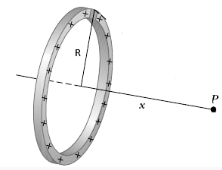
Física III para Engenharia Elétrica

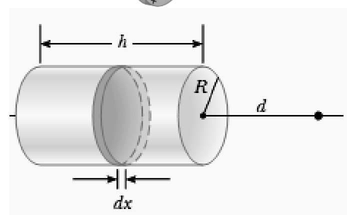
IFUSP - 4320292

P1 – 31/03/2011

Q1. a) (1.0) Um anel de raio *R* tem uma carga positiva Q uniforme por unidade de comprimento. Calcular o campo elétrico sobre o eixo do anel, num ponto P que está a distancia *x* do centro do anel.



b) (1.5) Considere uma casca cilíndrica carregada uniformemente com carga total *Q*, raio *R* e altura *h*. Determine o campo elétrico em um ponto a uma distância *d* do lado direito do cilindro e que esteja no eixo que passa pelo centro da casca cilíndrica.

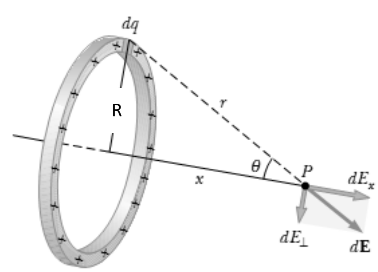


Resolução:

a) O Modulo do campo elétrico no ponto P devido ao segmento de carga dq é:

$$dE = k_e \frac{dq}{r^2} \qquad\qquad dE_x = dE \cos\theta$$

a componente perpendicular ao eixo x é nula porque todas os componentes de campo de todas as cargas nesse eixo se cancelam.



$$r = \left(x^2 + R^2\right)^{1/2}$$

$$\cos\theta = x/r$$

$$dE_x = dE\cos\theta = \left(k\frac{dq}{r^2}\right)\frac{x}{r} = \frac{kx}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}dq$$

$$E_x = \int \frac{kx}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}dq = \frac{kx}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}Q$$

b) Definindo $x = 0$ no ponto onde vamos calcular o campo. Um anel de espessura *dx*, tem carga *Qdx/h* e gera, em um determinado ponto, o campo:

$$d\mathbf{E} = \frac{k_e\, x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\,\frac{Q\,dx}{h}\,\mathbf{i}$$

$$\mathbf{E} = \int_{\text{all charge}} d\mathbf{E} = \int_d^{d+h} \frac{k_e Q x\, dx}{h(x^2+R^2)^{3/2}}\mathbf{i} = \frac{k_e Q \mathbf{i}}{2h}\int_{x=d}^{d+h}(x^2+R^2)^{-3/2}\, 2x\, dx$$

$$\mathbf{E} = \frac{k_e Q \mathbf{i}}{2h}\frac{(x^2+R^2)^{-1/2}}{(-1/2)}\Bigg|_{x=d}^{d+h} = \boxed{\frac{k_e Q \mathbf{i}}{h}\left[\frac{1}{(d^2+R^2)^{1/2}} - \frac{1}{\left((d+h)^2+R^2\right)^{1/2}}\right]}$$

Q2. Considere uma esfera isolante de raio R com carga positiva Q uniformemente distribuida em seu volume.

a) (1.0) Calcule o campo elétrico $\vec{E}(r)$ dentro e fora da esfera.

b) (0.5) Faça um gráfico de $|\vec{E}(r)|$ em função de r para $0<r<2R$, indicando o valor em r = R.

Suponha que exista um tubo muito fino e retilíneo atravessando toda a esfera, passando pelo seu centro. Uma partícula de massa m e carga negativa $-q$ é solta em uma extremidade do tubo, “caindo” nele.

c) (0.5) Desprezando a força gravitacional, calcule a força resultante sobre a partícula quando ela estiver a uma distância r do centro da esfera.

d) (0.5) Qual será o movimento descrito pela carga? Quanto tempo ela levará para retornar ao ponto de que foi solta?

Formulário: $\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int \rho_{\text{int}} dv$, para $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$, $w = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Resolução

a) Usando a Lei de Gauss com uma superfície gaussiana esferica de raio $r: E(4\pi r^2) = \frac{Q'}{\varepsilon_0}$, onde Q' é a carga dentro da superfície gaussiana

Para $r<R$, temos $Q' = Q\left(\frac{r}{R}\right)^3 \quad \to E(r) = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$, $r<R$

Para $r>R$, temos $Q' = Q \quad \to E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, $r>R$

b) Gráfico linear para $0<r<R$, decaindo com $1/r^2$ para $r>R$. Em $r=R$, $E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

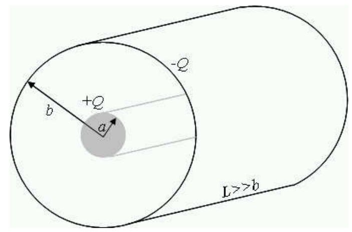
c) A força sobre a partícula no interior da esfera é dada por

$$F = -qE = -\left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right) r \qquad F = -Kr,\ onde\ \ K = \left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)$$

d) Temos uma força restauradora, como em um Oscilador Harmônico Simples, e a carga terá movimento oscilatório. O período de oscilação vale

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m(4\pi\varepsilon_0 R^3)}{qQ}}$$

Q3) Um capacitor cilíndrico é constituído por uma casca cilíndrica de comprimento L contendo no seu interior um cilindro metálico, sendo que os eixos são coincidentes e ambos muito longos. O cilindro interno tem raio a e foi carregada com uma densidade de cargas superficial uniforme $+\sigma$. A casca externa tem raio b e está carregada com carga igual ao negativo da carga do cilindro interno. $Q_b = -Q_a$.



a) (0.5) Calcule a densidade de cargas da superfície externa do capacitor.

b) (0.5) Calcule o campo elétrico dentro do capacitor;

c) (1.0) Calcule a diferença de potencial elétrico entre os dois eletrodos;

d) (0.5) Calcule a capacitância do sistema.

Formulário: $\oint_s \vec{E}d\vec{s} = \int \rho_{\text{int}} dv$, $\Delta V = -\oint \vec{E}d\vec{l}$, $V = k\int \frac{dq}{r}$, $\vec{E} = -gradV$, $C = \left|\frac{Q}{V}\right|$

Resolução: a) $Q_b = 2\pi bL\sigma_b = -Q_a = -2\pi aL\sigma_a$, b) $E\,2\pi rL = \frac{+Q}{\varepsilon_0}$,

c) $\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b E.dr = -\frac{Q_a}{2\pi L\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a} = -\frac{a\sigma_a}{\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$, d) $C = \left|\frac{Q}{V}\right| = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

Q4. Um capacitor C = 1μF, inicialmente descarregado, é conectado a uma bateria com potencial V = 1,5V, através de um resistor (em série) R = 30kΩ.

a) (1.0) Aplique a lei das malhas de Kirchhoff e escreva a equação diferencial algébrica para a carga, *dq/dt*, do capacitor no circuito;

b) (0.5) Resolva a equação diferencial e mostre que a carga, *q*, no capacitor pode ser escrita como função de um termo $e^{-t/\tau}$, onde τ é denominado tempo característico do circuito.

c) (0.5) Qual o valor da corrente elétrica máxima no circuito?

d) (0,5) Quanto vale a constante de tempo característico, τ do circuito? Em que tempo a corrente no circuito vale metade da corrente elétrica inicial $I(t_{1/2}) = \frac{I_0}{2}$?

dados: *ln(2)=0,7* $i = \frac{dq}{dt}$ $V = Ri$.

Resolução:

a) $V - iR - \frac{q}{C} = 0$ $\frac{dq}{dt} = \frac{V}{R} - \frac{q}{RC}$ b) $q = CV\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ com $\tau = RC$

c) $i = \frac{dq}{dt} = \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$ $i_{\max} = i(t = 0) = \frac{V}{R} = \frac{1,5}{30000} = 50\mu A$

d) $\tau = RC = 30000 * 1\times 10^{-6} = 0,03s$, $i(t_{1/2}) = I_0 * \frac{1}{2}$ $e^{-\frac{t_{1/2}}{RC}} = \frac{1}{2}$ $\frac{t_{1/2}}{RC} = \ln 2$

$t_{1/2} = 0,03 * 0,69 = 0.02\,s$