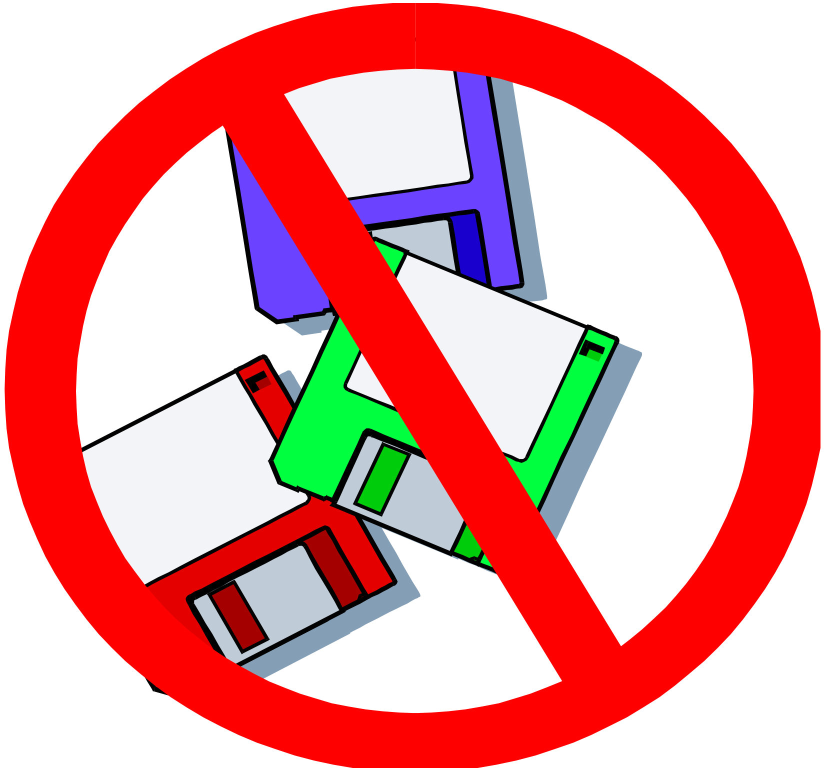
Linha de Transmissão
Parte 2
Equação de Onda e Excitação Senoidal

SEL 310/612 Ondas Eletromagnéticas

Amílcar Careli César
Departamento de Engenharia Elétrica da EESC-USP

Atenção!



- Este material didático é planejado para servir de apoio às aulas de SEL-310 E SEL-612: Ondas Eletromagnéticas, oferecida aos alunos regularmente matriculados no curso de engenharia elétrica e engenharia de computação.
- Não são permitidas a reprodução e/ou comercialização do material.
- solicitar autorização ao docente para qualquer tipo de uso distinto daquele para o qual foi planejado.

Representação complexa-1

Amplitude e frequência angular invariantes no domínio do tempo

$$\exp\left(j\phi\right) = \cos\left(\phi\right) + jsen\left(\phi\right)$$

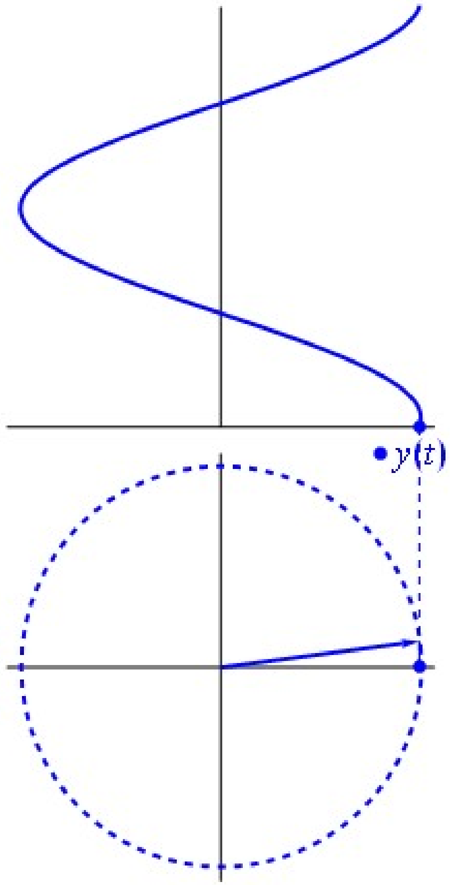
$$A\cos\left(\omega t + \phi\right) = \mathrm{Re}\left\{A\exp\left[j\left(\omega t + \phi\right)\right]\right\}$$
$$\mathrm{Re}\left\{A\exp\left(j\phi\right)\exp\left(j\omega t\right)\right\}$$

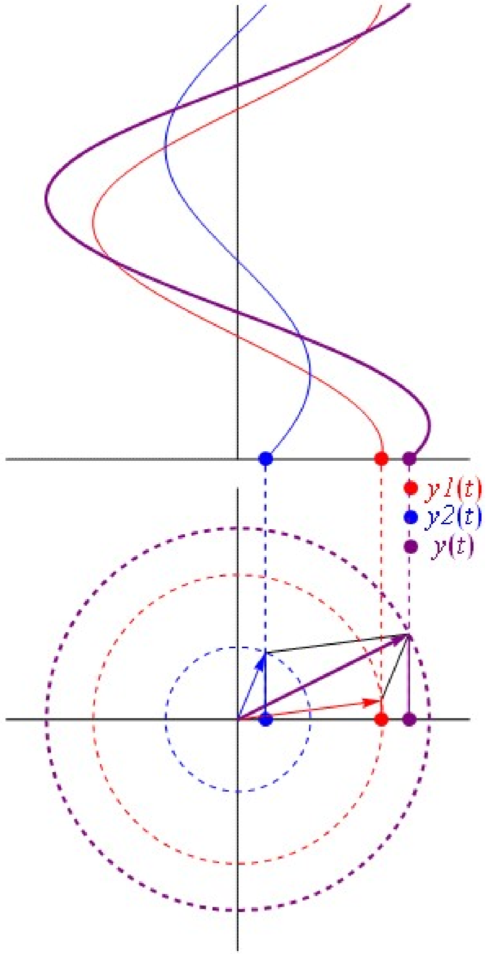
$A\exp\left(j\phi\right)\exp\left(j\omega t\right)$: função complexa instantânea

$A\exp\left(j\phi\right)$: função fasorial (fasor)

Representação complexa-2

$$v(z,t) = V_m \cos\left(\omega t + \phi\right)$$





$$V(z,t) = V_0 \exp\left(\phi\right)\exp\left(j\omega t\right)$$

http://en.wikipedia.org/wiki/Phasor

Representação complexa-3

$$v(t) = V_0 \cos\left(\omega t\right)$$

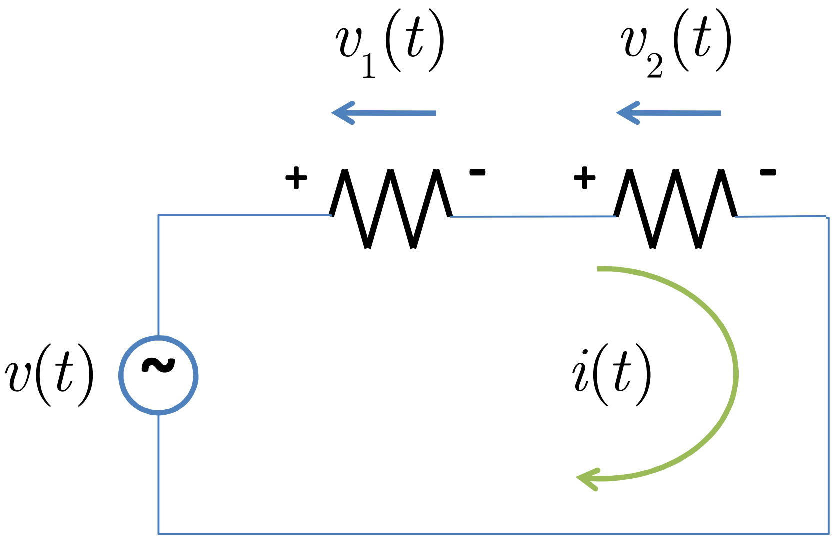
$$v(t) = v_1(t) + v_2(t)$$

$$v(t) = R_1 i(t) + R_2 i(t) = \left(R_1 + R_2\right) i\left(t\right)$$

$$V_0 \cos\left(\omega t\right) = \left(R_1 + R_2\right) i\left(t\right)$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R_1 + R_2} \cos\left(\omega t\right)$$

$$I = \frac{V_0}{R_1 + R_2} \quad \text{fasor}$$



Solução da equação de onda: sem perdas

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

$$v(z,t) = V_0^+ \cos\left(\omega t - kz + \phi^+\right) + V_0^- \cos\left(\omega t + kz + \phi^-\right)$$

$$v^+(z,t) = V_0^+ \cos\left(\omega t - kz + \phi^+\right)$$

Onda propagando na direção positiva de *z*

$$v^-(z,t) = V_0^- \cos\left(\omega t + kz + \phi^-\right)$$

Onda propagando na direção negativa de *z*

Representação complexa-1

$$v^+(z,t) = V_0^+ \cos\left(\omega t - kz + \phi^+\right)$$

$$v^+(z,t) = \mathrm{Re}\left\{V_0^+ \exp\left(-jkz\right)\exp\left(j\omega t\right)\exp\left(j\phi^+\right)\right\}$$

$$v^+(z,t) = \mathrm{Re}\left\{V_0^+ \exp\left[j\left(\omega t - kz + \phi^+\right)\right]\right\}$$

$$v^+(z,t) = \mathrm{Re}\left\{V_0^+ \left[\cos\left(\omega t - kz + \phi^+\right) + j\mathrm{sen}\left(\omega t - kz + \phi^+\right)\right]\right\}$$

Representação complexa-2

$$v^+(z,t) = V_0^+ \cos\left(\omega t - kz + \phi^+\right)$$

$$v^+(z,t) = \mathrm{Re}\left\{\underbrace{\underbrace{V_0^+ \exp\left(\phi^+\right)\exp\left(-jkz\right)}_{\text{fasor}}\exp\left(j\omega t\right)}_{\text{Representação complexa (instantânea complexa)}}\right\}$$

Representação complexa-3

tensão instantânea real

$$\mathcal{V}\left(z,t\right)=V_0\cos\left(\omega t-kz+\phi\right)$$

tensão complexa instantânea

$$V\left(z,t\right)=V_0\exp\left(j\phi\right)\exp\left(-jkz\right)\exp\left(j\omega t\right)$$

tensão fasorial

$$V\left(z\right)=V_0\exp\left(j\phi\right)\exp\left(-jkz\right)$$

Equações de onda e excitação senoidal-1

$$v^+(z,t) = \mathrm{Re}\left\{V_0^+ \exp\left(-jk_z z\right)\exp\left(j\omega t\right)\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\exp\left(j\omega t\right) = j\omega \exp\left(j\omega t\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\exp\left(-jk_z z\right) = -jk_z \exp\left(-jk_z z\right)$$

$$\partial / \partial t \Longleftrightarrow j\omega$$

$$\partial / \partial z \Longleftrightarrow -jk_z$$

Equações de onda e excitação senoidal-2

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = RGv(z,t) + \left(RC + LG\right)\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = \left[\left(RG - \omega^2 LC\right) + j\omega\left(RC + LG\right)\right]V(z)$$

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = RGi(z,t) + \left(RC + LG\right)\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} = \left[\left(RG - \omega^2 LC\right) + j\omega\left(RC + LG\right)\right]I(z)$$

Impedância e admitância

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = \left[\left(RG - \omega^2 LC\right) + j\omega\left(RC + LG\right)\right]V(z)$$ tensão

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} = \left[\left(RG - \omega^2 LC\right) + j\omega\left(RC + LG\right)\right]I(z)$$ corrente

$$Z = R + j\omega L$$ Impedância (Ω— ohms)

$$Y = G + j\omega C$$ Admitância, (S— siemens)

então,

$$ZY = \left(RG - \omega^2 LC\right) + j\omega\left(RC + LG\right)$$

Constante de Propagação-1

$Z = R + j\omega L$ impedância $\qquad$ $Y = G + j\omega C$ admitância

$$k = \sqrt{ZY} = k_R + jk_I$$ constante de propagação

k_R constante de atenuação; neper/unidade de comprimento

k_I constante de fase; radiano/unidade de comprimento

Em linhas sem perdas, $k_R = 0$

Constante de Propagação-2

$$k = \sqrt{ZY} \quad \text{e} \quad k^2 = ZY$$

$$ZY = \left(RG - \omega^2 LC\right) + j\omega\left(RC + LG\right)$$

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = \left[\left(RG - \omega^2 LC\right) + j\omega\left(RC + LG\right)\right]V(z) \Rightarrow \frac{d^2V(z)}{dz^2} = k^2 V(z)$$

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} = \left[\left(RG - \omega^2 LC\right) + j\omega\left(RC + LG\right)\right]I(z) \Rightarrow \frac{d^2I(z)}{dz^2} = k^2 I(z)$$

Constante de Propagação-3

$$-\frac{\partial v\left(z,t\right)}{\partial z}=Ri\left(z,t\right)+L\frac{\partial i\left(z,t\right)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\exp\left(j\omega t\right)=j\omega\exp\left(j\omega t\right)$$

$$-\frac{dV\left(z\right)}{dz}=RI\left(z\right)+j\omega LI\left(z\right)=\left(R+j\omega L\right)I\left(z\right)$$

$$\frac{dV(z)}{dz}=-ZI(z)$$

Constante de Propagação-4

$$-\frac{\partial i\left(z,t\right)}{\partial z}=Gv\left(z,t\right)+C\frac{\partial v\left(z,t\right)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\exp\left(j\omega t\right)=j\omega\exp\left(j\omega t\right)$$

$$-\frac{dI\left(z\right)}{dz}=GV\left(z\right)+j\omega CV\left(z\right)=\left(G+j\omega C\right)V\left(z\right)$$

$$\frac{dI(z)}{dz}=-YV(z)$$

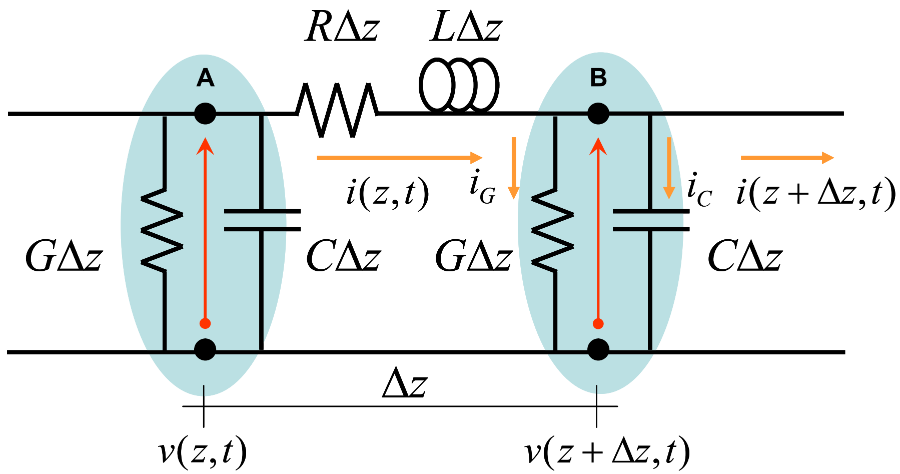
Resumo das equações fundamentais de uma L.T.

$$\frac{dV(z)}{dz} = -ZI(z)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -YV(z)$$

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = k^2V(z)$$

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} = k^2I(z)$$



$$Z = R + j\omega L$$

$$Y = G + j\omega C$$

$$ZY = \left(RG - \omega^2 LC\right) + j\omega\left(RC + LG\right)$$

$$k^2 = ZY$$