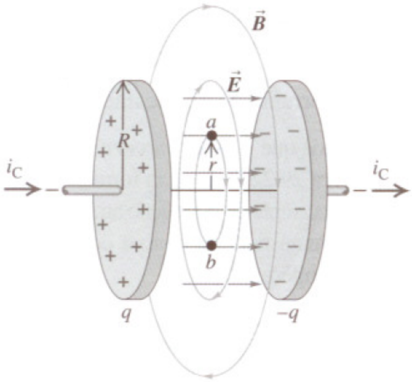
Instituto de Física

FAP 2292

Lista de Exercícios 7
Equações de Maxwell e
condições de contorno

Exercícios Sugeridos (25/05/2010) A numeração corresponde ao Livros Textos A e B.

B29.36 Um capacitor de placas paralelas e cheio de ar está sendo carregado, como indica a figura. As placas circulares possuem raio $R = 4{,}0$ cm e, em um dado instante, a corrente de condução nos fios (muito longos) é $i_C = 0{,}280$ A. (a) Qual é a densidade de corrente de deslocamento J_D no espaço entre as placas? (b) Qual é a taxa de variação do campo elétrico entre as placas? (c) Qual é o campo magnético induzido entre as placas a uma distância de $2{,}0$ cm do eixo? (d) E a $1{,}0$ cm do eixo?



B29.39 *Corrente de Deslocamento em um Fio.* Um fio de cobre longo e retilíneo, com área de seção reta circular $A = 2{,}1$ mm^2, transporta uma corrente I de 16 A. A resistividade do material, ρ, é de $2{,}0\times10^{-8}$ Ω.m. (a) Qual é o campo elétrico uniforme no material? (b) Quando a corrente varia a uma taxa de 4000 A/s, qual é a taxa de variação do campo elétrico no material? (c) Qual é a densidade da corrente de deslocamento no material do item (b)? (*Sugestão:* como κ para o cobre é muito próximo de 1, use $\epsilon = \epsilon_0$.) (d) Quando a corrente varia como no ítem (b), qual é o módulo do campo magnético a 6,0 cm do centro do fio? Note que tanto a corrente de condução quanto a corrente de deslocamento devem ser incluídas no cálculo de B. A contribuição dada pela corrente de deslocamento é significativa?

NA3.1 Calcular o divergente e o rotacional dos seguintes campos vetoriais:

a) $\mathbf{F}(x,y,z) = xy\mathrm{e}^{2y}\,(z\,\hat{x} + xz\,\hat{y} + x\,\hat{z})$

b) $\mathbf{G}(x,y,z) = xy^2z^3\,(\hat{x} + 2\,\hat{y} + 3\,\hat{z})$

NA3.2 Considere o campo elétrico $\mathbf{E}(x,y,z) = \dfrac{Q_0}{\epsilon_0 L^7}(xy^2z^2\,\hat{x} + x^2yz^2\,\hat{y} + x^2y^2z\,\hat{z})$, onde as constantes Q_0 e L têm dimensões, respectivamente, de carga e comprimento.

a) Determine a densidade volumétrica de carga $\rho(x,y,z)$.

b) Calcule a carga total contida no cubo $0 \le x \le 2L$, $0 \le y \le 2L$, $0 \le z \le 2L$.

NA3.3 Quais dos campos vetoriais abaixo podem representar campos magnéticos? Para cada um destes, determine a densidade de corrente $\mathbf{J}$.

a) $\mathbf{A}(x,y,z) = A_1x^2z\,\hat{x} + A_2\,\hat{y} - A_1xz^2\,\hat{z}$

b) $\mathbf{B}(x,y,z) = B_1xy^2\,\hat{x} + B_2x^2y^{-1}\,\hat{y} + 3B_3\,\hat{z}$

c) $\mathbf{C}(x,y,z) = C_0\left(\mathrm{e}^{x/y}\,\hat{x} + \mathrm{e}^{y/z}\,\hat{y} + \mathrm{e}^{z/x}\,\hat{z}\right)$

d) $\mathbf{D}(x,y,z) = D_1 \ln(x/y)\,\hat{x} - D_1(y/x)\,\hat{y} + D_2\,\hat{z}$
e) $\mathbf{E}(x,y,z) = E_0 \left(z^2\,\hat{x} + y^2\,\hat{y} + x^2\,\hat{z}\right)$

NA3.4 Considere o campo magnético $\mathbf{B}(x,y,z) = \mu_0 k(-y\,\hat{x} + x\,\hat{y})$, onde k é uma constante. Calcule a circuitação deste campo ao longo de uma trajetória circular de raio a no plano xy centrada na origem.

NA3.5 Considere um fio de cobre ($\epsilon \approx \epsilon_0$, $\rho = 2{\times}10^{-8}\ \Omega\,\mathrm{m}$) submetido a um campo elétrico alternado com 1 kHz de freqüência. Calcule a razão entre as amplitudes das correntes de condução, J, e de deslocamento J_d.

NA3.6 A densidade de corrente de deslocamento num meio com $\epsilon = \epsilon_0$ é dada por

$$\mathbf{J}(z,t) = J_0 \cos(\omega t - kz)\,\hat{x},$$

onde J_0, ω e k são constantes com dimensões apropriadas.
a) Determine o campo elétrico $\mathbf{E}(z,t)$.
b) Determine o campo magnético $\mathbf{B}(z,t)$.
c) Encontre a relação entre ω e k para que todas as equações de Maxwell sejam satisfeitas.

NA3.7 Considere um campo elétrico no vácuo dado por:

$$\mathbf{E}(x,t) = E_0 \mathrm{e}^{x/x_0 - kt}\,\hat{y}.$$

Sabendo que todos os campos variam no tempo da forma e^{-kt}, encontre as expressões para o campo magnético $\mathbf{B}(x,t)$ e para a constante k.

NA3.8 Considere o campo magnético no vácuo dado, em coordenadas cilíndricas, por

$$\mathbf{B}(\rho,\varphi,z,t) = B_0 \mathrm{e}^{kt}\,\hat{z},$$

com B_0 e k constantes.
a) Verifique que este campo satisfaz as equações de Maxwell.
b) Determine o campo elétrico $\mathbf{E}$.
c) Determine a densidade de corrente $\mathbf{J}$.

NA3.9 Um eletroíma cilíndrico de raio a tem um *gap* de extensão $d \ll a$. A corrente no eletroímã varia no tempo de tal forma que o campo magnético no *gap* é dado por

$$\mathbf{B}(\rho,\varphi,z,t) = \beta t\,\hat{z},$$

onde β é uma constante. Considerando o eletroíma de comprimento infinito, determine o campo elétrico $\mathbf{E}(\rho,\varphi,z,t)$ em todo o espaço.

NA3.10 O campo elétrico em um determinado meio é dado por

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 \mathrm{e}^{-\beta z}\,\mathrm{sen}(kz - \omega t)\,\hat{x}.$$

a) Determine a relação entre β, k, e ω para que este campo satisfaça as equações de Maxwell.
b) Determine o campo magnético $\mathbf{B}$.
c) Determine a densidade de corrente $\mathbf{J}$.

NA3.11 Um campo elétrico no vácuo é dado, em coordenadas esféricas, por

$$\mathbf{E}(r,\theta,\varphi,t) = \frac{A \operatorname{sen}\theta}{r} \cos(\omega t - kr)\,\hat{\theta}.$$

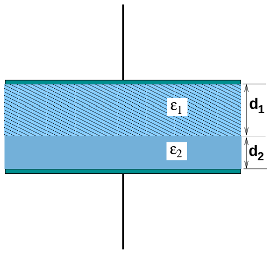
Calcule o campo $\mathbf{H}$ e mostre que

$$|\mathbf{E}|/|\mathbf{H}| = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = Z_0 \approx 377\,\Omega.$$

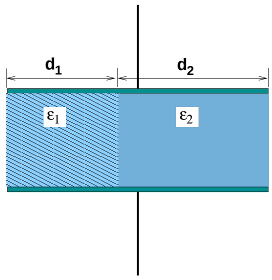
Z_0 é denominada *impedância característica do vácuo*.

NA4.1 Utilize as condições de contorno para $\mathbf{E}$ e $\mathbf{D}$ para provar que um capacitor com armadura na forma de um quadrado com lado ℓ preenchido com dois materiais não condutores de constantes dielétricas κ_1 e κ_2 dispostas

(a) *uma sobre a outra*



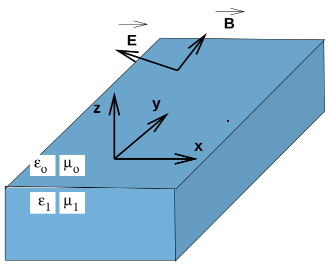
e (b) *lado a lado*



correspondem às mesmas condições matemáticas de dois capacitores, respectivamente, *em série* e *em paralelo*.

NA4.2 Uma carga puntiforme q está localizada na interface de dois meios dielétricos homogêneos caracterizados por ϵ_1 e ϵ_2. Determine $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{P}$ em cada um dos meios.

NA4.3 Uma onda eletromagnética, propagando-se no vácuo, incide sobre a interface de separação de um meio dielétrico com permissividade ϵ_1 e permeabilidade μ_1. A interface entre o dielétrico e o vácuo está no plano xy. Num certo instante, do lado da interface que está no vácuo, os campos elétrico e magnético da radiação são expressos por:



$$\mathbf{E}_0 = E_0\,(-\operatorname{sen}\alpha\,\hat{x} + \cos\alpha\,\hat{z}) \qquad \text{e,} \quad \mathbf{B}_0 = \frac{E_0}{c}\,\hat{y}.$$

Utilizando as condições de contorno, determine os campos $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{H}_1$ do lado da interface no meio 1.