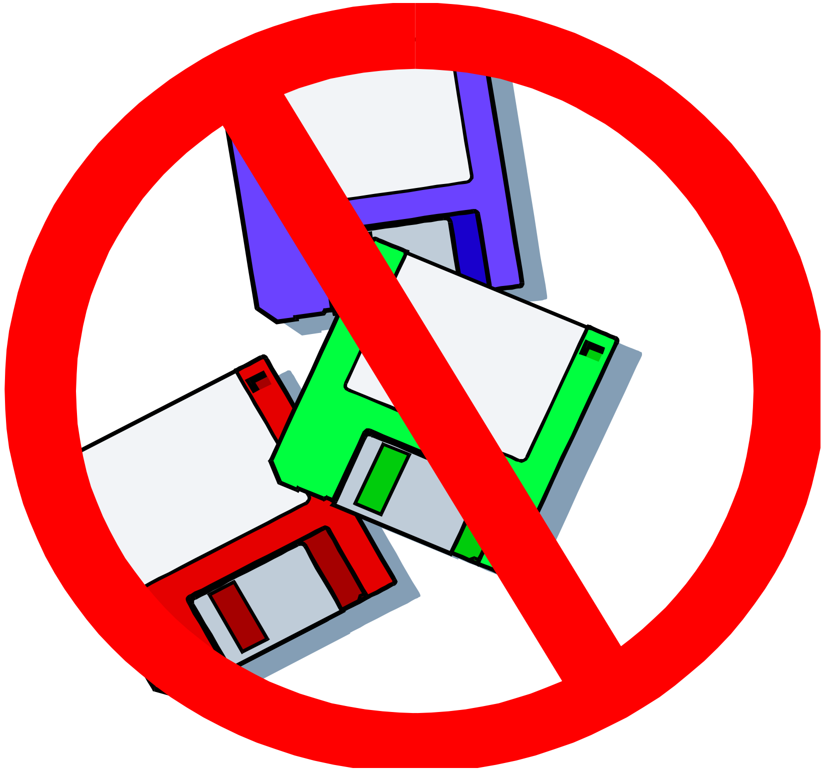
Linha de Transmissão
Parte 1
Equação de Onda e Excitação Senoidal

SEL 310/612 Ondas Eletromagnéticas

Amílcar Careli César
Departamento de Engenharia Elétrica da EESC-USP

Atenção!



- Este material didático é planejado para servir de apoio às aulas de SEL-310 E SEL-612: Ondas Eletromagnéticas, oferecida aos alunos regularmente matriculados no curso de engenharia elétrica e engenharia de computação.
- Não são permitidas a reprodução e/ou comercialização do material.
- solicitar autorização ao docente para qualquer tipo de uso distinto daquele para o qual foi planejado.

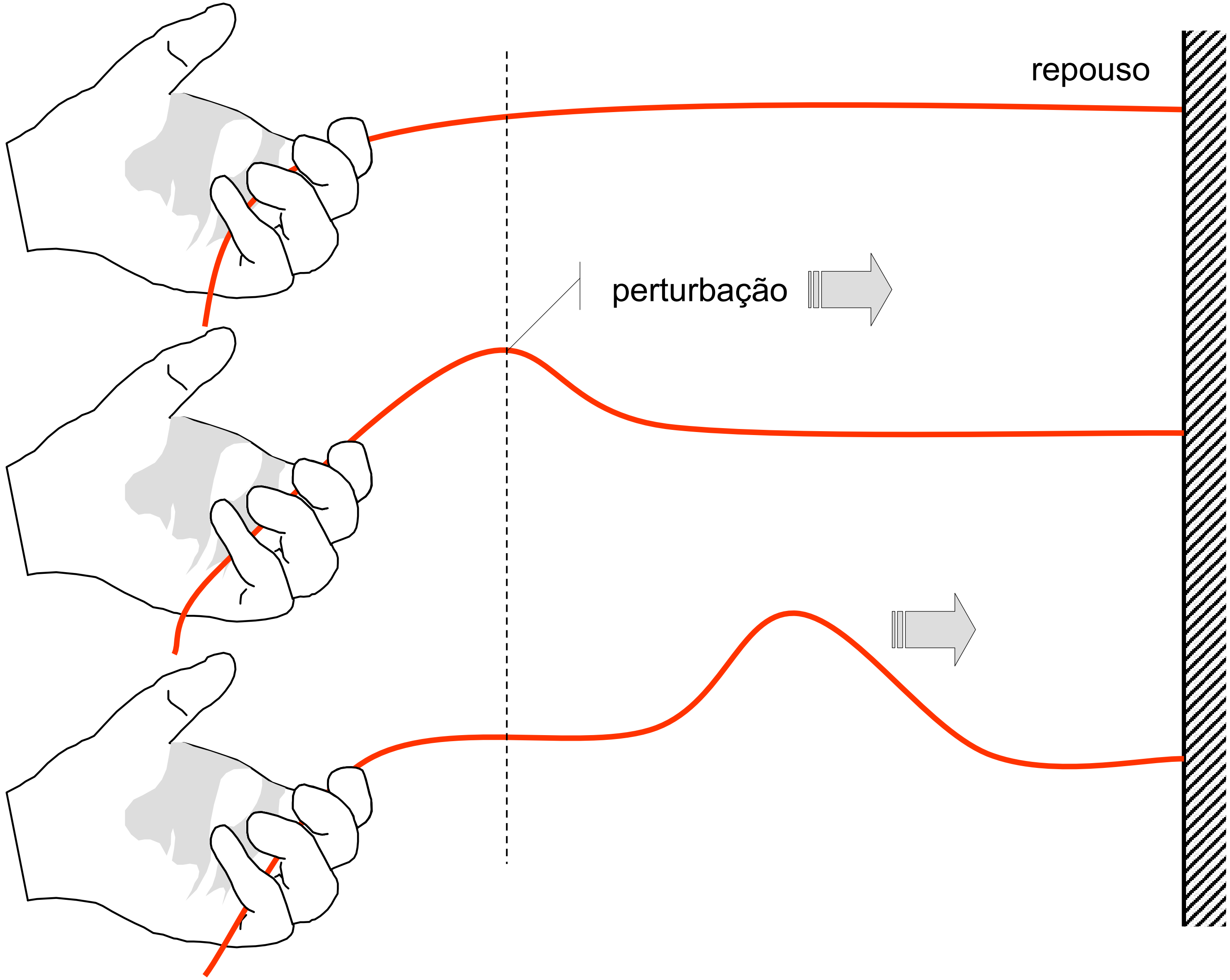
Linhas de Transmissão

- ✓ Transmissão de sinais de um ponto para outro
  - cabo coaxial em linhas de assinantes de TV via cabo
- ✓ Análise pela teoria dos elementos concentrados
  - modelo obedece a lei de Kirchhoff
  - comportamento analisado pela teoria de circuitos
  - análise fasorial para descrever ondas senoidais
- ✓ Descrição das propriedades da onda
- ✓ Comportamento da linha em função da terminação
- ✓ Carta de Smith para auxiliar a visualização do comportamento da onda na linha

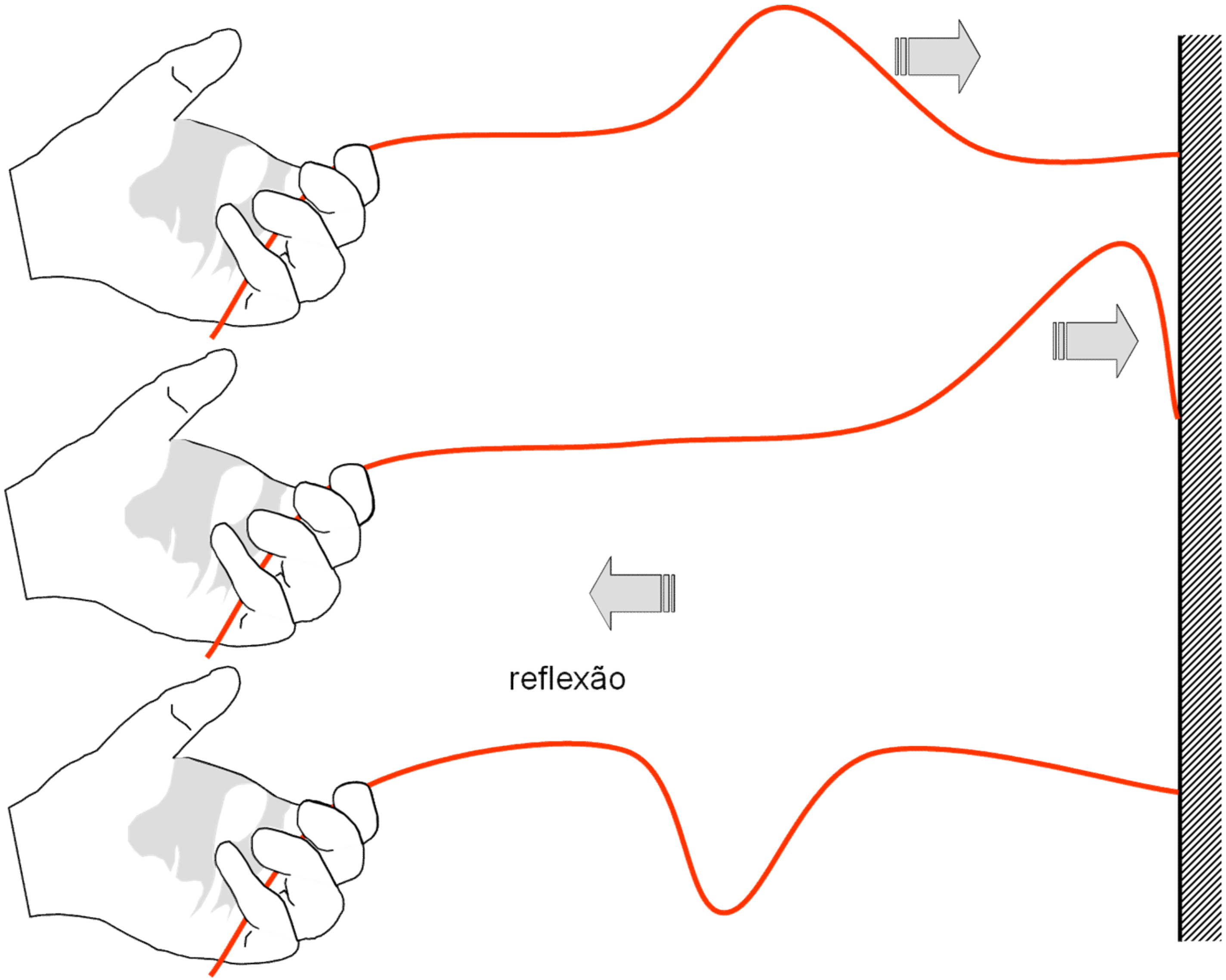
Perturbação Mecânica

ANALOGIA COMPRIMENTOS DE ONDA

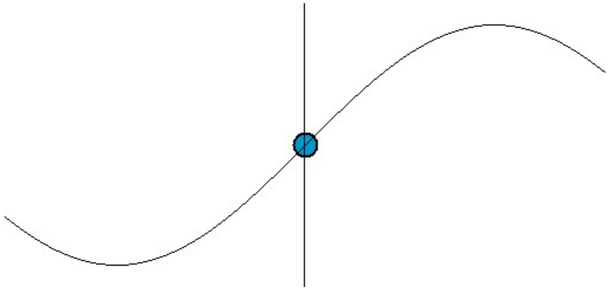
Perturbação mecânica em corda-1



Perturbação mecânica em corda-2

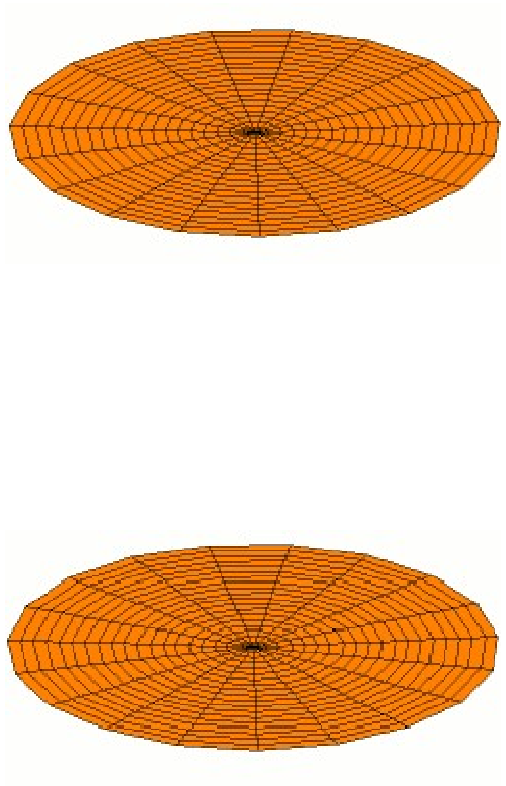


Ondas



Onda senoidal

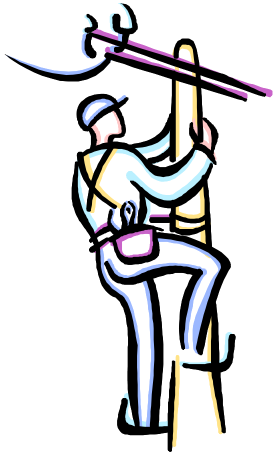
Onda estacionária

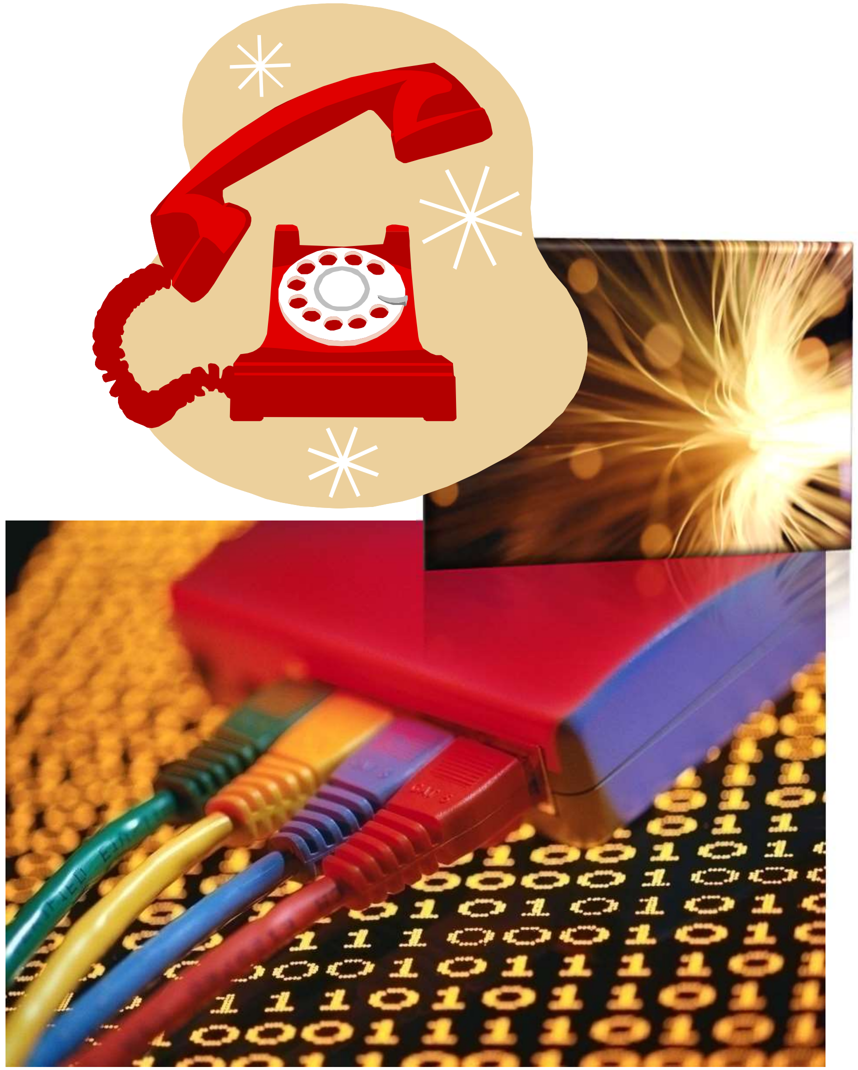


Onda estacionária em disco

http://en.wikipedia.org/wiki/Wave_(physics)

Dois Tipos de Linhas





Questões-1

- ✓ Quais são as características comuns e as diferenças entre os condutores em todas estas aplicações?
- ✓ Quais os efeitos que são observáveis somente em freqüências elevadas?
- ✓ Quais as características que distinguem as linhas de transmissão de energia elétrica das de fibras ópticas?

Questões-2

- Fenômenos como reflexão de onda passam a ter importância a partir de qual faixa de frequências?
- Qual é o significado da impedância característica de 50 ohms estampada em cabos coaxiais?

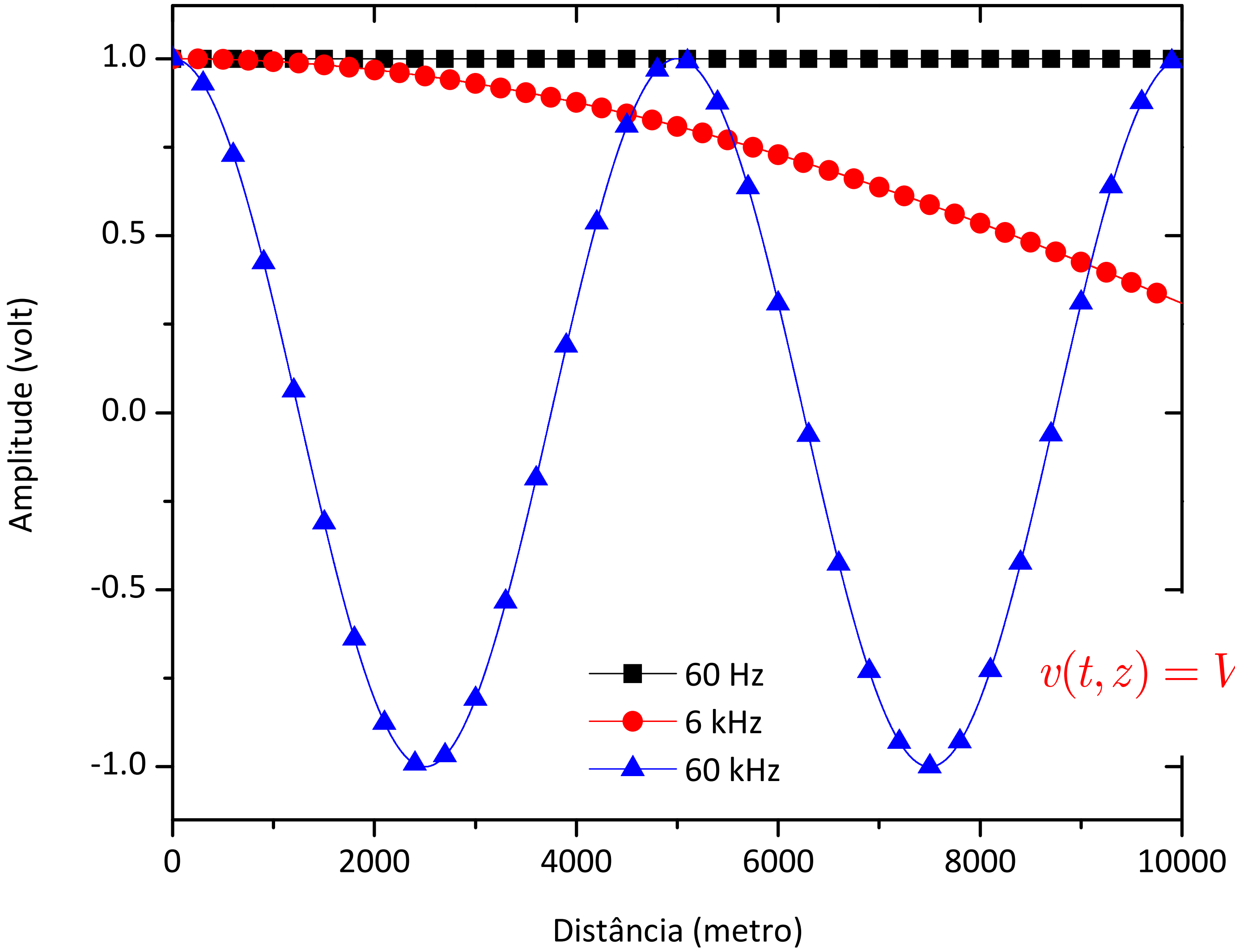
Questões-3

- ✓ Características mais importantes das linhas de transmissão de energia elétrica
  - Perdas nos condutores
  - Radiação eletromagnética no entorno
- ✓ Telecomunicações
  - Reflexão de onda
  - Impedância característica
  - Atraso de fase

Questões-4

- ✓ Situação (aplicação) intermediária
  - – Quando não se observam efeitos significativos
    - Perdas ôhmicas elevadas
    - Atraso de fase entre dois sinais de frequências diferentes
    - Reflexão de sinais
  - – Não há necessidade do uso de modelos específicos de linha de transmissão
  - – Uso de condutores em baixas frequências e comprimentos curtos

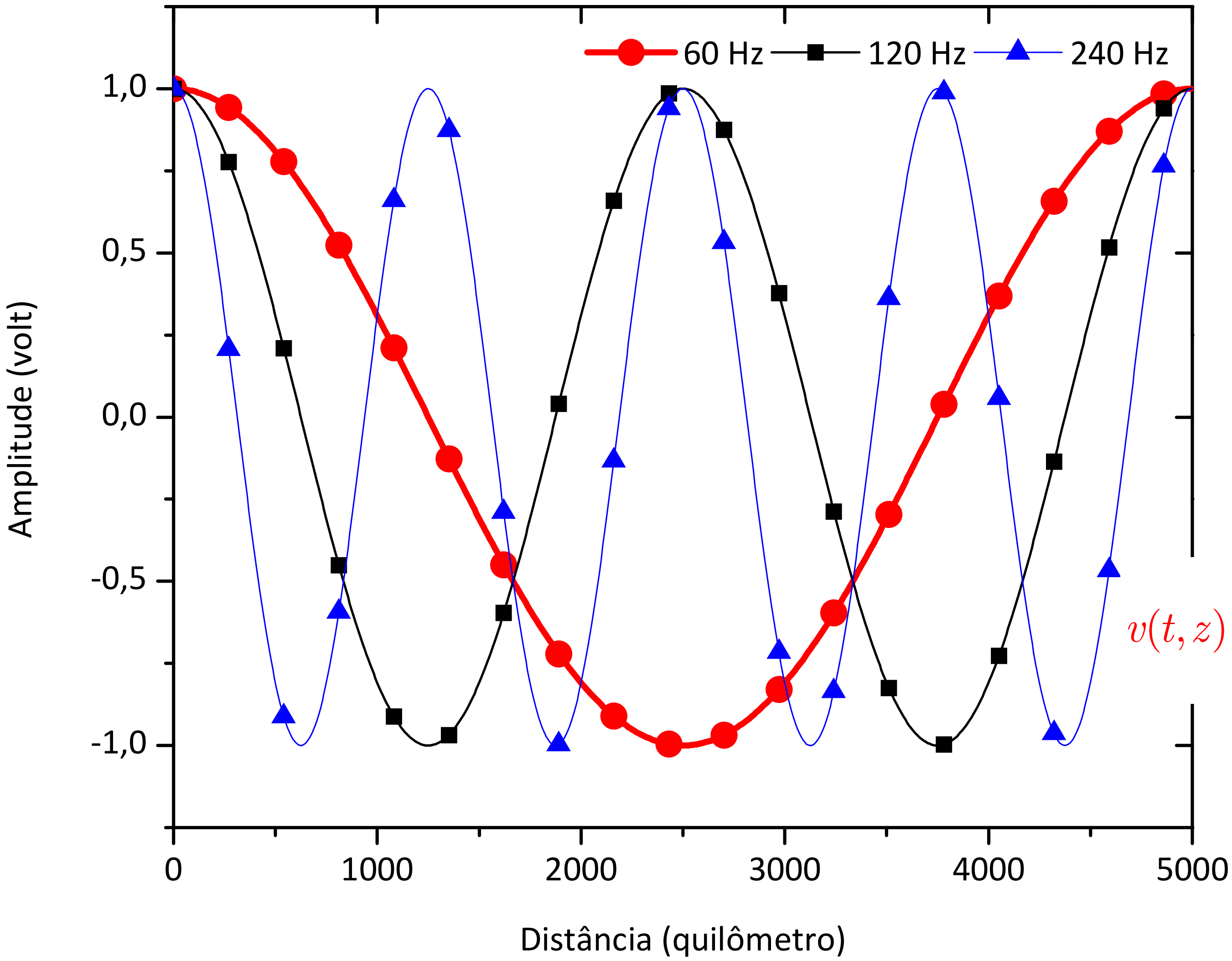
Variação da tensão com a frequência



$$v(t,z) = V_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \; volt$$

t=10^{-9} s
V_0=1 V
c= 3×10^{8} m/s

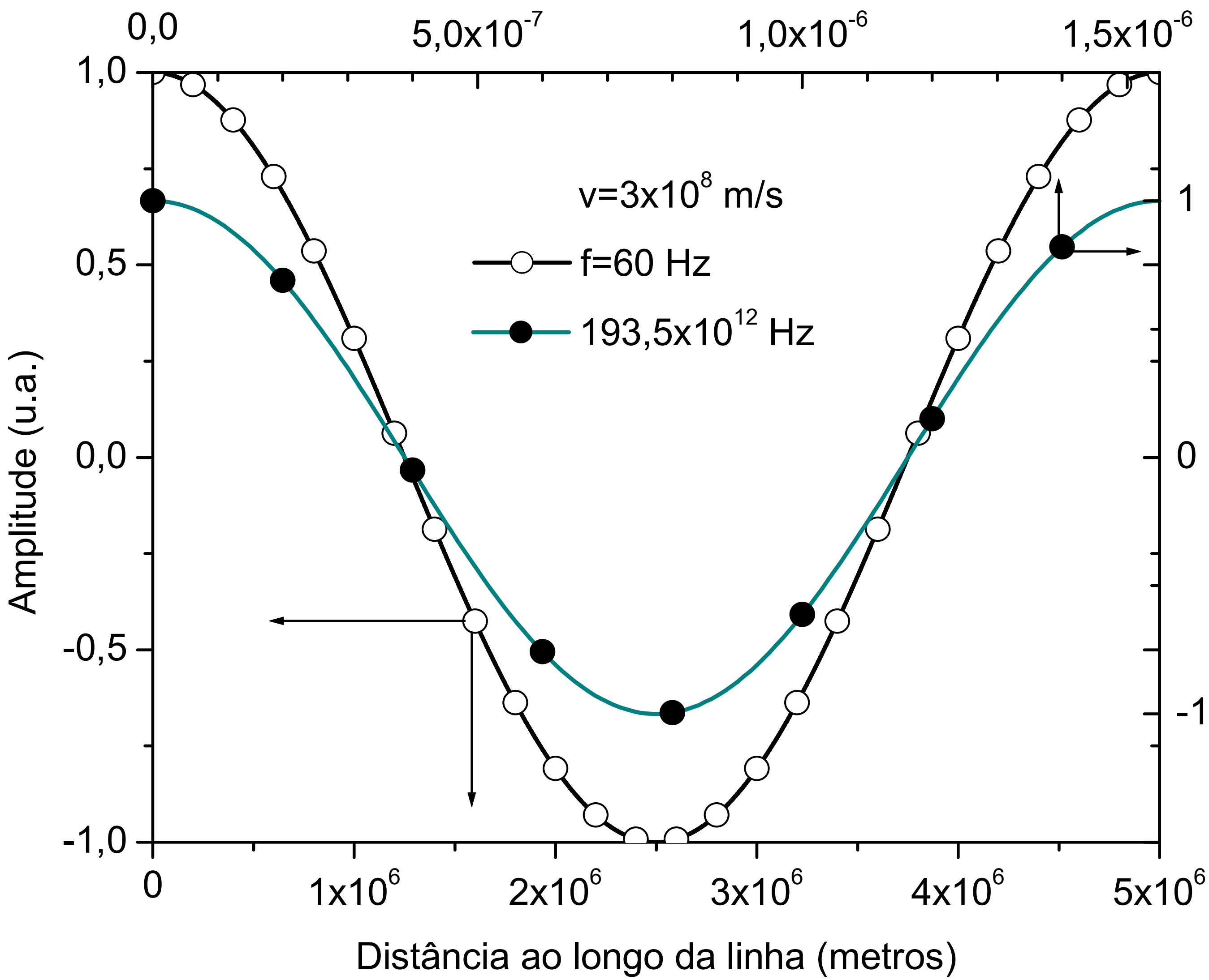
Comparação entre comprimentos de onda-2



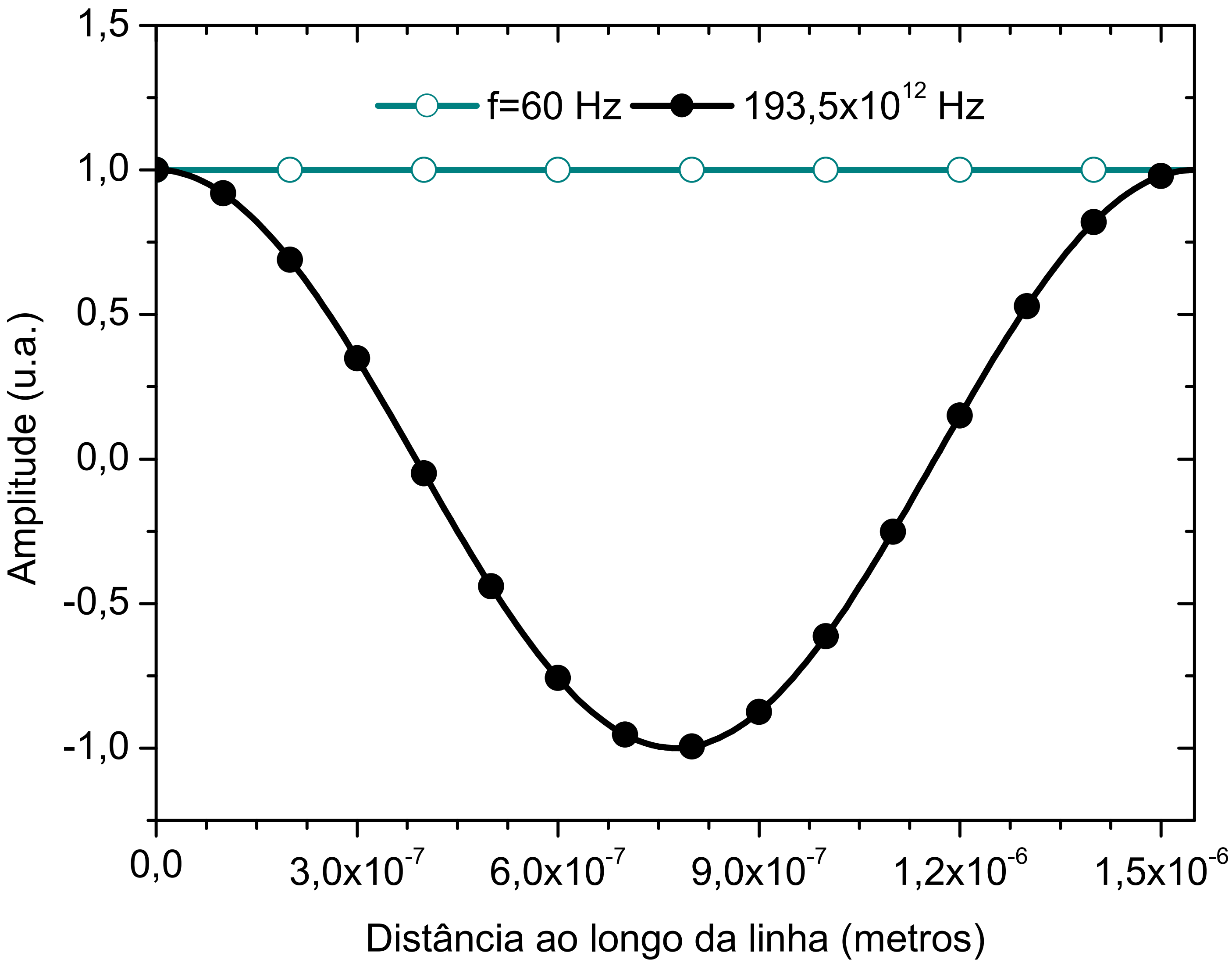
$$v(t,z) = V_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] volt$$

t=10^{-9} s
V_0=1 V
c= 3×10^8 m/s

Comparação entre comprimentos de onda-3



Comparação entre comprimentos de onda-4



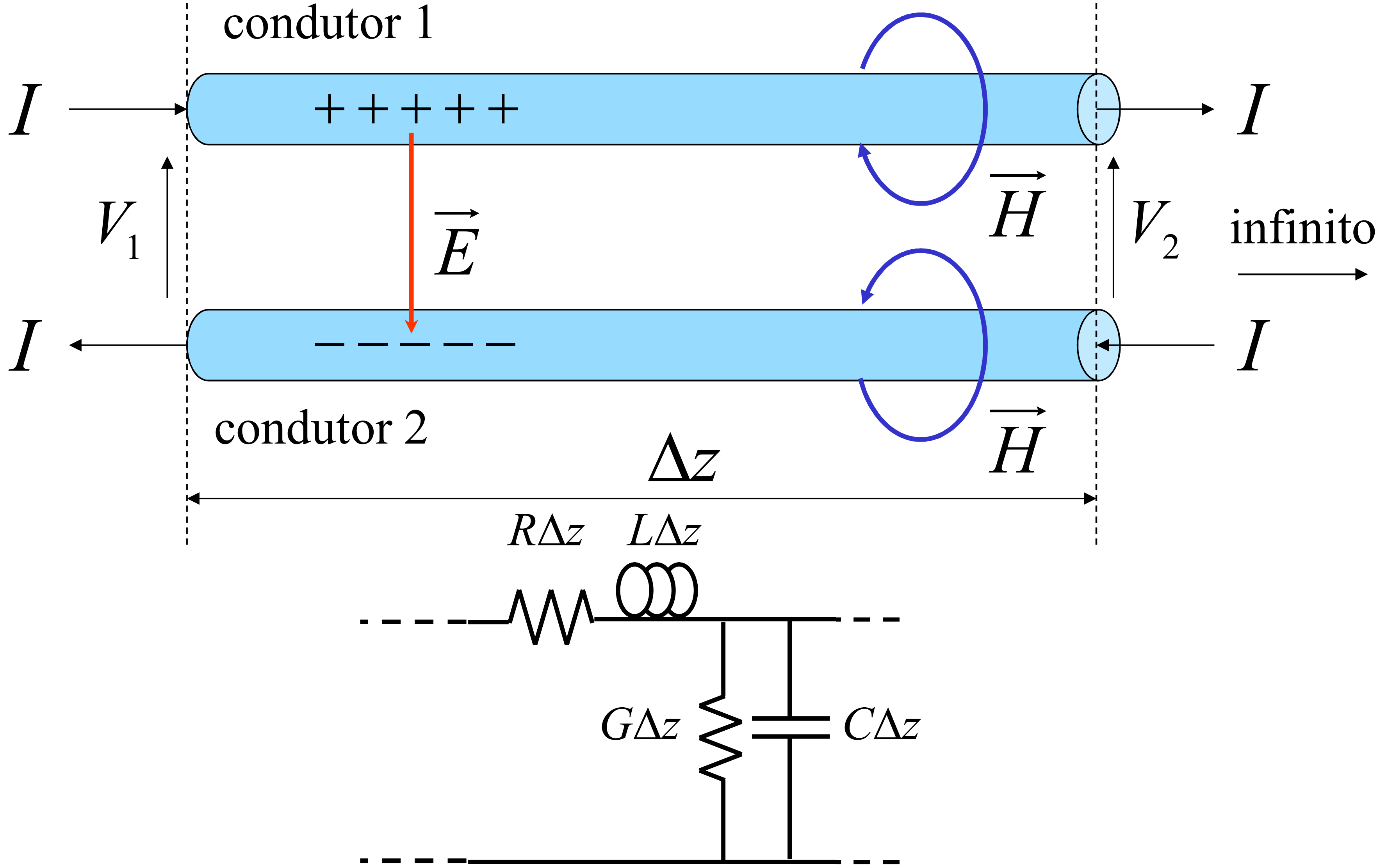
Distinção entre os comportamentos

- ✓Comprimento de onda correspondente às componentes de frequências do sinal são da ordem de grandeza do comprimento da linha
- ✓Efeitos podem alterar o comportamento esperado
  - Atraso de fase
  - Interferência entre ondas

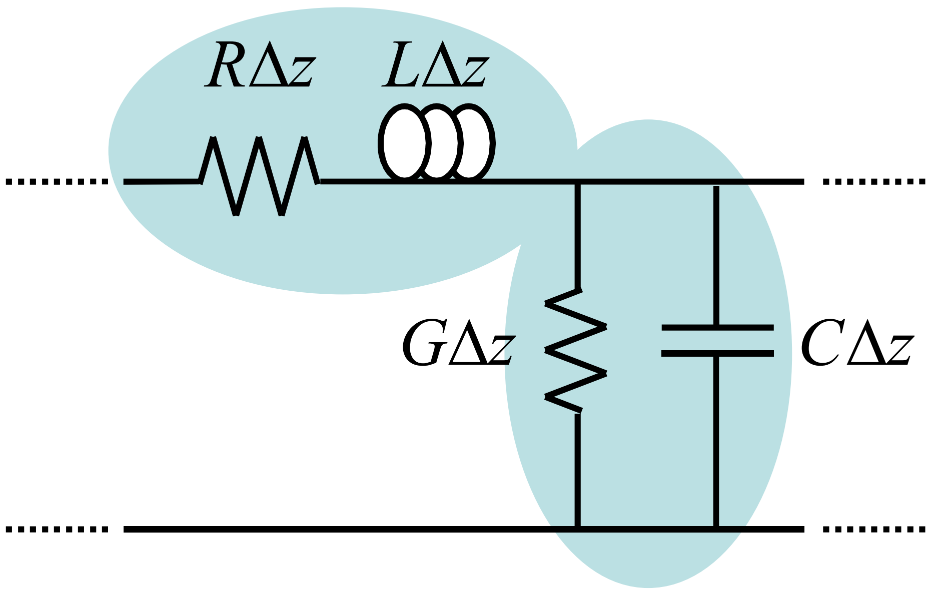
Linha de Transmissão

MODELO

Modelo de linha de transmissão-1



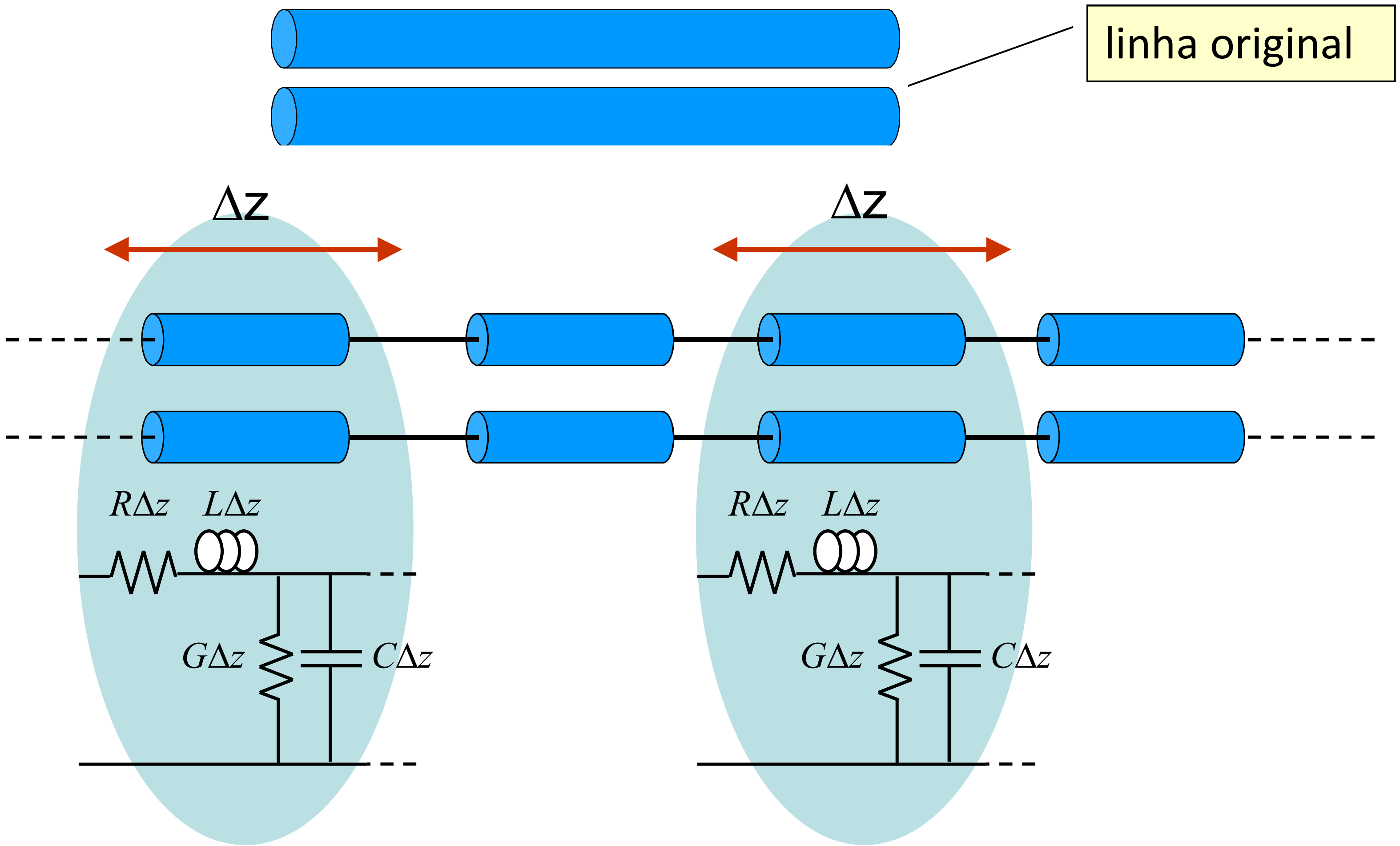
Modelo de linha de transmissão-2



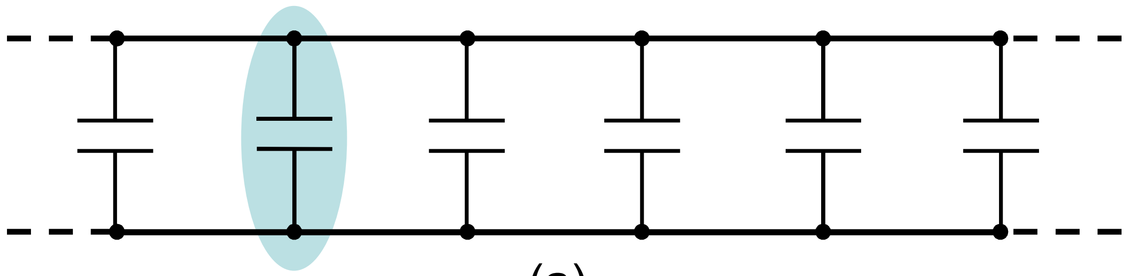
resistência	condutância	indutância	capacitância
$R\Delta z$	$G\Delta z$	$L\Delta z$	$C\Delta z$
ohms	siemens	henrys	farads

Modelo de linha de transmissão-3

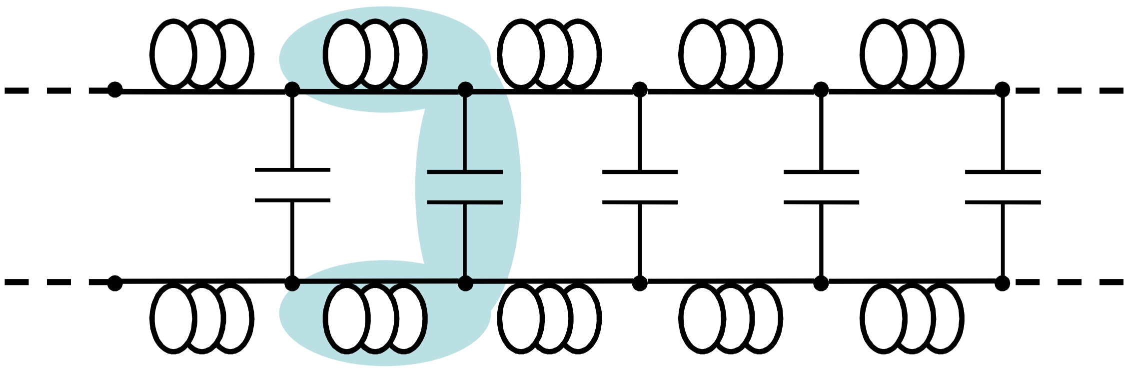
- Representar a linha por um modelo simples de parâmetros distribuídos



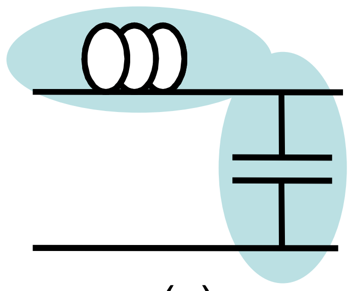
Modelo de linha de transmissão-4



(a)

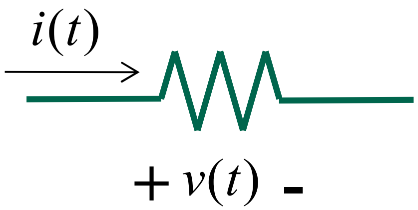


(b)



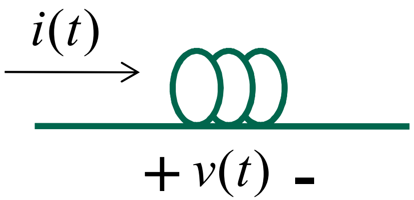
(c)

Elementos de circuito



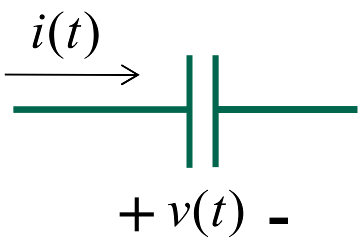
$$v(t) = Ri(t)$$

R: ohm(Ω)
volt/ampère



$$v(t) = L\frac{\partial i(t)}{\partial t}$$

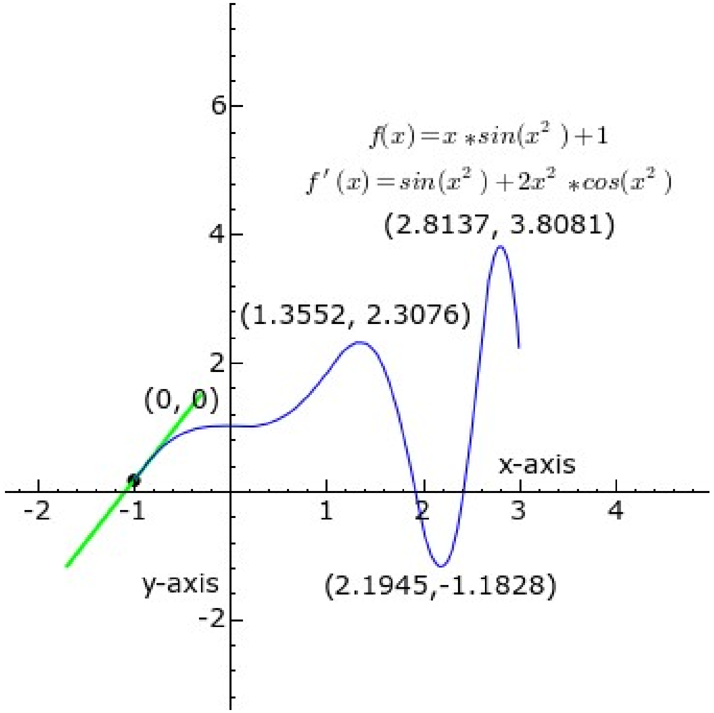
L: henry (H)
volt-segundo/ampère

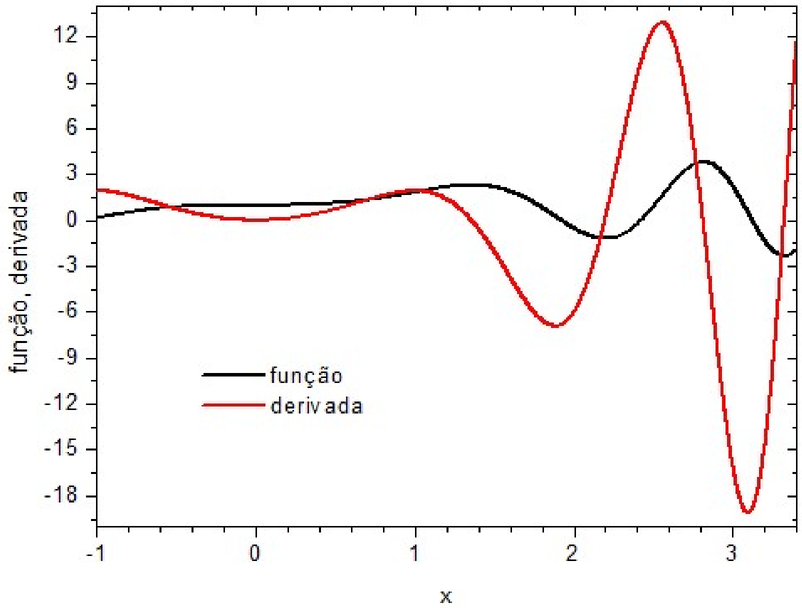


$$i(t) = C\frac{\partial v(t)}{\partial t}$$

C: farad (F)
ampère-segundo/volt
coulomb/volt

Função e derivada

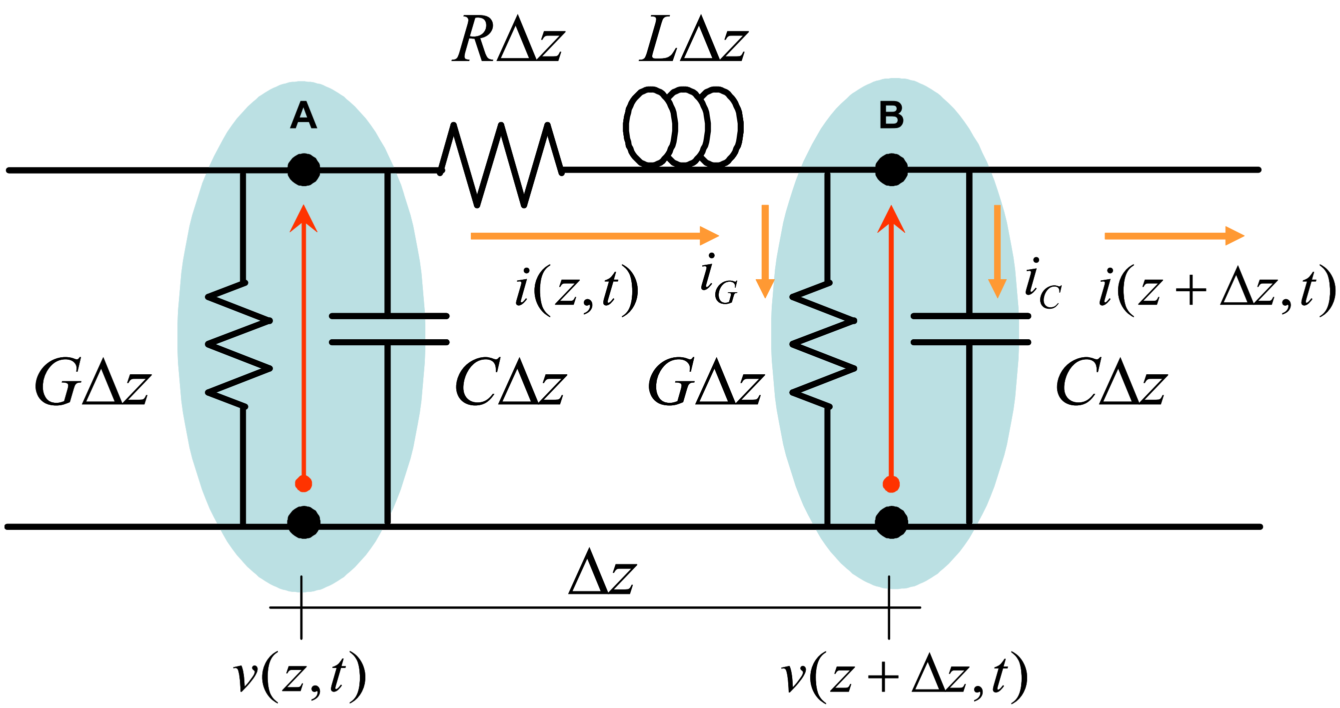




http://phet.colorado.edu/simulations/sims.php?sim=Calculus_Grapher

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7a/Graph_of_sliding_derivative_line.gif

Modelo de linha de transmissão-5



resistência	condutância	indutância	capacitância
$R\Delta z$	$G\Delta z$	$L\Delta z$	$C\Delta z$
ohms	siemens	henrys	farads

Modelo de linha de transmissão-6

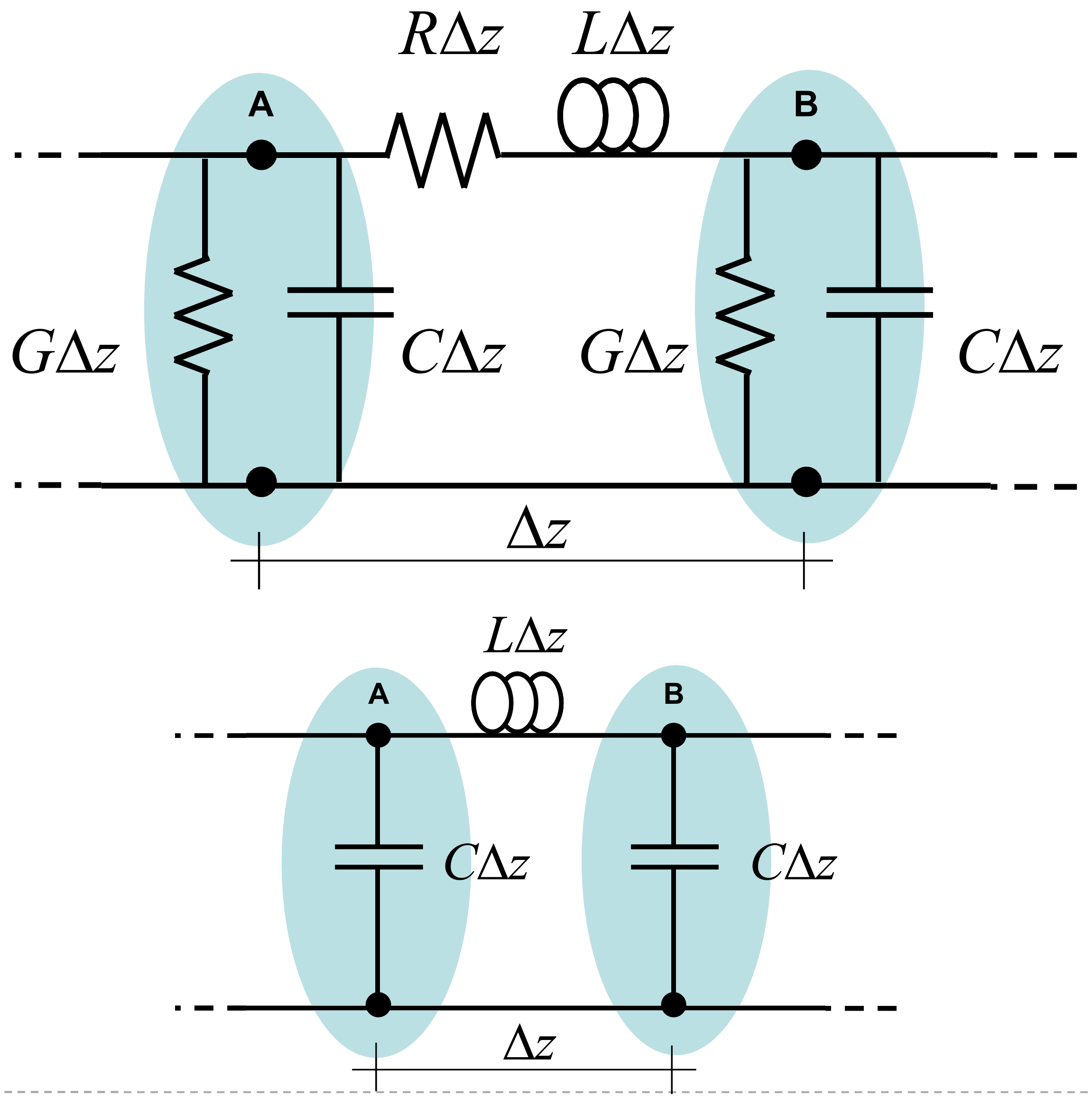
Resistência: $v_R = i(z,t)R\Delta z$

Condutância: $i_G = v(z,t)G\Delta z$

Indutância: $v_L(z,t) = L\Delta z \dfrac{\partial i(z,t)}{\partial t}$

Capacitância: $i_C = C\Delta z \dfrac{\partial v(z,t)}{\partial t}$

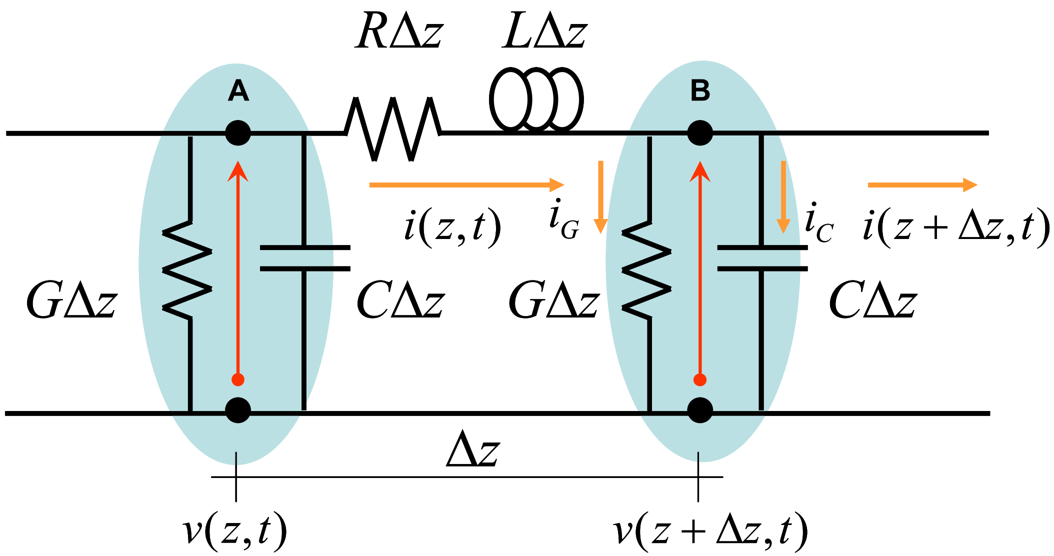
Linhas com e sem perdas



Equações de Onda para tensão e corrente

DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ONDA A PARTIR DO MODELO DE L.T.

Equação de onda-1



Aplicando a lei de Kirchoff das tensões na malha compreendida no trecho Δz

$$v\left(z,t\right)=i\left(z,t\right)R\Delta z+\frac{\partial i\left(z,t\right)}{\partial t}L\Delta z+v\left(z+\Delta z,t\right)$$

Equação de onda-2

$$v\left(z,t\right)=i\left(z,t\right)R\Delta z+\frac{\partial i\left(z,t\right)}{\partial t}L\Delta z+v\left(z+\Delta z,t\right)$$

$$v\left(z,t\right)-v\left(z+\Delta z,t\right)=i\left(z,t\right)R\Delta z+\frac{\partial i\left(z,t\right)}{\partial t}L\Delta z$$

Dividindo por Δz e rearranjando,

$$-\frac{v\left(z+\Delta z,t\right)-v\left(z,t\right)}{\Delta z}=Ri\left(z,t\right)+L\frac{\partial i\left(z,t\right)}{\partial t}$$

Equação de onda-3

$$-\frac{v\left(z+\Delta z,t\right)-v\left(z,t\right)}{\Delta z}=Ri\left(z,t\right)+L\frac{\partial i\left(z,t\right)}{\partial t}$$

Mas,

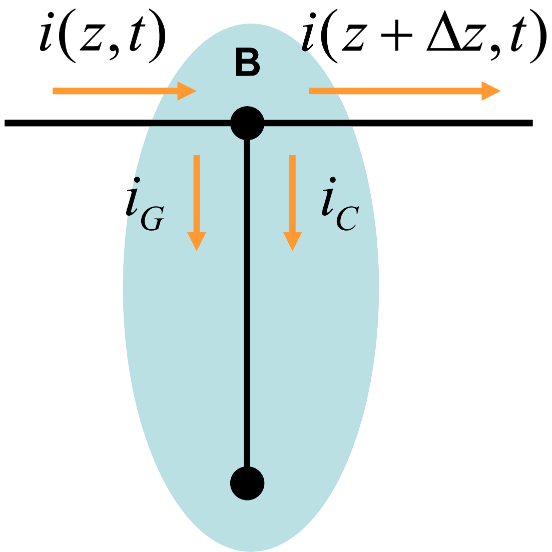
$$\lim_{\Delta z\to 0}\left[\frac{v\left(z+\Delta z,t\right)-v\left(z,t\right)}{\Delta z}\right]=\frac{\partial v\left(z,t\right)}{\partial z}$$

Substituindo resulta em

$$-\frac{\partial v\left(z,t\right)}{\partial z}=Ri\left(z,t\right)+L\frac{\partial i\left(z,t\right)}{\partial t} \qquad (1)$$

Equação de onda-4

Vamos determinar outra equação equivalente a (1).
Vamos aplicar a lei de Kirchhoff das correntes no nó ***B***



$$i\left(z,t\right)=i_G(z+\Delta z,t)+i_C(z+\Delta z,t)+i\left(z+\Delta z,t\right)$$

Equação de onda-5

$$i\left(z,t\right) = i_G(z+\Delta z,t) + i_C(z+\Delta z,t) + i\left(z+\Delta z,t\right)$$

Mas,

$$i_G(z+\Delta z,t) = v\left(z+\Delta z,t\right)G\Delta z$$

$$i_C(z+\Delta z,t) = \frac{\partial v\left(z+\Delta z,t\right)}{\partial t}C\Delta z$$

Substituindo resulta em

$$i\left(z,t\right) = v\left(z+\Delta z,t\right)G\Delta z + \frac{\partial v\left(z+\Delta z,t\right)}{\partial t}C\Delta z + i\left(z+\Delta z,t\right)$$

Equação de onda-6

$$i\left(z,t\right)-i\left(z+\Delta z,t\right)=v\left(z+\Delta z,t\right)G\Delta z+\frac{\partial v\left(z+\Delta z,t\right)}{\partial t}C\Delta z$$

Dividindo por Δz,

$$-\frac{i\left(z+\Delta z,t\right)-i\left(z,t\right)}{\Delta z}=v\left(z+\Delta z,t\right)G+\frac{\partial v\left(z+\Delta z,t\right)}{\partial t}C$$

Equação de onda-7

$$-\frac{i\left(z+\Delta z,t\right)-i\left(z,t\right)}{\Delta z}=v\left(z+\Delta z,t\right)G+\frac{\partial v\left(z+\Delta z,t\right)}{\partial t}C$$

Fazendo $\Delta z \to 0$,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left[\frac{i\left(z+\Delta z,t\right)-i\left(z,t\right)}{\Delta z}\right]=\frac{\partial i\left(z,t\right)}{\partial z}$$

$$v\left(z+\Delta z,t\right)\to v\left(z,t\right)$$

$$\frac{\partial v\left(z+\Delta z,t\right)}{\partial t}\to\frac{\partial v\left(z,t\right)}{\partial t}$$

Equação de onda-8

Assim,

$$-\frac{i\left(z+\Delta z,t\right)-i\left(z,t\right)}{\Delta z}=v\left(z+\Delta z,t\right)G+\frac{\partial v\left(z+\Delta z,t\right)}{\partial t}C$$

Para $\Delta z \rightarrow 0$

$$-\frac{\partial i\left(z,t\right)}{\partial z}=Gv\left(z,t\right)+C\frac{\partial v\left(z,t\right)}{\partial t} \qquad (2)$$

Equação de onda-9

$$-\frac{\partial v\left(z,t\right)}{\partial z}=Ri\left(z,t\right)+L\frac{\partial i\left(z,t\right)}{\partial t} \quad (1)$$

$$-\frac{\partial i\left(z,t\right)}{\partial z}=Gv\left(z,t\right)+C\frac{\partial v\left(z,t\right)}{\partial t} \quad (2)$$

Equações fundamentais da linha de transmissão

Equação de onda-10

$$-\frac{\partial v\left(z,t\right)}{\partial z}=Ri\left(z,t\right)+L\frac{\partial i\left(z,t\right)}{\partial t} \qquad (1)$$

$$-\frac{\partial i\left(z,t\right)}{\partial z}=Gv\left(z,t\right)+C\frac{\partial v\left(z,t\right)}{\partial t} \qquad (2)$$

Derivando (1) em relação a *z* e (2) em relação a *t*,

$\frac{\partial}{\partial z}$

$$-\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}=R\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}+L\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t\partial z} \qquad (3)$$

$\frac{\partial}{\partial t}$

$$-\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t\partial z}=G\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}+C\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} \qquad (4)$$

Equação de onda-11

$$-\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = R\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} + L\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t \partial z} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t \partial z} = -G\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} - C\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3):

$$-\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = R\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} - LG\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} - LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

Equação de onda-12

Substituindo

$$\frac{\partial i\left(z,t\right)}{\partial z} = -Gv\left(z,t\right) - C\frac{\partial v\left(z,t\right)}{\partial t}$$

em

$$-\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = R\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} - LG\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} - LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

resulta em

$$-\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = R\left[-Gv(z,t) - C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\right] - LG\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} - LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

Equação de onda-13

Equação de onda para tensão

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = RGv(z,t) + \left(RC + LG\right)\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

Equação de onda para corrente

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = RGi(z,t) + \left(RC + LG\right)\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2}$$

Sistemas que obedecem a estas equações podem ser utilizados para transmitir informações sob a forma de onda eletromagnética

Equação de onda-14

Linha sem perdas, *R=G=0*

Equação de onda para tensão

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

Equação de onda para corrente

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2}$$

Sistemas que obedecem a estas equações podem ser utilizados para transmitir informações sob a forma de onda eletromagnética

Solução da equação de onda para tensão-1

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

$$v(z,t) = v^+\left(t - \frac{z}{v_f}\right) + v^-\left(t + \frac{z}{v_f}\right)$$

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ Velocidade de propagação da onda (velocidade de fase)

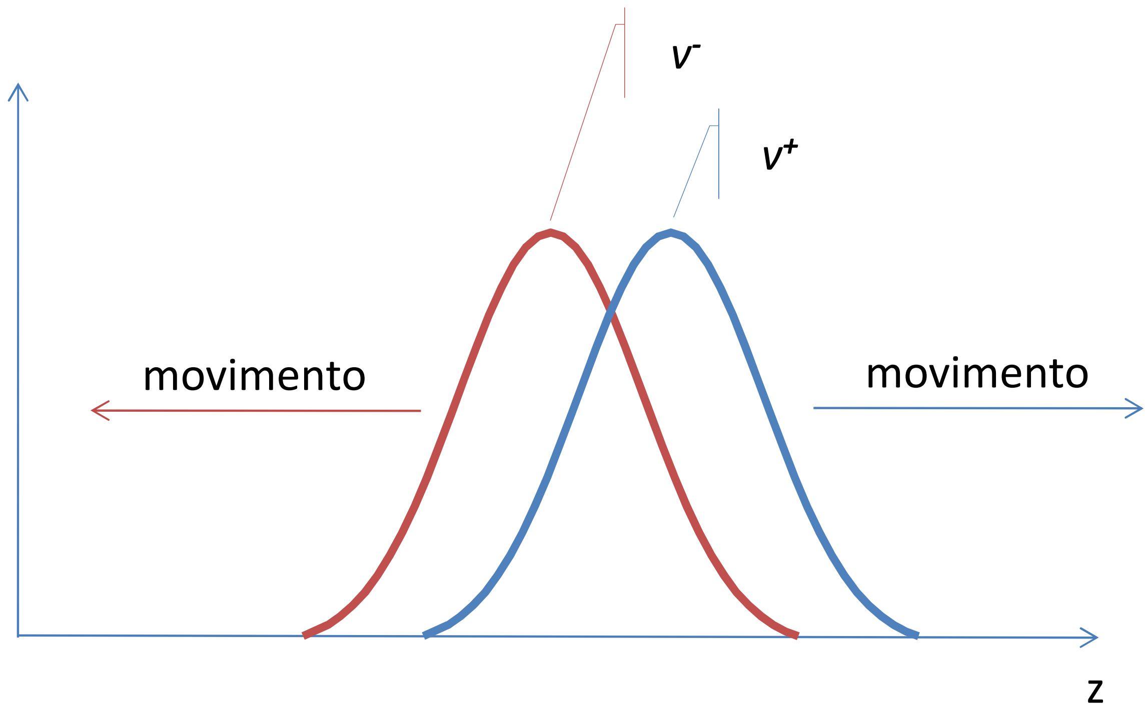
Solução da equação de onda para tensão-2

$$v(z,t) = \underbrace{v^{+}\left(t - \frac{z}{v_f}\right)}_{\text{Onda propagando na direção positiva de } z} + \underbrace{v^{-}\left(t + \frac{z}{v_f}\right)}_{\text{Onda propagando na direção negativa de } z}$$

Solução da equação de onda para tensão-5

$$v^{+}\left(t - \frac{z}{v_f}\right)$$

$$v^{-}\left(t + \frac{z}{v_f}\right)$$



Solução da equação de onda para tensão-6

$$v(z,t) = V_0^+ \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v_f}\right) + \phi^+\right] + V_0^- \cos\left[\omega\left(t + \frac{z}{v_f}\right) + \phi^-\right]$$

$$v(z,t) = V_0^+ \cos\left(\omega t - k_z z + \phi^+\right) + V_0^- \cos\left(\omega t + k_z z + \phi^-\right)$$

$$k_z = \frac{\omega}{v_f}$$ Constante de propagação

diferencial

EXTRA

Diferencial e limite-1

$$df\left(z,t\right)=\frac{\partial f\left(z,t\right)}{\partial z}dz+\frac{\partial f\left(z,t\right)}{\partial t}dt$$

$$\frac{f\left(z+\Delta z\right)-f\left(z\right)}{\Delta z}=\frac{df\left(z\right)}{dz}+\varepsilon,\ \varepsilon\to 0$$

$$f\left(z+\Delta z\right)=f\left(z\right)+\frac{df\left(z\right)}{dz}\Delta z+\varepsilon\Delta z$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left[\frac{f\left(z+\Delta z,t\right)-f\left(z,t\right)}{\Delta z}\right]=\frac{\partial f\left(z,t\right)}{\partial z}$$

Diferencial e limite-2

$$v\left(z+\Delta z\right)=v\left(z\right)+\frac{dv\left(z\right)}{dz}\Delta z+\varepsilon\Delta z$$

$$v\left(z+\Delta z\right)=v\left(z\right)+\frac{dv\left(z\right)}{dz}\Delta z \text{ para } \varepsilon\rightarrow 0$$

$$\lim_{\Delta z\rightarrow 0}\left[\frac{i\left(z+\Delta z,t\right)-i\left(z,t\right)}{\Delta z}\right]=\frac{\partial i\left(z,t\right)}{\partial z}$$