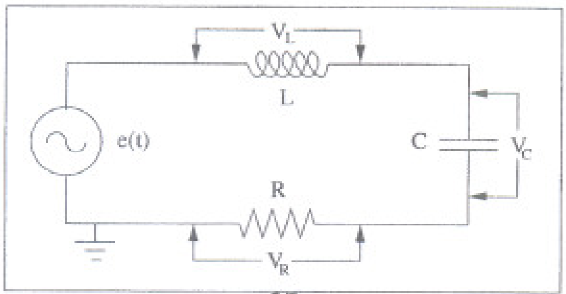
5 Fenômenos transitórios em circuitos RLC

Objetivos

- Estudar as oscilações amortecidas de um circuito RLC submetido a transitórios elétricos;
- Determinar a frequência natural de oscilação do sistema e seu fator de qualidade.

Introdução Todo sistema mecânico possui uma freqüencia natural de oscilação. É a freqüência em que irá vibrar quando é submetido a uma perturbação isolada. Um circuito elétrico não é exceção; um circuito formado por resistor, capacitor e indutor, abreviado *circuito RLC*, quando submetido a um pulso de tensão transitório, oscila numa freqüência que lhe é própria, executando um movimento oscilatório amortecido. Podemos entender a oscilação no no circuito RLC observando a energia nele armazenada, ora sob a forma elétrica no capacitor, ora sob a forma magnética no indutor. O amortecimento ocorre porque parte da energia é perdida em cada ciclo de oscilação, sob forma de calor no resistor.

Fundamentos Teóricos Vamos analisar um circuito RLC série submetido a uma tensão variável $e(t)$, conforme representado na figura abaixo.



Aplicando a lei de Kirchhoff a este circuito resulta

$$\begin{aligned} V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) &= e(t) \\ Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} &= e(t) \\ L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} &= e(t) \end{aligned} \tag{5.34}$$

A solução geral da eq.5.34 – como de toda equação diferencial! – é constituída de uma solução *particular*, somada a uma *solução geral da equação homogênea*. A solução particular corresponde ao estado permanente do sistema enquanto a solução da equação homogênea representa os efeitos transitórios. Como estamos interessados apenas nestes últimos, vamos *analisar apenas a equação homogênea*. Após derivar a eq. 5.34 mais uma vez com relação ao tempo e substituir $i = dq/dt$:

$$L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C} = 0 \tag{5.35}$$

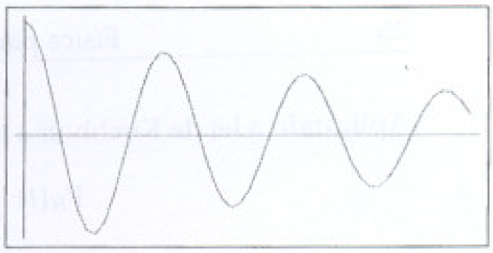
A solução desta equação é

$$i(t) = Ae^{-\gamma t} sen(\omega t + \phi) \tag{5.36}$$

onde ω é a frequência própria de oscilação do circuito amortecido, $\gamma = R/2L$ é o fator de amortecimento e ϕ é uma fase arbitrária. A frequência $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ é a frequência natural de oscilação do circuito (frequência de ressonância), e corresponde à situação sem amortecimento.
Note que a frequência $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ pode ser *real, nula ou imaginária*, dependendo dos valores de R, L e C. Em cada caso, o circuito responderá de forma diferente à tensão aplicada.

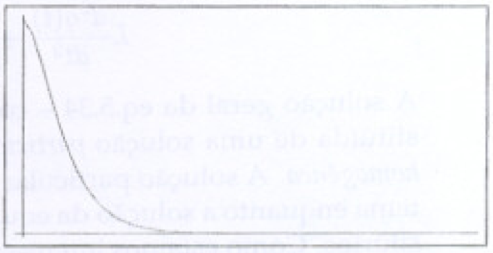
Há três casos a analisar:

i. **Amortecimento <u>sub-crítico</u>** ($\omega \Longrightarrow$ real) O circuito oscila com frequência $\omega \approx \omega_0$ e a amplitude decai exponencialmente executando vários ciclos completos. Neste regime temos



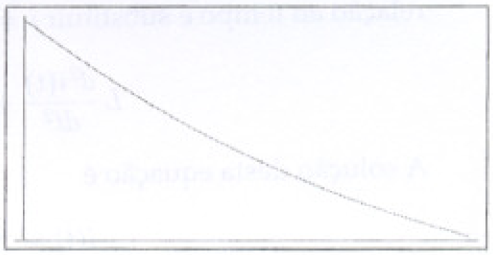
$$\omega_0^2 > \gamma^2 \Longrightarrow \frac{L}{C} > \frac{R^2}{4}$$

ii. **Amortecimento <u>crítico</u>** Não há oscilação e a corrente cai exponencialmente a zero. Neste caso, ($\omega \Longrightarrow 0$)



$$\omega_0^2 = \gamma^2 \Longrightarrow \frac{L}{C} = \frac{R^2}{4}$$

iii. **Amortecimento <u>super-crítico</u>** ($\omega \Longrightarrow$ Imaginário)



$$\omega_0^2 < \gamma^2 \Longrightarrow \frac{L}{C} < \frac{R^2}{4}$$

Não há oscilação e a corrente decai lentamente num intervalo correspondente a muitos ciclos.

Fator de Qualidade do circuito O fator de qualidade Q de um circuito RLC oscilando com frequência ω pode ser definido como

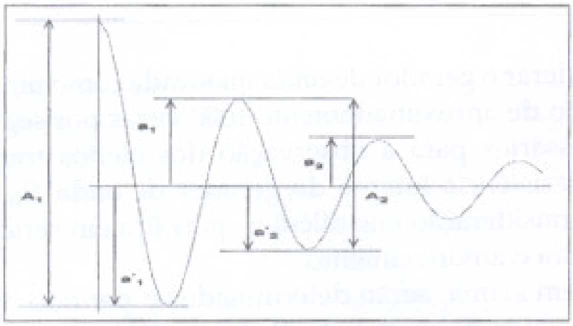
$$Q = \omega \times \frac{\text{energia armazenada no circuito}}{\text{potência média dissipada por ciclo}}$$

Portanto, é de se esperar que quanto menor for o amortecimento das oscilações, menor será a potência ôhmica dissipada no resistor e maior será o fator de qualidade Q do circuito. Na realidade, o fator Q representa o valor (em radianos) do argumento ωt necessário para que a energia do oscilador diminua de um fator $1/e$. No nosso caso, a energia armazenada é proporcional ao quadrado da corrente no circuito $E_{RLC} \sim I^2 \sim e^{-2\gamma t}$. Portanto a energia decresce de $1/e$ após um intervalo de tempo $\Delta t = \dfrac{1}{2\gamma} = \dfrac{L}{R}$, de forma que o fator Q pode ser escrito como

$$Q = \omega \frac{L}{R} \tag{8}$$

onde L e R são a indutância e a resistência *totais* do circuito.
O fator Q também pode ser definido em função do decremento logarítmico, que indica a taxa de diminuição da amplitude das oscilações. O decremento logarítmico δ é definido como o logarítmo natural da razão entre duas amplitudes sucessivas das oscilações amortecidas

$$\delta = \ln\frac{i(t)}{i(t+T)} = \ln\frac{a_1}{a_2} = \ln\frac{A_1}{A_2} \tag{9}$$



Lembrando que a corrente no circuito varia com $i(t) = Ae^{-\gamma t}sen(\omega t + \phi)$ e adotando $\phi = \pi/2$ para simplificar os cálculos, temos

$$i(t=0) = a_1 = A \quad \text{e} \quad i(t=T) = a_2 = Ae^{-\frac{R}{2L}T}$$

e portanto

$$\delta = \ln\frac{a_1}{a_2} = \ln e^{\frac{R}{2L}T} = \frac{R}{2L}T = \frac{R}{2L}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{Q}$$

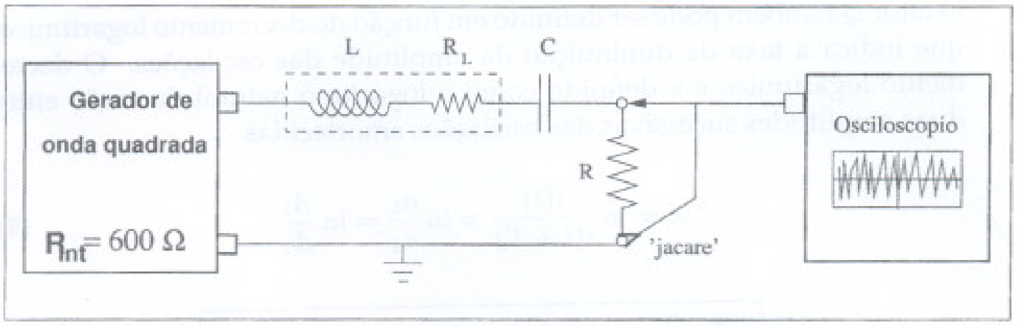
Assim, vemos que o fator de qualidade do circuito também pode ser escrito como

$$Q = \frac{\pi}{\delta} \tag{10}$$

onde δ é o decremento logarítmico.
Observação:
Para uma determinação mais precisa do decremento logarítmico, podemos medir duas quaisquer amplitudes pico a pico das oscilações e utilizar a relação

$$\delta_n = \ln\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{n-1}\ln\frac{A_1}{A_n}$$

Aspectos Experimentais O arranjo experimental para análise dos fenômenos transitórios será do tipo esquematizado abaixo.



Podemos considerar o gerador de onda quadrada como uma chave que liga e desliga á razão de aproximadamente 1000 vezes por segundo provendo os pulsos necessários para a observação dos efeitos transitórios no osciloscópio. A resistência interna do gerador de onda $R_{int} = 600\Omega$ deve ser levada em consideração nos cálculos, pois fica em série com o circuito, contribuindo para o amortecimento.
Com a montagem acima, serão determinados o período das oscilações amortecidas, e o fator de qualidade Q do circuito a partir da medida do decremento logarítmico. Estes valores serão confrontados com os calculados a partir dos valores nominais dos componentes. Em seguida, o valor do capacitor C será alterado para observação dos regimes crítico e super-crítico. Finalmente, observaremos as formas de onda no capacitor e no indutor, voltando ao valor original de C, correspondente às oscilações amortecidas. Estas observações deverão ser efetuadas com uma troca de posições entre o resistor e o elemento estudado, para garantir que o terra do gerador seja coincidente com terra do osciloscópio.