

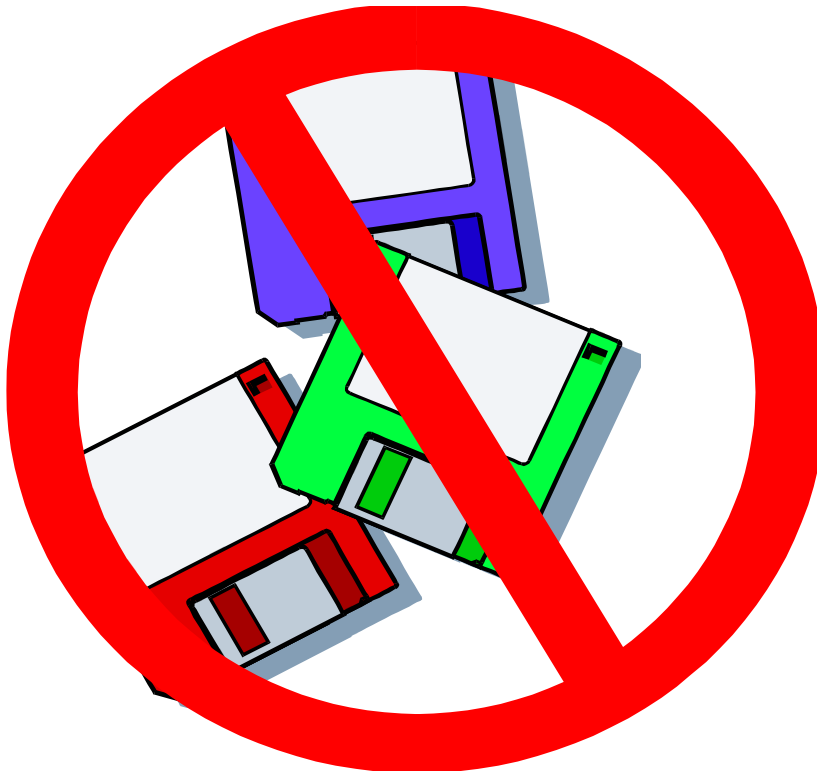
**Linha de Transmissão**  
**Parte 3**  
**Solução da Equação de Onda e**  
**Excitação Senoidal**

SEL 310/612 Ondas Eletromagnéticas

Amílcar Careli César  
Departamento de Engenharia Elétrica da EESC-USP

# Atenção!

---



- ✓ Este material didático é planejado para servir de apoio às aulas de **SEL-310 E SEL-612: Ondas Eletromagnéticas**, oferecida aos alunos regularmente matriculados no curso de engenharia elétrica e engenharia de computação.
- ✓ Não são permitidas a reprodução e/ou comercialização do material.
- ✓ solicitar autorização ao docente para qualquer tipo de uso distinto daquele para o qual foi planejado.

# Soluções das equações de onda

---

A solução da equação de onda para tensão

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} - k^2V(z) = 0$$

é da forma

$$V(z) = \underbrace{V^+ e^{-kz}}_{\text{Sentido positivo de } z} + \underbrace{V^- e^{+kz}}_{\text{Sentido negativo de } z}$$

$V^+ ; V^-$  : constantes a serem determinadas

# Corrente

---

$$V(z) = V^+ e^{-kz} + V^- e^{+kz} \quad \text{em}$$

$$\frac{dV(z)}{dz} = -ZI(z)$$

$$I(z) = \frac{k}{Z} (V^+ e^{-kz} - V^- e^{kz})$$

$$I(z) = I^+ e^{-kz} - I^- e^{kz}$$

$$\frac{k}{Z} = \frac{\sqrt{ZY}}{Z} = \sqrt{\frac{ZY}{Z^2}} = \sqrt{\frac{Y}{Z}} \quad \left[ \frac{k}{Z} \right] = \text{ohm}^{-1}$$

# Tensão e corrente

---

$$V(z) = V^+ e^{-kz} + V^- e^{kz}$$

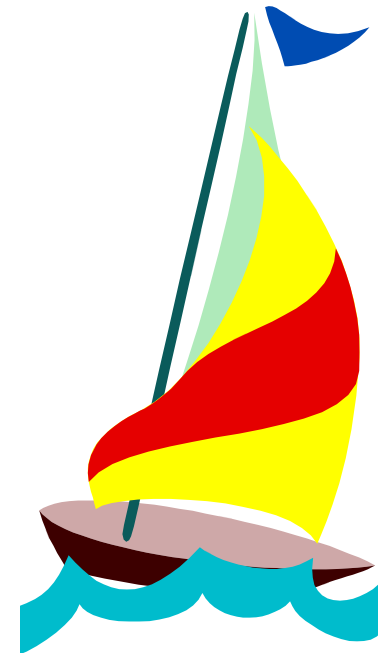
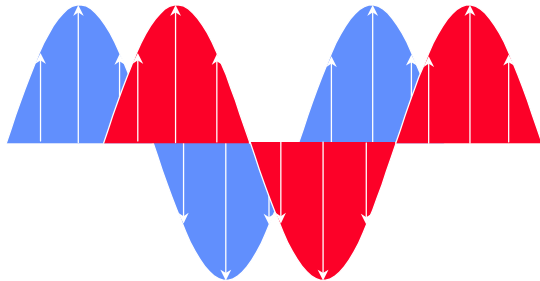
$$I(z) = I^+ e^{-kz} - I^- e^{kz}$$

$$I^+ = \frac{k}{Z} V^+ \quad I^- = \frac{k}{Z} V^-$$

# Conceito de *perturbação*

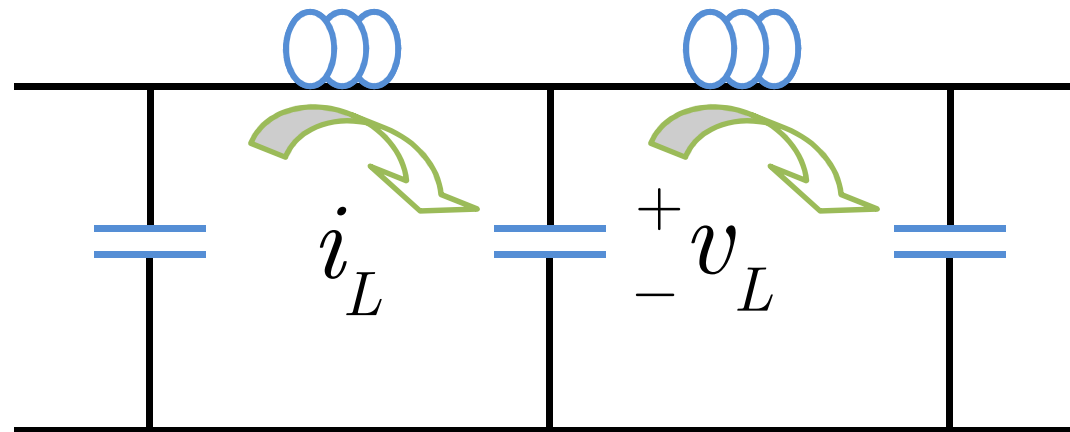
---

- ✓ Uma perturbação move-se a partir de uma fonte ao longo do tempo
- ✓ O meio pode não apresentar movimento na direção de propagação
- ✓ Propagação de onda eletromagnética
  - não é necessário meio físico
  - há propagação no vácuo
- ✓ Tipos de ondas
  - ondas mecânicas
  - ondas eletromagnéticas



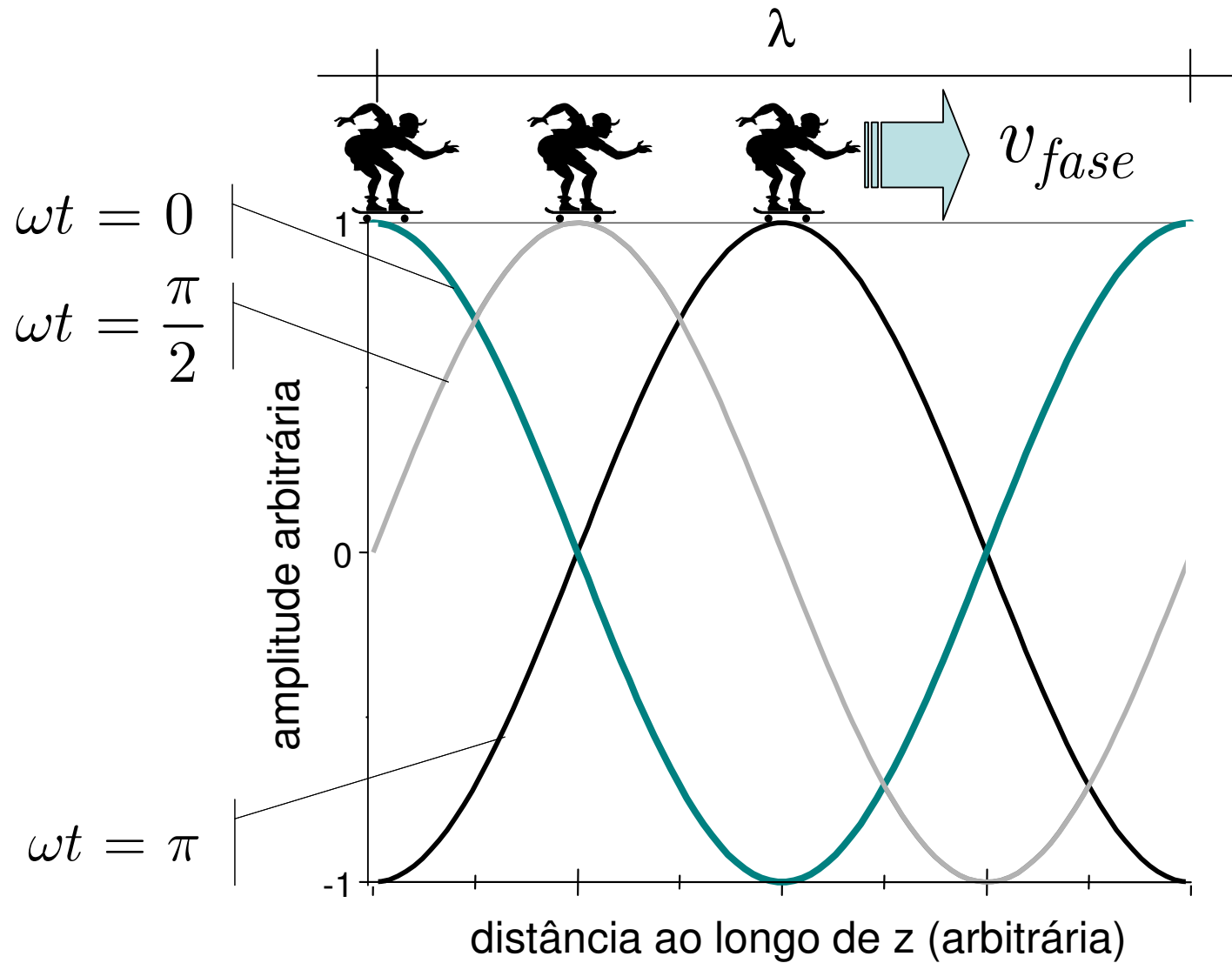
# O que se move com velocidade $u$ ?

---



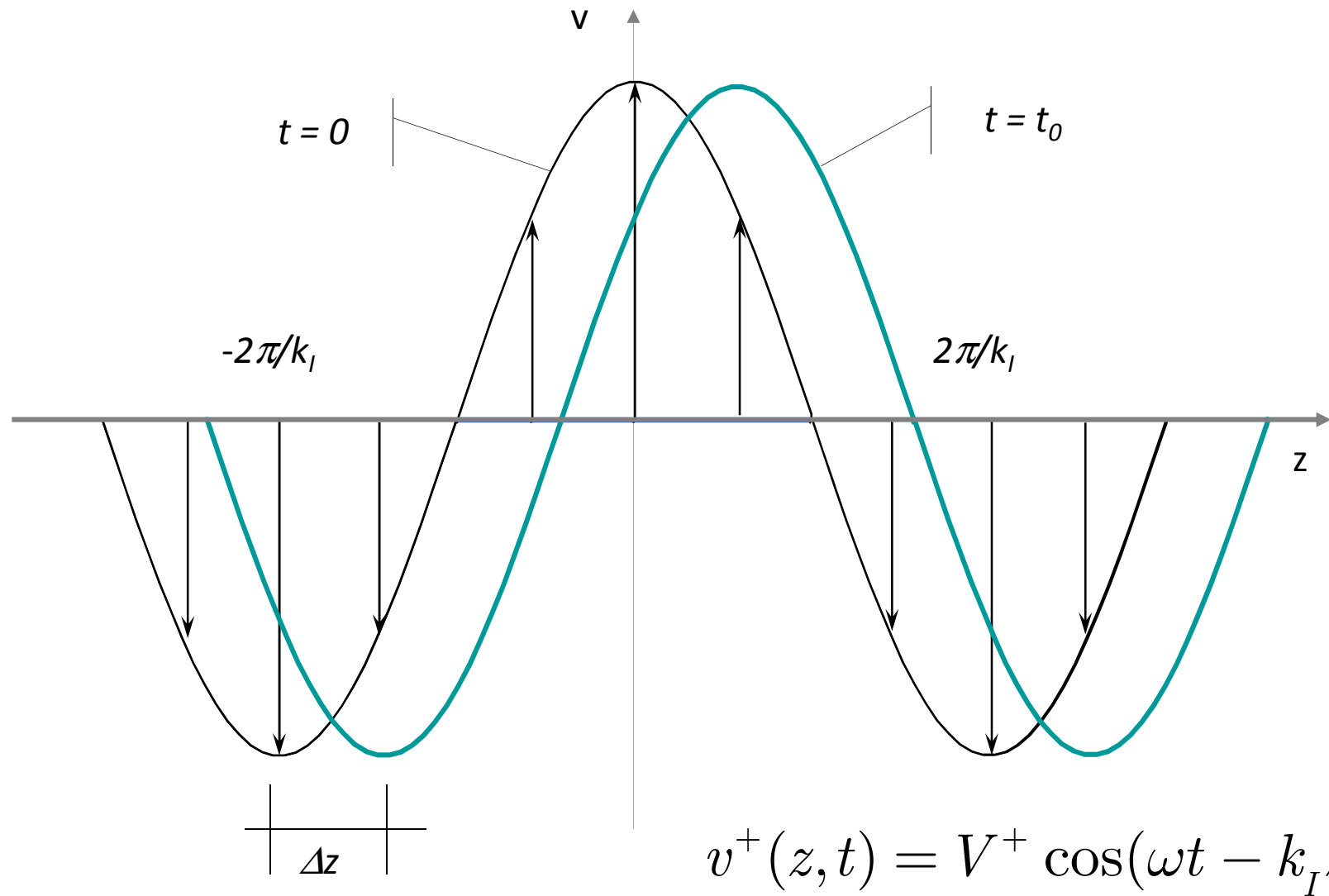
- ✓ À medida que o tempo passa a corrente no primeiro indutor carrega o capacitor seguinte
- ✓ A variação da tensão no capacitor provoca a variação da corrente no indutor seguinte
- ✓ Resultado
  - **A perturbação elétrica se propaga com velocidade  $v_f$**  ao longo da linha de transmissão

# Velocidade de fase

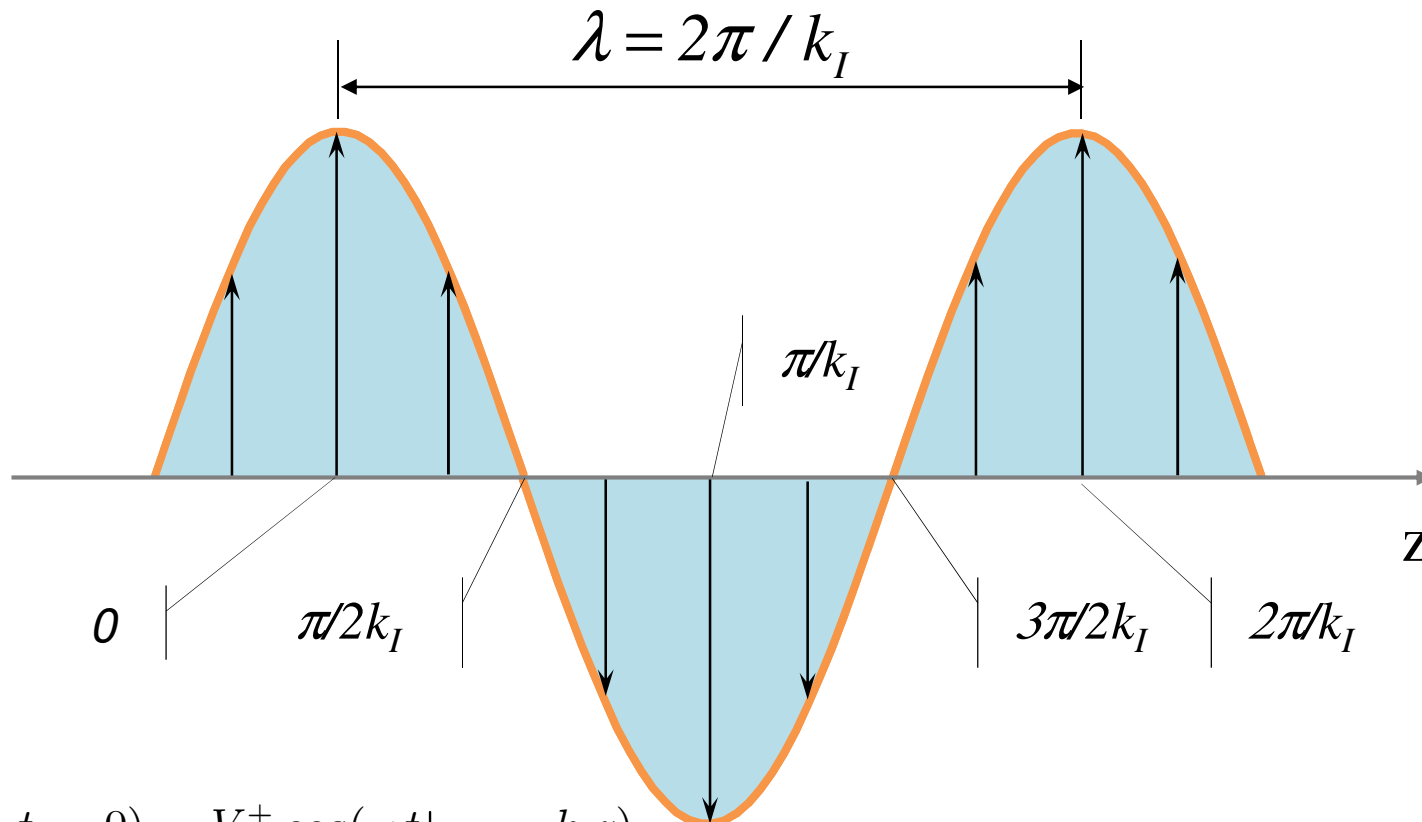




# Solução da equação de onda



# Comprimento de onda



$$v^+(z, t = 0) = V^+ \cos(\omega t|_{t=0} - k_I z)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_I} - 0$$

$$k_I = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$k_I$ : constante de propagação  
[rad/unid. compr.] ou [(unid. compr.)<sup>-1</sup>]

# Constante de propagação e atenuação

---

$$V^+(z) = V^+ e^{-kz} = V^+ e^{-(k_R + jk_I)z}$$

$$V^+(z) = V^+ e^{-k_R z} e^{-jk_I z}$$

$$v^+(z, t) = \underbrace{V^+ e^{-k_R z}}_{\text{Amplitude decrescendo exponencialmente}} \cos(\omega t - k_I z)$$

Amplitude decrescendo  
exponencialmente

$k_R$  : constante de atenuação: [neper/metro] ou [dB/metro]

$k_I$  : constante de fase: [rad/metro] ou [ $\text{m}^{-1}$ ]

# Linha de transmissão sem perdas-1

---

$$\frac{k}{Z} = \sqrt{\frac{Y}{Z}} = \sqrt{\frac{G + j\omega C}{R + j\omega L}} = \sqrt{\frac{j\omega C}{j\omega L}} = \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{ohm}$$

$$k = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

$$k = \sqrt{(j\omega L)(j\omega C)} = \sqrt{-\omega^2 LC}$$

$$k = j\omega\sqrt{LC} = j \frac{\omega}{v_{fase}} \quad m^{-1}$$

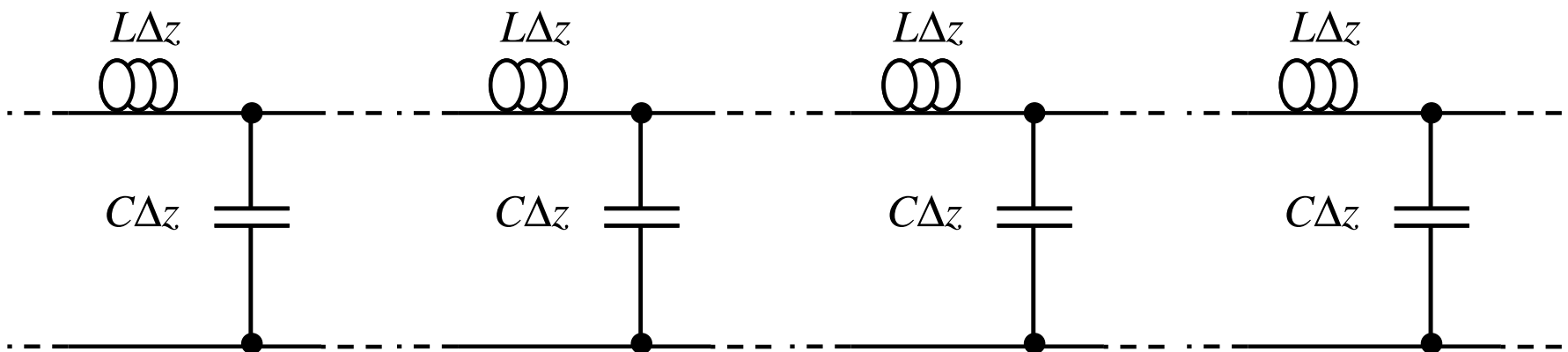
# Linha de transmissão sem perdas-2

---

$$V(z) = V^+ e^{-jk_I z} + V^- e^{+jk_I z}$$

$$I(z) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-jk_I z} - \frac{V^-}{Z_0} e^{+jk_I z}$$

$k_I$  : constante de fase, constante de propagação



# Onda em linha com e sem perdas

