Física III para Engenharia Elétrica
IFUSP - 4320292
Psub – 30/06/2011

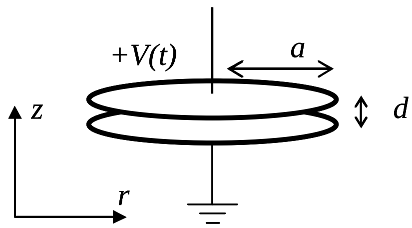
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
NOTA	

A prova tem duração de 120 minutos. Resolva cada questão na folha corespondente. Use o verso se necessário. Escreva de forma legível, à lápis ou tinta.

Justifique suas respostas. Não basta copiar a fórmula do formulário. A prova é individual e sem consulta a anotações ou qualquer outro material.

Nome	Assinatura	No. USP	Turma

Q1. O capacitor de placas planas e paralelas ilustrado na figura, tem placas circulares com raio a separadas por uma distância d. No tempo $t = 0$, esse capacitor foi carregado com uma voltagem V_0 sendo lentamente descarregado à taxa de g [coulombs/segundo]. Suponha $a >> d$ de modo que o campo elétrico seja essencialmente uniforme no volume entre as placas e nulo zero fora desse volume e desconsidere também possíveis efeitos radiativos devido à variação da carga no capacitor.



a) (0.5) Dado que $Q_0 = CV_0$ escreva uma expressão para a carga Q(t) no capacitor em função das dimensões do capacitor, do potencial inicial V_0 e a corrente de descarga;

b) (0.5) Escreva uma expressão para o vetor campo elétrico $\vec{E}(t)$ no interior do capacitor em função do potencial $V(t)$. Indique claramente o sentido do vetor $\vec{E}$.

c) (0.5) Usando a lei de Ampère-Maxwell determine o vetor campo magnético $\vec{B}(t)$ na borda do capacitor, quando r = a .

d) (0.5) Determine o vetor de Poynting $\vec{S}(t, B)$ na superfície lateral do cilindro que circunda o volume do capacitor.

e) (0.5) Quais são as mudanças no resultado do item *d*, se a direção da corrente for invertida, ou seja, se o capacitor estivesse sendo carregado?

Solução:

a) $Q(t) = Q_0 - gt$, com $Q_0 = CV_0$ e $C = \dfrac{\varepsilon_0 \pi a^2}{d}$. Portanto $Q(t) = \dfrac{\varepsilon_0 \pi a^2}{d} V_0 - gt$

b) $E(t) = -\dfrac{V(t)}{d}\hat{z}$, i.e. apontando para baixo. $V(t) = \dfrac{Q(t)}{C} = V_0 - \dfrac{g}{C} t$

c) Lei de Ampere-Maxwell num raio r: $\oint \vec{B}.d\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi_E}{\partial t} \quad 2\pi\, rB = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi_E}{\partial t}$

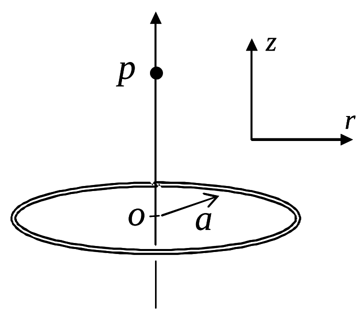
$$\frac{\partial \phi_E}{\partial t} = \frac{\pi r^2 \partial E}{\partial t} = \frac{\pi r^2}{d}\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\pi r^2}{d}\left(-\frac{g}{C}\right) = -\frac{\pi r^2}{d}\frac{gd}{\varepsilon_0 \pi a^2} = -\frac{g}{\varepsilon_0}\frac{r^2}{a^2}$$

$2\pi r B = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{g}{\varepsilon_0}\frac{r^2}{a^2} = -\mu_0 g \frac{r^2}{a^2} \quad \vec{B} = -\mu_0 \frac{g}{2\pi}\frac{r}{a^2}\hat{\theta}$. Assim $\vec{B}(a) = -\frac{\mu_0 g}{2\pi a}\hat{\theta}$

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} \quad S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\frac{V(t)}{d}\frac{\mu_0 g}{2\pi a} = \frac{gV(t)}{2\pi a d} \quad \rightarrow \quad \vec{S} = \frac{gV(t)}{2\pi a d}\hat{r}$$

e) Invertendo a corrente, $\vec{E}$ se mantém o mesmo (pois só depende da carga, não da corrente), enquanto $\vec{B}$ mantém a magnitude mas inverte o sentido, apontando no sentido anti-horário. Portanto $\vec{S}$ mantém a magnitude, mas inverte o sentido, apontando para dentro do cilíndro.

Q2. Um anel com raio a localizado na origem do eixo z, foi carregado com carga Q positiva, distribuída uniformemente sobre o anel:



a) (0.5) Qual é a densidade de carga, λ no anel?

b) (0.5) Determine o potencial elétrico *V(z)* produzido pelo anel num ponto p=(0,0,z) ao longo de seu eixo;

c) (0.5) Usando o resultado anterior, calcule o vetor campo elétrico no mesmo ponto p=(0,0,z).

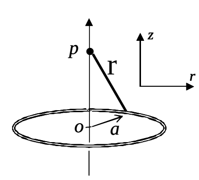
O anel foi posto para rodar em torno de seu eixo com velocidade angular w.

d) (0.5) Qual é a corrente elétrica aparente criada pelas cargas em movimento?

e) (0.5) Supondo dada a corrente *i(w)* sobre o anel, qual é o valor do campo magnético *B(z)* no ponto p=(0,0,z) ?

solução

a) $\lambda = \frac{dq}{a d\theta} = \frac{Q}{2\pi a}$



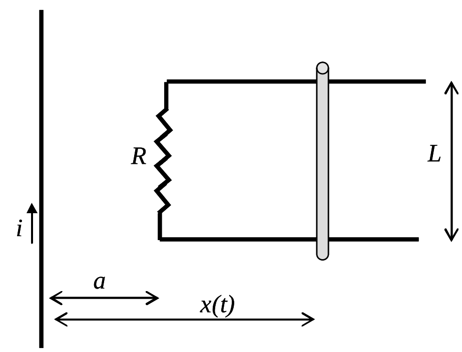
b) $V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}$

c) $\vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad \vec{E}_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{\left(z^2 + a^2\right)^{3/2}} \hat{k}$

d) $i d\vec{l} = dq\vec{v} \quad ia\, d\theta = dq\, \omega a \quad i = \omega a \frac{dq}{ad\theta} = \omega a \lambda$

e) $\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 i a^2}{2\left(a^2 + z^2\right)^{3/2}} \hat{z} = \frac{\mu_0 \omega\, a^3 \lambda}{2\left(a^2 + z^2\right)^{3/2}} \hat{z}$

Q3. Uma barra condutora é deslocada com velocidade constante v sobre dois trilhos condutores, afastando-se de um fio muito longo conduzindo uma corrente i, conforme a figura. No tempo $t=0$, $x(0) = x_0 > a$. Os trilhos, com resistência desprezível, estão ligados numa das extremidades através de um resistor R. O módulo do campo magnético de um fio infinito vale $B(r) = \mu_0 i / 2\pi\, r$



a) (0.5) Calcule o fluxo do campo magnético $\phi_{B(t)}$ através da espira formada pelos trilhos, a barra condutora e o resistor;

b) (0.5) Indique o sentido da corrente elétrica na barra condutora. Justifique sua resposta.

c) (1.0) Determine a corrente elétrica induzida na espira em função do tempo t.

d) (0.5) Quando vale a força $\vec{F}(t)$ aplicada na barra para manter sua velocidade constante?

Solução

a) $B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad \phi_B = L \int_a^{x(t)} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} dr \quad \phi_B = \frac{L\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{x(t)}{a}$ para dentro do papel.

b) A barra se move para direita, aumenta ϕ_B. A corrente induzida é oposta ao aumento de ϕ_B, criando um campo contrário, (saindo do papel), portanto a corrente induzida está no sentido anti-horário.

c) $\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 i L}{2\pi} \left(\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} \right) = \frac{\mu_0 i L}{2\pi\, x} v \rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\mu_0 i L}{2\pi\, Rx} v$

d) $$F_m = iLB = \left(\frac{\mu_0 I L v}{2\pi R x}\right) L \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\right) = \frac{\mu_0^2 I^2 L^2 v}{4\pi^2 R x^2}.$$

Q4. Um solenóide ideal com seção circular de raio R, comprimento h possui N espiras. Em cada espira do solenóide passa uma corrente I constante.

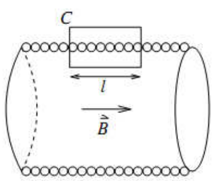
a) (0.5) Use a lei de Ampère para calcular o campo magnético B_0 produzido pelo solenóide.

b) (0.5) Determine a autoindutância do solenóide;

c) (1.0) Sabendo que a densidade de energia magnética é dada por $u_m = B^2 / 2\mu_0$ determine a energia magnética total armazenada no solenóide.

d) (0.5) Considere agora o solenóide preenchido com um material com susceptibilidade magnética χ_m. Qual é o novo campo magnético no interior do solenóide?

solução

a) 

$$\oint_C \vec{B}_0 \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{total}, \qquad B_0 l = \mu_0 \frac{N}{h} l I \Longrightarrow \boxed{B_0 = \frac{\mu_0 N I}{h}}$$

c) $$U_m = u_m V = u_m \pi R^2 h = \frac{B_0^2}{2\mu_0}\pi R^2 h \Longrightarrow \boxed{U_m = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{h} I^2}$$

b) $$U_m = \frac{1}{2} L I^2 \Longrightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{h}}$$

d) $$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m)\vec{H} = (1 + \chi_m)\vec{B}_0,$$

Formulário:

$$\oint \varepsilon\vec{E}.d\vec{s} = q \qquad \oint \vec{B}.d\vec{s} = 0 \qquad \oint \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{\partial\phi_B}{\partial t} \qquad \oint \frac{\vec{B}}{\mu}.d\vec{l} = I + \varepsilon\frac{\partial\phi_E}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}.\left(\varepsilon\vec{E}\right) = \rho \qquad \vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{J} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$q = \int \rho dV \qquad i = \frac{dq}{dt} \qquad \vec{F} = q\vec{E} + q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) \qquad id\vec{l} = dq\vec{v}$$

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H} + \vec{M} \qquad \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{H} \qquad \frac{\left|\vec{M}\right|}{\left|\vec{H}\right|} = \frac{\mu}{\mu_0} - 1 = \chi_m \qquad \vec{\mu} = I\vec{A}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \qquad \vec{P} = \chi_e\varepsilon_0\vec{E} \qquad \chi_e = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \qquad dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} \qquad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r} \qquad d\vec{F} = id\vec{l}\times\vec{B}$$

$$\nabla U = \hat{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial U}{\partial z} \qquad \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla U = \hat{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} + \hat{z}\frac{\partial U}{\partial z} \qquad \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\theta & A_z \end{vmatrix}$$

$$U = RI \qquad P = UI \qquad \varepsilon = -N\frac{d\phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \qquad \varepsilon_2 = -M\frac{dI_1}{dt}$$

$$M_{21} = \frac{N_2\phi_{21}}{I_1} \qquad \vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} \qquad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{id\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$