Física III para Engenharia Elétrica
IFUSP - 4320292
P3 – 16/06/2011

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
NOTA	

A prova tem duração de 120 minutos. Resolva cada questão na folha corespondente. Use o verso se necessário. Escreva de forma legível, à lápis ou tinta.

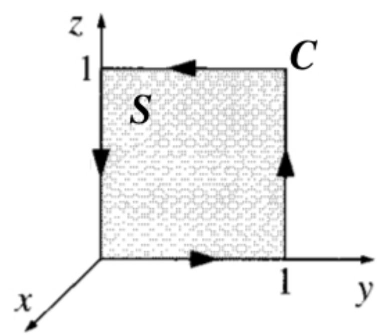
Justifique suas respostas. Não basta copiar a fórmula do formulário. A prova é individual e sem consulta a anotações ou qualquer outro material.

Nome	Assinatura	No. USP	Turma

Q1a) (0.5) Usando os Teoremas de Gauss e Stokes, mostre que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$.

b) (0.5) Considere o vetor campo elétrico $\vec{E} = (E_x, E_{y,} E_z) = (0,\ 2xz + 3y^2,\ 4yz^2)$. Suponha que esse campo é gerado por uma densidade de carga $\rho(x, y, z)$. Determine $\rho(x, y, z)$.

c) (0.5) Suponha agora que o campo $\vec{E}$ do item b) é resultado apenas da variação temporal de um campo magnético $\vec{B}(t)$ sem a presença de cargas elétricas. Determine a derivada temporal $\partial\vec{B}/\partial t$.



d) (1.0) Considerando ainda o mesmo campo $\vec{E}$ do item b), calcule o fluxo de $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ sobre a superfície $\boldsymbol{S}$ de um quadrado unitário no plano yz. Em seguida calcule a circulação de $\vec{E}$, ou seja, $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$, no sentido anti-horário, ao longo do caminho $\boldsymbol{C}$ indicado sobre o mesmo quadrado unitário.

Dados: $\nabla \cdot \vec{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

$$\nabla \times \vec{A} = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix}$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

$$\int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Solução: a) Usando $\vec{A} = \nabla \times \vec{F}$ no Teorema de Gauss, e aplicando em seguida o Teorema de Stokes, temos $\boxed{\int_V \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{F}\right) dV = \oint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_{C=0} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0}$ pois uma superfície fechada está associada a uma curva nula, i.e. um ponto. (Pense em curva finita, que define uma superficie aberta. À medida que a curva diminui tendendo a zero, a superficie aberta se fecha). Como a igualdade acima vale para qualquer volume, o integrando do lado esquerdo deve ser nulo.

b) $\nabla \cdot \vec{E} = 6y + 8yz$, portanto pela Lei de Gauss $\boxed{\rho = \varepsilon_0 (6y + 8yz)}$.

c) $\nabla \times \vec{E} = \left(4z^2 - 2x, 0, 2z\right)$, portanto pela Lei de Faraday $\boxed{\dfrac{\partial B}{\partial t} = -\left(4z^2 - 2x, 0, 2z\right)}$.

d) Como $d\vec{S} = (dydz, 0, 0)$, temos:

$$\oint_{S,x=0} \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S,x=0} (\nabla \times \vec{E})_x \, dydz = \int_0^1 dy \int_0^1 dz \; 4z^2 = \int_0^1 dy \left.\frac{4z^3}{3}\right|_0^1 = \frac{4}{3} \int_0^1 dy = \boxed{\frac{4}{3}}$$

Por outro lado, $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_i + \int_{ii} + \int_{iii} + \int_{iv}$

Por exemplo, $\int_i = \int_{i, x=z=0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^1 E_y dy = \int_0^1 E_y dy = \int_0^1 3y^2 dy = \left. y^3 \right|_0^1 = 1$

Similarmente, $\int_{ii} = 4/3$, $\int_{iii} = -1$ e $\int_{iv} = 0$. Portanto $\boxed{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{4}{3}}$

Resultado que pode ser obtido também pelo Teorema de Stokes.

Q2. Um capacitor de placas paralelas tem placas circulares de raio $\boldsymbol{r}$ separadas por uma distância ℓ. Esse capacitor foi carregado com uma voltagem $\boldsymbol{\Delta V}$ e está descarregando quando uma corrente $\boldsymbol{i}$ sai dele. Suponha que $\ell << \mathrm{r}$, de modo que o campo elétrico é essencialmente constante no volume entre as placas e nulo fora desse volume. Perceba que a corrente de deslocamento entre as placas do capacitor cria um campo magnético.

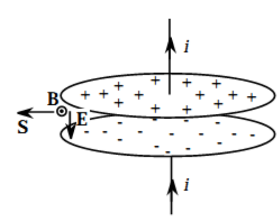
a) (1.0) Calcule o modulo, a direção e o sentido do campo elétrico e magnético nesse sistema.

b) (1.0) Determine o modulo, a direção e o sentido do vetor de Poynting na superfície lateral do cilindro que define o volume interno do capacitor.

c) (0.5) Quais são as mudanças no resultado do item b), se a direção da corrente for invertida, ou seja, se o capacitor estiver sendo carregando?

Solução:

a) $E = \Delta V / \ell$ na direção da placa positiva para a placa negativa, $B = \mu_0 i / 2\pi r$ na direção anti-horária ao redor das placas.



b) O vetor de Poynting é: $S = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$ resultando em $S = \frac{\Delta V\, i}{2\pi\, r\ell}$ apontando para fora do cilindro como mostra a figura.

c) O sentido do vetor de Poynting é invertido, ele passa a apontar para dentro do cilindro.

Q3. Considere uma partícula pequena e esférica de raio $\boldsymbol{r}$ localizada no espaço a uma distância $\boldsymbol{R}$ do Sol. Considere também que a intensidade da radiação solar nesse ponto vale $\boldsymbol{S}$ [W/m^2] e toda a radiação sendo absorvida pela partícula.

a) (1.0) Calcule a força exercida pela radiação solar na partícula em função do raio da partícula e da intensidade da radiação S.

b) (1.0) Qual é a razão F_r/F_g, onde F_r é a força exercida pela radiação e F_g é a força gravitacional atrativa? Reescreva a massa da partícula em função da sua densidade ρ. Qual é a dependência funcional da razão F_r/F_g com o raio da partícula?

c) (0.5) Calcule o valor do $\boldsymbol{r}$ quando a partícula está em equilíbrio de forças, sabendo que a densidade de massa da partícula é 1,50 g/cm^3, ela está a 3,75 x 10^{11} m do Sol e a intensidade solar nesse ponto vale 214 W/m^2.

Solução:

(a) $F_r = \frac{S\pi r^2}{c}$ $\quad F_g = \frac{GM_S m}{R^2} = \left(\frac{GM_S}{R^2}\right)\rho\frac{4}{3}\pi r^3$ onde M_s é a massa do Sol, r o raio da partícula e R a distância do Sol até a partícula. assim, $\frac{F_r}{F_g} = \left(\frac{1}{r}\right)\frac{3SR^2}{4cGM_S\rho} \propto \frac{1}{r}$

(b) Quando $F_g = F_r$ temos $r = \frac{3SR^2}{4cGM_S\rho}$ Portanto,

$$r = \frac{3\left(214\ \mathrm{W/m^2}\right)\left(3.75\times10^{11}\ \mathrm{m}\right)^2}{4\left(6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}\right)\left(1.991\times10^{30}\ \mathrm{kg}\right)\left(1500\ \mathrm{kg/m^3}\right)\left(3.00\times10^{8}\ \mathrm{m/s}\right)} = \boxed{3.78\times10^{-7}\ \mathrm{m}}$$

Q4. Uma onda eletromagnética plana varia senoidalmente a 100 MHz e se propaga no vácuo na direção $+x$. O **campo elétrico** tem valor máximo 0.1 V/m e está orientado na direção do eixo y.

a) (0.5) Calcule o comprimento de onda, o período e o valor máximo do **campo magnético** da onda;

b) (0.5) Escreva as equações dos **vetores** $\vec{E}(t)$ e $\vec{B}(t)$ dessa onda;

c) (0.5) Calcule a potência média por unidade de área que essa onda transporta;

d) (0.5) Calcule a densidade média de energia dessa onda, em J/m^3;

e) (0.5) Determine a pressão que essa onda exerce numa superfície perfeitamente refletora se nela incidisse perpendicularmente.

Dados: $\lambda = cT$ T=1/f $T = 2\pi / \omega$ $k = 2\pi / \lambda$

Q4) a) NA OEM $\vec{E}$ e $\vec{B}$ TÊM MESMA FREQUÊNCIA E MESMO COMPRIMENTO DE ONDA.

$\boxed{\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^8}{100\times10^6} = 3\,m}$ $\boxed{T = \frac{1}{f} = \frac{1}{100\times10^6} = 1\,ns}$ $B_{max} = \frac{E_{max}}{c} = \frac{0.1}{3\times10^8}$

$\boxed{B_{max} = 0.33\,nT}$

b) DIREÇÃO DE PROPAGAÇÃO : $\hat{i}$

$\vec{E} = E_{max}\cos(kx - \omega t)\,\hat{j} = (0.10\,\tfrac{V}{m})\cos\left[\frac{2\pi x}{3(m)} - \frac{2\pi t}{1(ns)}\right]\hat{j}$ $\Big\} \Rightarrow \vec{B} = \hat{i}\times\frac{\vec{E}}{c}$

$\vec{B} = \frac{E_{max}}{c}\cos(kx - \omega t)\,\hat{k} = (0.33\,nT)\cos\left[\frac{2\pi x}{3(m)} - \frac{2\pi t}{1(ns)}\right]\hat{k}$

c) $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{E_{max}B_{max}\cos^2(kx-\omega t)}{\mu_0}\,\hat{i} \Rightarrow |\vec{S}| = \frac{E_{max}^2}{\mu_0 c}\cos^2(kx - \omega t) = S$

MÉDIA NUM PERÍODO: $S_{médio} = \frac{E_{max}^2}{2\mu_0 c} \cong \frac{(0.1)^2}{2\times377} \cong 13.3\times10^{-6}\,W/m^2$

$\left.\begin{aligned}\mu_0 &= 4\pi\times10^{-7}\,(T/A)\\ c &= 3\times10^8\,(m/s)\end{aligned}\right\} \Rightarrow$ $\boxed{\mu_0 c \cong 377\,\Omega \text{ (IMPEDÂNCIA DO VÁCUO)}}$

d) $u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\cancel{\mu_0}\epsilon_0}{2\cancel{\mu_0}}E^2 = \epsilon_0 E^2 = \frac{S}{c}$

$\Rightarrow$ MÉDIA NUM PERÍODO: $u_{médio} = \frac{\epsilon_0 E_{max}^2}{2} = \frac{S_{médio}}{c} = \frac{13.3\times10^{-6}}{3\times10^8} =$

$\boxed{u_{médio} = 4.43\times10^{-14}\,J/m^3}$

e) REFLEXÃO TOTAL $\Rightarrow$ pressão $= p = \frac{2S_{med}}{c} = \frac{2\times13.3\times10^{-6}}{3\times10^8} = 8.84\times10^{-14}\,Pa$

$\boxed{p = 8.84\times10^{-14}\,Pa}$