa percepção e pelos instrumentos de medida;
- introduzir de maneira prática o conceito de erros estatísticos ou aleatórios;
- realizar uma primeira discussão sobre a adequação de um modelo idealizado a um experimento real.

### **3. O Pêndulo Simples**

O estudo do período de oscilação do pêndulo pode parecer algo desinteressante em um primeiro momento. Porém, essa impressão não poderia estar mais errada. Galileu Galilei, considerado um dos principais criadores do método científico moderno, foi uma das primeiras pessoas a estudar esse sistema físico e descobrir algumas de suas interessantes propriedades.

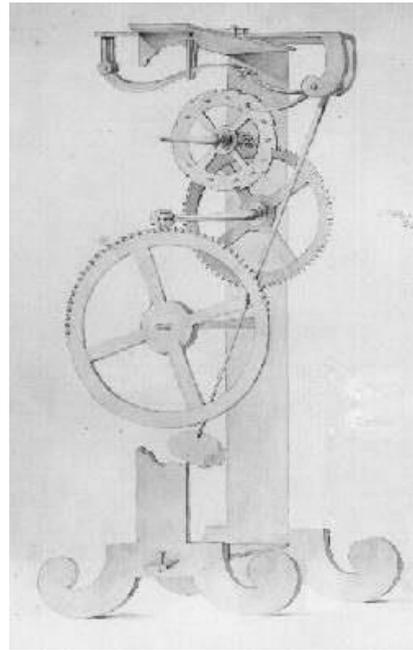
Conta a história que Galileu, ao assistir à missa na catedral de Pisa todos os domingos, reparava que um candelabro balançava devido à corrente de ar, o que o motivou a estudar o movimento oscilatório de um pêndulo. Ele percebeu que independentemente da distância percorrida pelo pêndulo, o tempo para completar o movimento é sempre o mesmo. Galileu não tinha nenhum cronômetro ou relógio que lhe permitisse medir o tempo em suas experiências, por isso controlou o tempo com as suas pulsações.

O estudo do pêndulo levou-o a concluir que a duração do movimento pendular não é afetada pelo peso do corpo suspenso, mas sim pelo tamanho da corda que o suspende. Baseado nestas conclusões, Galileu desenvolveu o relógio de pêndulo, o mais preciso na época.

Toda haste, fio ou outro objeto qualquer, suspenso por um de seus pontos e sujeito à ação da gravidade executará um movimento oscilatório, se for momentaneamente afastado do seu ponto de equilíbrio (desde que o ponto de fixação não coincida com o centro de massa do corpo). O período deste movimento é uma grandeza física característica do sistema. A versão mais simples de um pêndulo consiste de um objeto de massa pequena suspenso por um fio inextensível e de massa desprezível.



(a)



(b)

Figura 2.1 - (a) candelabro na Catedral de Pisa. (b) relógio de pêndulo concebido por Galileu.

Um modelo bastante comum utilizado para relacionar o período  $T$  de um pêndulo com seu comprimento  $L$  é chamado de modelo do pêndulo simples e baseia-se nas seguintes hipóteses:

- o pêndulo é constituído por um ponto material suspenso por um fio inextensível e sem massa;
- apenas as forças peso e tração agem sobre o ponto material;
- utiliza-se ângulos de abertura pequenos ( $\theta < 15^\circ$ ), tal que seja válida a aproximação  $\text{sen}(\theta) \sim \theta$  (em radianos), onde  $\theta$  é o ângulo entre o fio e a vertical, durante a oscilação (figura 2.2).

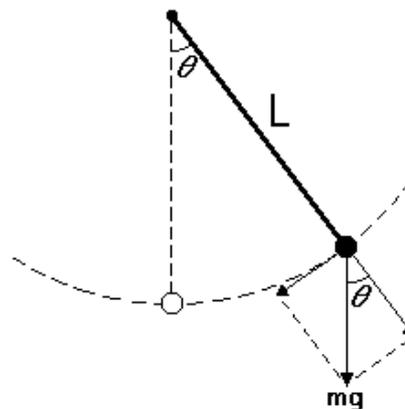


Figura 2.2 - pêndulo simples

Baseado nessas hipóteses pode-se deduzir a seguinte relação entre  $T$  e  $L$ :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (1)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade.

#### 4. Medida do período de oscilação de um pêndulo

A fim de medir o período de oscilação do pêndulo, deslocamos de um certo ângulo o ponto material que o compõem e medimos o tempo que esse ponto leva para retornar ao mesmo ângulo deslocado inicialmente. Para medir esse tempo, utilizaremos um cronômetro cuja resolução, ou seja, a menor unidade de medida, é 0,01 s. Como toda medida, precisamos atribuir uma incerteza ao valor obtido. Fará parte do nosso experimento refletir sobre a melhor estimativa possível para essa incerteza.

Na experiência anterior lidamos com a medida de comprimentos de objetos bem definidos e utilizamos equipamentos analógicos. As incertezas nas medidas foram estimadas como sendo as incertezas instrumentais dos equipamentos de medida, que normalmente eram a metade da menor divisão do equipamento (lembre-se que para o paquímetro, a incerteza instrumental é a menor divisão). Por se tratar de um equipamento digital, a incerteza instrumental do cronômetro deve ser dada pelo fabricante. Na ausência de um valor fornecido pelo fabricante, podemos considerar a incerteza como sendo a menor divisão do equipamento, ou seja, 0,01 s. Porém, se você repetir a medida várias vezes, você espera obter o mesmo valor para o período do pêndulo? A variação nos valores de período obtidos será em torno de 0,01 s? Realize essa medida algumas vezes com o pêndulo próximo a você e verifique o resultado.

Após a observação desses resultados, já deve estar claro para você que o valor medido do período varia muito mais que o erro instrumental atribuído. Por que isso ocorre? Qual será o valor do período de oscilação do pêndulo e, principalmente, qual será o valor da incerteza dessa medida? Diante desta constatação, fica claro que o erro instrumental não é o único a afetar o resultado e a incerteza de uma medida. Existem outros tipos de incerteza que precisam ser considerados. Nesta aula, iremos estudar a **incerteza aleatória ou estatística**. Leia o capítulo 4 da apostila “Introdução

à Teoria de Erros” de J. H. Vuolo para uma extensa discussão sobre os tipos de incerteza mais comuns que iremos encontrar.

## **5. Arranjo e Procedimento Experimental**

### **5.1. Calibração de medidas**

Nessa primeira parte do experimento iremos verificar a importância da padronização na realização de medidas diversas. Primeiramente faremos medidas para obter a área da sala e lousa, usando os instrumentos de medidas mais simples que conhecemos: pés e mãos. Em seguida, deve-se medir o comprimento de cada pé e mão usado com uma trena ou régua. Por fim, cada grupo deve medir com uma trena as dimensões da sala e lousa.

Usaremos um procedimento parecido para obter o período de dez oscilações de um pêndulo simples. Como padrão inicial usaremos os batimentos cardíacos de cada indivíduo, que posteriormente deve ser calibrado com o auxílio de um cronômetro. Para posterior comparação com a equação 1, é necessário que as condições experimentais possam ser aproximadas pelas hipóteses e limitações do modelo. Assim, utiliza-se como ponto material uma bolinha de chumbo, e o fio de um material de baixa densidade e pouca elasticidade. Adota-se ainda, pequenos ângulos de oscilação máxima (no caso de  $\theta_{\max} \sim 10^\circ$ , o erro percentual da aproximação da hipótese c é menor que 1%). É necessário ter em mente que, estritamente, o pêndulo simples não existe na natureza, mas o modelo pode ser tão próximo da realidade, que as diferenças são encobertas pelas incertezas experimentais.

### **5.2. Pêndulo Simples com medidores padronizados**

Inicialmente, realizaremos a medida do período de oscilação de um pêndulo colocado na frente da sala de aula, próximo à mesa do professor. Ele irá deslocar o pêndulo do seu ponto de equilíbrio, fazendo-o oscilar e todos os alunos medirão o período de oscilação desse pêndulo com o cronômetro fornecido a cada um.

Antes de iniciar a medida, teste o seu cronômetro. Acione e pare o cronômetro imediatamente várias vezes. Que valores você obteve? Esse valor representa o tempo mínimo que você consegue medir com o cronômetro. Como esse tempo se compara ao período de oscilação do pêndulo? Se os dois tempos forem muito semelhantes, como você acha que isso vai afetar a suas medidas? Como minimizar a influência dessa limitação

nas suas medidas? Ao invés de medir o tempo de uma oscilação, não seria mais preciso medir o tempo de mais oscilações, ou seja, intervalos de tempo maiores? Por quê?

Cada aluno irá medir o período de oscilação do pêndulo 5 vezes. Como a classe tem em torno de 20 alunos, teremos uma amostra de cem medidas e poderemos comparar os valores obtidos entre todos os alunos. O tratamento que daremos aos dados será discutido na seção 6.

Em seguida, cada grupo medirá o período de oscilação utilizando um equipamento diferente: seu próprio relógio de pulso de resolução de 1 s. O que você espera obter para a incerteza em cada um dos casos? Elas serão semelhantes? Por quê?

## 6. Análise de dados

Como você deve ter notado, o valor obtido para o período nas diversas medidas varia muito mais que o erro instrumental atribuído à medida. Isso ocorre pois não é apenas o instrumento de medida que influencia no resultado da mesma. Nas aulas anteriores, estávamos medindo objetos muito bem definidos e estáticos, em uma situação que nos permitia comparar o comprimento a ser medido com o padrão de medida de maneira bastante cuidadosa. Neste caso, o mesmo não ocorre. A medida do período do pêndulo sofre influência de diversos fatores, que estão fora do nosso controle. Para citar alguns exemplos:

- o mecanismo de acionamento do cronômetro não é instantâneo devido à mecânica de funcionamento do mesmo;
- o reflexo humano não é instantâneo, ou seja, leva um certo intervalo de tempo para o experimentador perceber a passagem do pêndulo pelo ponto desejado, reagir e acionar o botão do cronômetro;
- a própria definição experimental do período do pêndulo está sujeita a incertezas. Que ponto do espaço corresponde exatamente ao ponto de inversão do movimento do pêndulo?

Diante de todos esses fatores, fica claro que ao repetirmos a medida do período de oscilação do pêndulo, iremos obter sempre valores diferentes. Consequentemente, nos resta decidir qual valor numérico deve ser usado para representar o período de oscilação do pêndulo e como podemos estimar a incerteza dessa medida.

Como discutido na seção 4.3 da apostila “Introdução à Teoria de Erros” de J.H. Vuolo, a variação nos valores medidos do período é chamada

de erro aleatório ou estatístico, pois ela ocorre devido a diversos fatores aleatórios, que não podem ser controlados durante o experimento. Na seção 5 dessa mesma apostila, é mostrado que o valor que melhor representa o resultado experimental de várias medidas ( $y_i$ ) feitas em circunstâncias estatísticas é a média, dada por:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N} \quad (2)$$

onde  $N$  é o número de medições feitas.

A incerteza nesse valor pode ser estimada a partir da flutuação dos dados, ou seja, a partir da variação ou desvio dos dados em relação à média, onde definimos o desvio de uma medida pela expressão:

$$d_i = y_i - \bar{y} \quad (3)$$

A princípio, poderíamos tomar o valor médio dessa grandeza para estimar a incerteza. Porém, devido à própria definição de média, o valor médio de  $d_i$  será sempre zero. Portanto, inicialmente, podemos nos livrar do sinal definindo a variância dos dados que é dada por:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \quad (4)$$

A variância é uma média do quadrado do desvio. A raiz quadrada da variância é chamada de desvio padrão ( $\sigma$ ) e é dado por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} \quad (5)$$

Podemos dizer que o desvio padrão é uma medida de quanto os dados *em média* se “desviam” da média. A partir do formalismo da chamada Teoria de Erros, podemos demonstrar que a incerteza do valor médio será dada pelo desvio padrão da média ( $\sigma_m$ ), definido como:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (6)$$

Para o propósito desta disciplina, vamos apenas assumir esta expressão como correta (sem demonstrar isso) e utilizá-la para estimar a incerteza aleatória ou estatística de todas as medidas que realizarmos daqui em diante.

## 6.1. Calibração de medidas

Usando os valores das dimensões medidas com pés e mãos, calcule os valores das áreas escrevendo o resultado final com o número adequado de significativos. Em seguida reescreva esse valor usando a calibração obtida para cada pé e mão. Novamente tome cuidado para reescrever esse valor com o número correto de significativos. Finalmente, calcule o valor dessas áreas a partir das medidas das dimensões obtidas diretamente com a trena. Compare o número de significativos dos dois valores de áreas obtidos com os diferentes sistemas de medidas.

Calcule os valores médios e desvios padrões tanto para a área da sala quanto para a lousa da sala. Os valores individuais concordam com os valores médios?

Analogamente, escreva o valor do período de 10 oscilações do pêndulo em segundos a partir das medidas usando batimentos cardíacos (e sua respectiva calibração) e a outra série usando cronômetro. Compare novamente o número de significativos dos resultados finais.

Calcule o valor médio e desvio padrão para o período de 10 oscilações do pêndulo. Os valores individuais concordam com os valores médios?

## 6.2. Pêndulo Simples

De posse dos dados, vamos estudar como os valores de período medidos pelos vários alunos da classe se comportam. Calcule a média, o desvio padrão e o desvio padrão da média dos dados. Uma maneira bastante eficiente de se estudar os dados é fazendo um histograma dos mesmos. Na seção 5 do capítulo IV da apostila da disciplina é explicado como construir um histograma. Utilizando os dados medidos por todos os colegas de classe construa um histograma.

Em seguida, interprete o resultado obtido. Que informações o histograma pode lhe fornecer? Como você pode extrair a média e o desvio padrão a partir do histograma? Os valores obtidos numericamente concordam com os valores obtidos graficamente?

Calcule a média, desvio padrão e desvio padrão da média dos dados obtidos com o relógio de pulso. Compare os valores obtidos a com os dois equipamentos. Compare também esses resultados com os valores obtidos na primeira parte e com os valores obtidos pelos colegas.

A partir do comprimento medido do pêndulo e do valor da aceleração da gravidade, calcule o período esperado para o pêndulo utilizado, assumindo que o modelo do pêndulo simples é válido para este caso. Os dois valores são iguais? Como é possível compará-los? A medida de comprimento tem incerteza? Como você acha que isso vai afetar o valor do período obtido pela fórmula 1?