USP EESC Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação
SEL413-Telecomunicações
Prof. Amílcar Careli César
Exercícios resolvidos de ondas eletromagnéticas

Exercício 1: O campo elétrico de uma onda plana propagando no sentido $+y$ possui duas componentes, dadas por $\overline{E}_1 = \widehat{z}2\cos(\omega t - k_y y - \pi/2)$, mVm e $\overline{E}_2 = \widehat{z}2\cos(\omega t - k_y y + \pi/6)$, mVm. Para a onda resultante, determinar: a) O fasor campo magnético; b) se o valor médio do vetor de Poynting é $2,5 \times 10^{-9}$ W/m^2, determinar a impedância intríseca do meio, em ohms.
Solução: Os fasores são $\overline{E}_1 = \widehat{z}2\exp(-j\pi/2)\exp(-jk_y y)$ e $\overline{E}_2 = \widehat{z}2\exp(j\pi/6)\exp(-jk_y y)$. O campo resultante é $\overline{E}_t = \overline{E}_1 + \overline{E}_2$ ou $\overline{E}_t = \widehat{z}2\exp(-jk_y y)[\exp(-j\pi/2) + \exp(j\pi/6)]$. Mas $\exp(-j\pi/2) + \exp(j\pi/6) = \cos(\pi/2) - jsen(\pi/2) + \cos(\pi/6) + jsen(\pi/6)$ ou $\exp(-j\pi/2) + \exp(j\pi/6) = 0 - j + \sqrt{3}/2 + j1/2 = \sqrt{3}/2 - j1/2$ ou $\exp(-j\pi/2) + \exp(j\pi/6) = \exp(-j\pi/6)$.

Portanto, o fasor campo elétrico é $\boxed{\overline{E}_t = \widehat{z}2\exp(-j\pi/6)\exp(-jk_y y)}$ mV/m.

O campo magnético é dado por $\overline{H}_t = -\nabla \times \overline{E}/j\omega\mu$. Como $E_y = E_x = 0$ e $\partial/\partial x = \partial/\partial z = 0$, então $\nabla \times \overline{E} = \widehat{x}\partial E_z/\partial y$. Desta forma, $\nabla \times \overline{E} = -\widehat{x}j2k_y\exp(-j\pi/6)\exp(-jk_y y)$. Substituindo na expressão de $\overline{H}$, $\overline{H}_t = \widehat{x}(2k_y/\omega\mu)\exp(-j\pi/6)\exp(-jk_y y)$. Como $k_y/\omega\mu = 1/\eta$, na qual η é a impedância intrínseca do meio, $\boxed{\overline{H}_t = \widehat{x}(2/\eta)\exp(-j\pi/6)\exp(-jk_y y)}$ mA/m. O valor médio do vetor de Poynting é $\left\langle \overline{S}(x,y,z,t)\right\rangle = (1/2)\,\mathrm{Re}\left\{\overline{E}_t(x,y,z) \times \overline{H}_t^*(x,y,z)\right\}$. Assim, $\overline{E}_t(x,y,z) \times \overline{H}_t^*(x,y,z) = [\widehat{z}2\exp(-j\pi/6)\exp(-jk_y y)] \times [\widehat{x}(2/\eta)\exp(j\pi/6)\exp(jk_y y)]$ e $\overline{E}_t(x,y,z) \times \overline{H}_t^*(x,y,z) = (2^2/\eta)(\widehat{z} \times \widehat{x}) = (2^2/\eta)(\widehat{y})$ e $\left\langle \overline{S}(x,y,z,t)\right\rangle = (2/\eta)$ μW/m^2 fluindo na direção $\widehat{y}$. Portanto, $\eta = 2/\left\langle \overline{S}(x,y,z,t)\right\rangle = 2/\left(2,5 \times 10^{-3}\right)$ e $\boxed{\eta = 800}$ ohms.

Exercício 2: O campo elétrico de uma onda eletromagnética é dado por $\overline{E} = 10(\widehat{x} + j\widehat{y})\exp(-jkz)$ V/m. Determinar: a) O valor médio do vetor de Poynting.
Solução: O campo magnético é determinado a partir da equação de Maxwell $\nabla \times \overline{E} = -j\omega\mu\overline{H}$. Como $\overline{E}_z = 0$ e $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$, $\nabla \times \overline{E} = -\widehat{x}(\partial E_y/\partial z) + \widehat{y}(\partial E_x/\partial z)$. O valor médio do vetor de Poynting é $\left\langle \overline{S}(x,y,z,t)\right\rangle = (1/2)\,\mathrm{Re}\left\{\overline{E}(x,y,z) \times \overline{H}^*(x,y,z)\right\}$. Como $\overline{E} = E_x\widehat{x} + E_y\widehat{y}$ e $\overline{H} = H_x\widehat{x} + H_y\widehat{y}$, $\overline{E}(x,y,z) \times \overline{H}^*(x,y,z) = E_x H_y^* - E_y H_x^*$ e $\left\langle \overline{S}(x,y,z,t)\right\rangle = (1/2)\,\mathrm{Re}\left\{E_x H_y^* - E_y H_x^*\right\}$.

Para $\overline{E} = 10(\widehat{x} + j\widehat{y})\exp(-jkz)$ V/m, $\partial E_y/\partial z = 10k\exp(-jkz)$ e $\partial E_x/\partial z = -j10k\exp(-jkz)$. Portanto, $\nabla \times \overline{E} = -10k(\widehat{x} + j\widehat{y})\exp(-jkz)$ e $\overline{H} = (10/\eta)(-j\widehat{x} + \widehat{y})\exp(-jkz)$, na qual $\eta = (\omega\mu)/k$. Como $E_x H_y^* - E_y H_x^* = (100/\eta)(1+1)$, $\boxed{\left\langle \overline{S}(x,y,z,t)\right\rangle = (100/\eta)\,\widehat{z}}$ W/m^2.

Exercício 3: Uma onda de frequência 1 GHz propaga-se em um meio sem fronteiras caracterizado por $\sigma = 4$ S/m; $\varepsilon_r = 4$ e $\mu_r = 2$. O campo elétrico é $\overline{E}(z) = \widehat{x}E_0\exp(-k_{zr}z)\exp(-jk_{zi}z)$, na qual na qual E_0 é real, k_{zi} é a parte imaginária de k e k_{zr} é a parte real. Se o valor médio do vetor de Poynting é 5 W/m^2 em $z = 0$, determinar: a) a impedância intrínseca do meio; b) a velocidade de fase; c) o valor máximo do campo elétrico em $z = 0$.
Solução:
O campo magnético correspondente é $\overline{H}(z) = \widehat{y}(E_0/|\eta|)\exp(-j\phi_\eta)\exp(-k_{zr}z)\exp(-jk_{zi}z)$. O valor médio do vetor de Poynting é $< \overline{S} >= \mathrm{Re}\left\{\overline{E}(z) \times \overline{H}^*(z)\right\}/2$. Substituindo as expressões de $\overline{E}(z)$ e $\overline{H}(z)$ resulta em $< \overline{S} >= \mathrm{Re}\left\{\widehat{z}E_0^2\exp(-2k_{rz})\exp(j\phi)\right\}/(2|\eta|)$, na qual ϕ é o ângulo de fase da impedância intrínseca do meio. Portanto, $< \overline{S} >= \mathrm{Re}\left\{\widehat{z}E_0^2\exp(-2k_{rz})(\cos\phi + j\mathrm{sen}\phi)\right\}/(2|\eta|)$ e $< \overline{S} >= E_0^2\exp(-2k_{rz})\cos\phi/(2|\eta|)$. A impedância intrínseca do meio é $\eta = \sqrt{\mu/\overline{\overline{\varepsilon}}} = |\eta|\exp(j\phi)$, na qual $\overline{\overline{\varepsilon}} = \varepsilon - j\sigma/\omega$ e $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$. Temos que $k_z = j\omega\sqrt{\mu\overline{\overline{\varepsilon}}} \equiv k_{zr} + jk_{zi}$. A velocidade de fase é $v_f = 2\pi f/k_{zi}$. Substituindo os valores numéricos, $\eta = 32,3 + j30,5$ ou $\boxed{\eta = 44,4\angle 43,4^0 \text{ ohms}}$ e

$k = 129,1 + j122,2\ \mathrm{m}^{-1}$. Em $z = 0$, a amplitude máxima do campo é $E_0 = \left[2\,|\eta| < \overline{S} > / \cos(\phi)\right]^{0,5}$ e $\boxed{E_0 = 24,7\ \mathrm{V/m}}$. A velocidade de fase é $\boxed{v_f = 4,87 \times 10^7\ \mathrm{m/s}}$.

Exercício 4: Os campos elétrico e magnético de uma onda que se propaga em um meio de impedância intrínseca η são dados por $\overline{E}(z) = \left(\widehat{x}E_{x0} + \widehat{y}E_{y0}e^{j\phi}\right)\exp\left[j\left(\omega t - k_z z\right)\right]$ V/m e $\overline{H}(z) = -\left(1/\eta\right)\left(\widehat{x}E_{y0}e^{j\phi} - \widehat{y}E_{x0}\right)\exp\left[j\left(\omega t - k_z z\right)\right]$ A/m. Determinar o valor médio da densidade de potência sabendo que a onda se propaga em meio caracterizado por $\varepsilon_r = 3$ e $\mu_r = 9$. As amplitudes do campo elétrico são $E_{x0} = 10$ mV/m e $E_{y0} = 20$ mV/m.
Solução: O fasor campo elétrico é $\overline{E}(z) = \left(\widehat{x}E_{x0} + \widehat{y}E_{y0}e^{j\phi}\right)\exp\left(-jk_z z\right)$. O fasor campo magnético é $\overline{H}(z) = -\left(1/\eta\right)\left(\widehat{x}E_{y0}e^{j\phi} - \widehat{y}E_{x0}\right)\exp\left(-jk_z z\right)$. O vetor de Poynting complexo é $\overline{S}(z) = \overline{E}(z) \times \overline{H}^*(z)$.
Assim, $\overline{S}(z) = \left[\left(\widehat{x}E_{x0} + \widehat{y}E_{y0}e^{j\phi}\right)\exp\left(-jk_z z\right)\right] \times \left[-\left(1/\eta\right)\left(\widehat{x}E_{y0}e^{-j\phi} - \widehat{y}E_{x0}\right)\exp\left(jk_z z\right)\right]$ e $\overline{S}(z) = -\left(1/\eta\right)\left[-\left(\widehat{x} \times \widehat{y}\right)E_{x0}^2 + \left(\widehat{y} \times \widehat{x}\right)E_{y0}^2\right] = -\left(1/\eta\right)\left(-\widehat{z}E_{x0}^2 - \widehat{z}E_{x0}^2\right) = \left[\left(E_{x0}^2 + E_{y0}^2\right)/\eta\right]\widehat{z}$. O valor médio é $\left\langle \overline{S}(z,t)\right\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\overline{S}(z)\right\}$ e $\boxed{\left\langle \overline{S}(z,t)\right\rangle = \left[\left(E_{x0}^2 + E_{y0}^2\right)/2\eta\right]\ \mathrm{W/m^2}}$. A onda se propaga na direção $\widehat{z}$, que é a direção do vetor de Poynting. A impedância intrínseca do meio: $\eta = \sqrt{9/3}\eta_0 = \sqrt{3}\eta_0 = 377\sqrt{3}$ ohms. $E_{x0}^2 = \left(10 \times 10^{-3}\right)^2 = 100\ \mu\mathrm{V^2/m^2}$ e $E_{y0}^2 = \left(20 \times 10^{-3}\right)^2 = 400\ \mu\mathrm{V^2/m^2}$. Assim, $\left\langle \overline{S}(z,t)\right\rangle = 500/\left(2 \times 377\sqrt{3}\right)$e $\boxed{\left\langle \overline{S}(z,t)\right\rangle = 0,38\ \mu\mathrm{W/m^2}}$.

Exercício 5: O campo elétrico de uma onda plana que se propaga em meio caracterizado por $(\mu = \mu_0;\ \varepsilon = 12\varepsilon_0)$ é dado por $\overline{E} = 12\cos\left[2\pi\left(10^6 t - kz/2\pi\right)\right]\widehat{y}$, V/m. Determinar: A velocidade de fase da onda; o comprimento de onda do sinal; o fasor campo magnético; o valor médio do vetor de Poynting.
Solução: O campo elétrico é $\overline{E}(z,t) = 12\cos\left(2\pi 10^6 t - kz\right)\widehat{y}$ ou $\overline{E}(z,t) = 12\cos\left(\omega t - kz\right)\widehat{y}$ V/m. O fasor campo elétrico é $\overline{E}(z) = E_{y0}\exp\left(-jkz\right)\widehat{y}$. O vetor propagação é $\overline{k} = k_z\widehat{z}$. O fasor campo magnético é $\overline{H}(z) = -\nabla \times \overline{E}(z)/\left(j\omega\mu\right)$. Portanto, $\nabla \times \overline{E}(z) = -\widehat{x}\partial E_y(z)\partial z$. Como $k/\left(\omega\mu\right) = 1/\eta$, $\overline{H}(z) = -\left(E_{y0}/\eta\right)\exp\left(-jkz\right)\widehat{x}$ A/m. O vetor de Poynting complexo é $\overline{S}(z) = \overline{E}(z) \times \overline{H}^*(z)$ e valor médio do vetor de Poynting é $\left\langle \overline{S}(z,t)\right\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\overline{S}(z)\right\}$. Assim, $\eta = \eta_0\sqrt{\mu_r/\varepsilon_r}$ e $\eta = 109$ ohms; $E_{y0}/\eta = 0,11$ A/m; $k = \omega/v_f = 0,073\ \mathrm{m}^1$; $v_f = 3 \times 10^8/\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$ e $\boxed{v_f = 8,66 \times 10^7\ \mathrm{m/s}}$; $\lambda = v_f/f$ e $\boxed{\lambda = 86,6\ \text{metros}}$. O fasor campo magnético é $\boxed{\overline{H}(z) = -0,11\exp\left(-j0,073z\right)\widehat{x}\ \mathrm{A/m}}$. O valor médio é $\left\langle \overline{S}(z,t)\right\rangle = (1/2)\left[\widehat{y}E_{y0}\exp\left(-jkz\right)\right] \times \left[-\left(E_{y0}/\eta\right)\exp\left(+jkz\right)\widehat{x}\right]$ e $\left\langle \overline{S}(z,t)\right\rangle = (1/2\eta)\left[-E_{y0}^2\left(\widehat{y} \times \widehat{x}\right)\right] = -\left(E_{y0}^2/2\eta\right)\left(-\widehat{z}\right)$ e $\left\langle \overline{S}(z,t)\right\rangle = \left(E_{y0}^2/2\eta\right)\widehat{z}$. Portanto, $\boxed{\left\langle \overline{S}(z,t)\right\rangle = 0,66\widehat{z}\ \mathrm{W/m^2}}$.

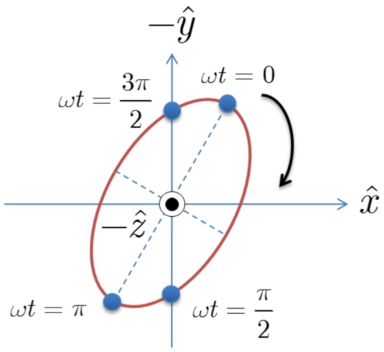
Exercício 6: Uma onda plana uniforme polarizada perpendicularmente ao plano de incidência propaga-se no ar e incide normalmente $(\theta_i = 0)$ sobre plano infinito de material dielétrico caracterizado por $\varepsilon = 3\varepsilon_0$ e $\mu = \mu_0$. Se o campo elétrico da onda no ar é $\overline{E}_i = 10\cos\left(\omega t - z\right)\widehat{y}$ V/m, calcular: **a**) A frequência da onda, em Hz; (**b**) o fasor campo elétrico total no ar.
Solução: No meio 1 (ar) há duas ondas: a incidente e a refletida e no meio 2, a transmitida. O campo elétrico total no meio 1 corresponde à superposição das ondas incidente e refletida. Como a incidência é normal $(\theta_i = 0^0)$, os coeficientes de reflexão e transmissão são $R_N = \left(\eta_2 - \eta_0\right)/\left(\eta_2 + \eta_0\right)$ e $T_N = 1 + R_N$. As impedâncias intrínsecas dos meios são $\eta_0 = 377\ \Omega$ e $\eta_2 = \eta_0/\sqrt{\varepsilon_{r2}}\ \Omega$. Portanto, $R_N = \left(1/\sqrt{3} - 1\right)/\left(1/\sqrt{3} + 1\right) = -0,268$ e $T_N = 1 - 0,268 = 0,732$. Os fasores campo elétrico das ondas incidente, refletida e transmitida são dados por: $\overline{E}_i = 10\exp\left(-jz\right)\widehat{y}$ V/m; $\overline{E}_r = -0,268 \times 10E_0\exp\left(jz\right)\widehat{y}$ V/m. Portanto,
$\boxed{\overline{E}_1 = \overline{E}_i + \overline{E}_r = 10\left[\exp\left(-jz\right) - 0,268\exp\left(jz\right)\right]\widehat{y}\ \mathrm{V/m}}$ (**b**).

O fasor campo elétrico é $\overline{E}_i = 10 \exp(-jz)\,\widehat{y}$ V/m. A onda se propaga no sentido $+z$, o campo elétrico aponta no sentido $+y$. Inspecionando a expressão de $\overline{E}_i$ concluímos que $k_{iz} = 1$ rad/m. Mas, $k_{iz} = \omega/c = 2\pi f/c$, na qual c é a velocidade da luz no vácuo. Portanto, $f = k_{iz}c/(2\pi) = 1 \times 3 \times 10^8/(2\pi)$ e $\boxed{f = 47,75 \text{ MHz}}$ (**a**).

Exercício 7: O campo elétrico de uma onda é

$$\overline{E}(z) = E_0 \left[\widehat{x} - \widehat{y}j2\exp(-j\pi/3)\right]\exp(jk_z z)\, V \cdot m^{-1}.$$

Determinar a polarização da onda (linear, circular, elíptica), mão esquerda (ou horário/anti-horário) ou mão direita (ou horário/anti-horário).
Solução: A expressão instantânea do campo elétrico é $\overline{E}(z,t) = \text{Re}\left\{\overline{E}(z)\exp(j\omega t)\right\}$ V·m^{-1} ou $\overline{E}(z,t) = \text{Re}\left\{E_0\left[\widehat{x} - \widehat{y}j2\exp(-j\pi/3)\right]\exp(jk_z z)\exp(j\omega t)\right\}$.
Como $j\exp(-j\pi/3) = \exp(j\pi/2)\exp(-j\pi/3) = \exp(\pi/6)$,
então $\overline{E}(z,t) = E_0\left[\widehat{x}\cos(\omega t + k_z z) - \widehat{y}2\cos(\omega t + k_z z + \pi/6)\right]$ V·m^{-1}. Em[1] $z = 0$, $\overline{E}(z,t) = E_0\left[\widehat{x}\cos(\omega t) - \widehat{y}2\cos(\omega t + \pi/6)\right]$ V·m^{-1}. Para $\omega t = 0$, $\overline{E}_1 = E_0(\widehat{x} - 1,732\widehat{y})$; $\omega t = \pi/2$, $\overline{E}_2 = E_0(0\widehat{x} + \widehat{y})$; $\omega t = \pi$, $\overline{E}_3 = E_0(-\widehat{x} + 1,732\widehat{y})$; $\omega t = 3\pi/2$, $\overline{E}_4 = E_0(0\widehat{x} - 1\widehat{y})$. Note que a onda propaga no sentido *negativo* de z. A onda é $\boxed{\text{EP mão esquerda}}$.



Exercício 8: Uma onda de frequência 1 GHz propaga-se em um meio sem fronteiras caracterizado por $\sigma = 4$ S/m; $\varepsilon_r = 4$ e $\mu_r = 2$. O campo elétrico é $\overline{E}(z) = \widehat{x}E_0\exp(-k_{zr}z)\exp(-jk_{zi}z)$, na qual na qual E_0 é número real, k_{zi} é a parte imaginária de k e k_{zr} é a parte real, ambos reais e positivos. Se o valor médio do vetor de Poynting é 5 W/m^2 em $z = 0$, determinar: a) A impedância intrínseca do meio; b) a velocidade de fase; c) o valor máximo do campo elétrico em $z = 0$.
Solução:
O campo magnético correspondente é $\overline{H}(z) = \widehat{y}(E_0/|\eta|)\exp\left(-j\phi_\eta\right)\exp(-k_{zr}z)\exp(-jk_{zi}z)$. O valor médio do vetor de Poynting é $<\overline{S}>= \text{Re}\left\{\overline{E}(z) \times \overline{H}^*(z)\right\}/2$. Substituindo as expressões de $\overline{E}(z)$ e $\overline{H}(z)$ resulta em $<\overline{S}>= \text{Re}\left\{\widehat{z}E_0^2\exp(-2k_{rz})\exp(j\phi)\right\}/(2|\eta|)$, na qual ϕ é o ângulo de fase da impedância intrínseca do meio. Portanto, $<\overline{S}>= \text{Re}\left\{\widehat{z}E_0^2\exp(-2k_{rz})(\cos\phi + j\text{sen}\phi)\right\}/(2|\eta|)$ e $<\overline{S}>= E_0^2\exp(-2k_{rz})\cos\phi/(2|\eta|)$. A impedância intrínseca do meio é $\eta = \sqrt{\mu/\overline{\overline{\varepsilon}}} = |\eta|\exp(j\phi)$, na qual $\overline{\overline{\varepsilon}} = \varepsilon - j\sigma/\omega$ e $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$. Temos que $k_z = j\omega\sqrt{\mu\overline{\overline{\varepsilon}}} \equiv k_{zr} + jk_{zi}$. A velocidade de fase é $v_f = 2\pi f/k_{zi}$. Substituindo os valores resulta em $\eta = 32,3 + j30,5$ ou $\boxed{\eta = 44,4\angle 43,4^0 \text{ ohms}}$ e $k = 129,1 + j122,2$ m^{-1}. Em $z = 0$, a amplitude máxima do campo é $E_0 = \left[2|\eta| < \overline{S} > /\cos(\phi)\right]^{0,5}$ e $\boxed{E_0 = 24,7 \text{ V/m}}$. A velocidade de fase é $\boxed{v_f = 4,87 \times 10^7 \text{ m/s}}$.

[1]Se desejar expressar a componente em $\widehat{y}$ em forma de função seno, lembrar que $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm A\right) = \mp\text{sen}(A)$.