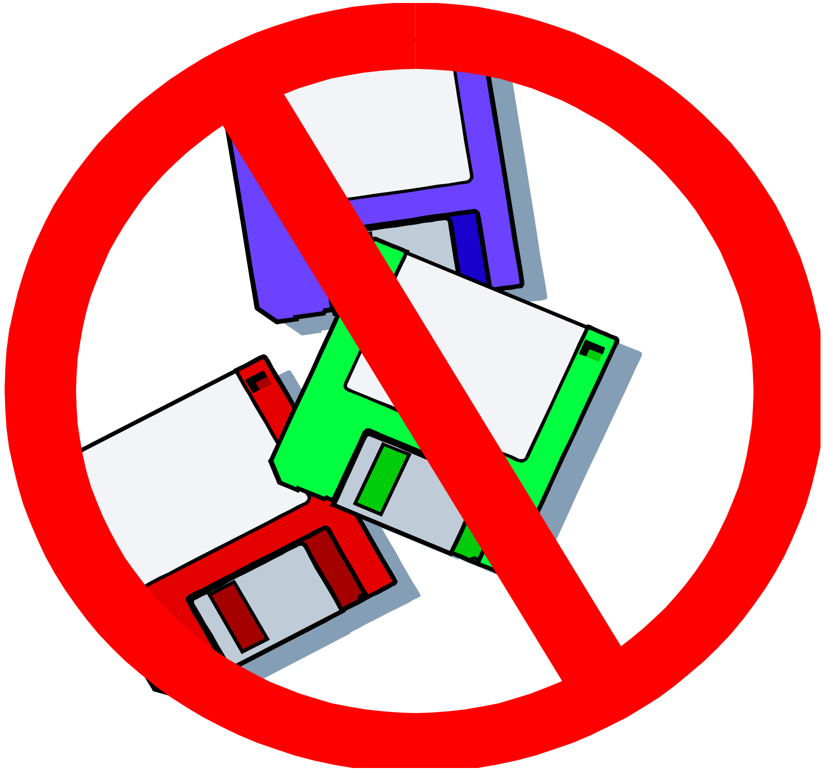
Linhas de Transmissão

SEL 413 Telecomunicações

Amílcar Careli César
Departamento de Engenharia Elétrica da EESC-USP

Atenção!

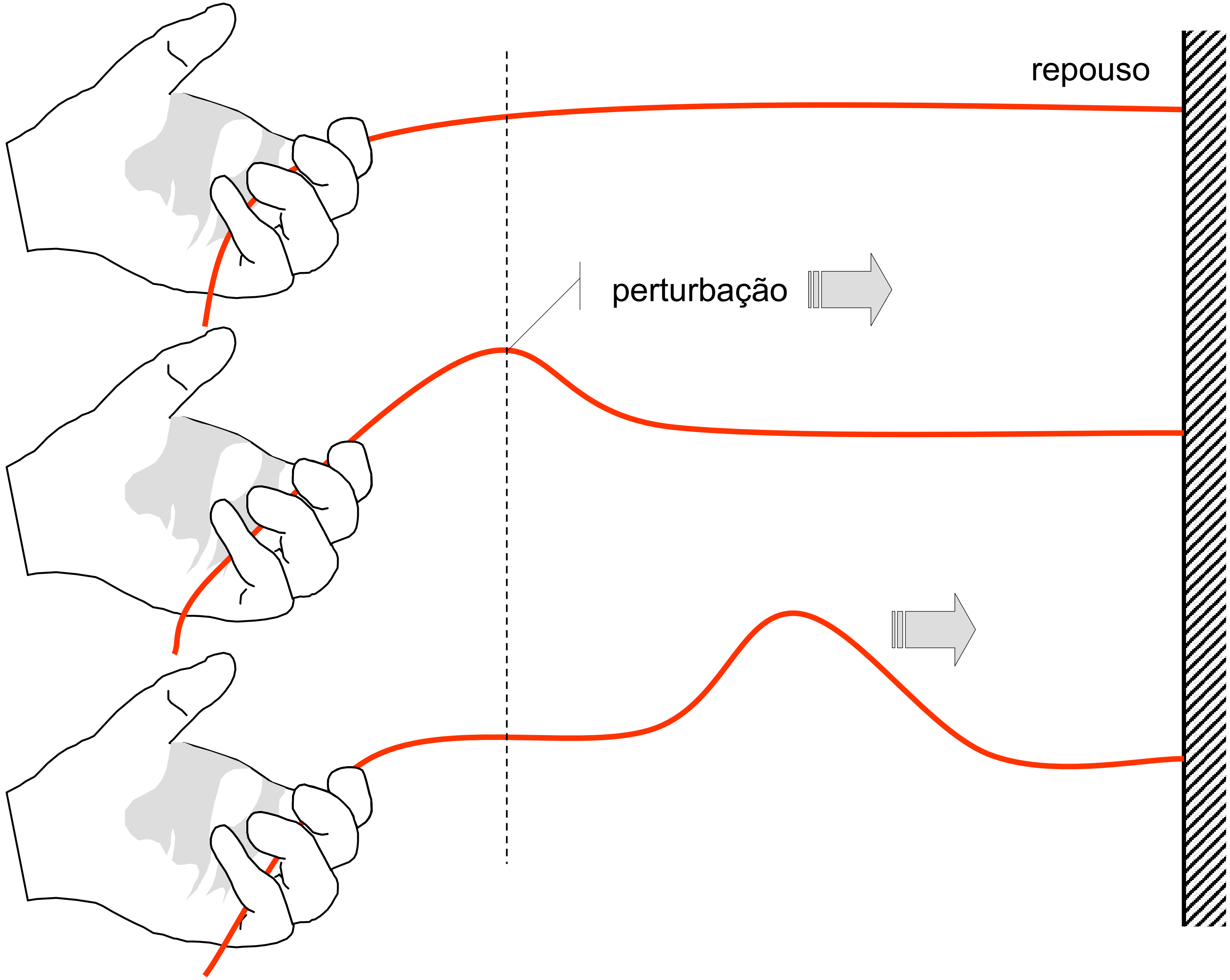


- Este material didático é planejado para servir de apoio às aulas de SEL-413 Telecomunicações , oferecida aos alunos regularmente matriculados no curso de engenharia aeronáutica.
- Não são permitidas a reprodução e/ou comercialização do material.
- solicitar autorização ao docente para qualquer tipo de uso distinto daquele para o qual foi planejado.

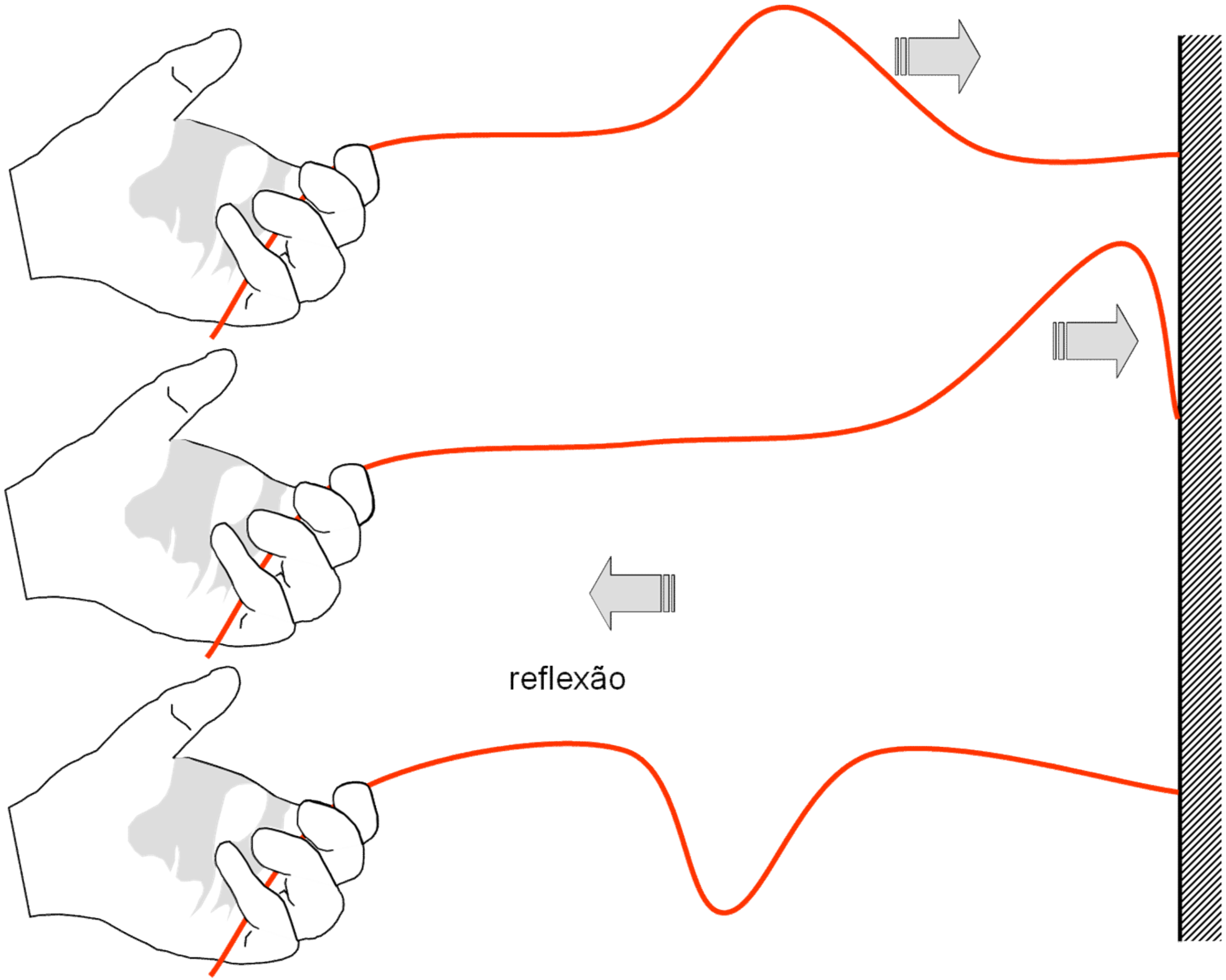
Linhas de Transmissão

- ✓ Transmissão de sinais de um ponto para outro
  - cabo coaxial em linhas de assinantes de TV via cabo
- ✓ Análise pela teoria dos elementos concentrados
  - modelo obedece a lei de Kirchhoff
  - comportamento analisado pela teoria de circuitos
  - análise fasorial para descrever ondas senoidais
- ✓ Descrição das propriedades da onda
- ✓ Comportamento da linha em função da terminação
- ✓ Carta de Smith para auxiliar a visualização do comportamento da onda na linha

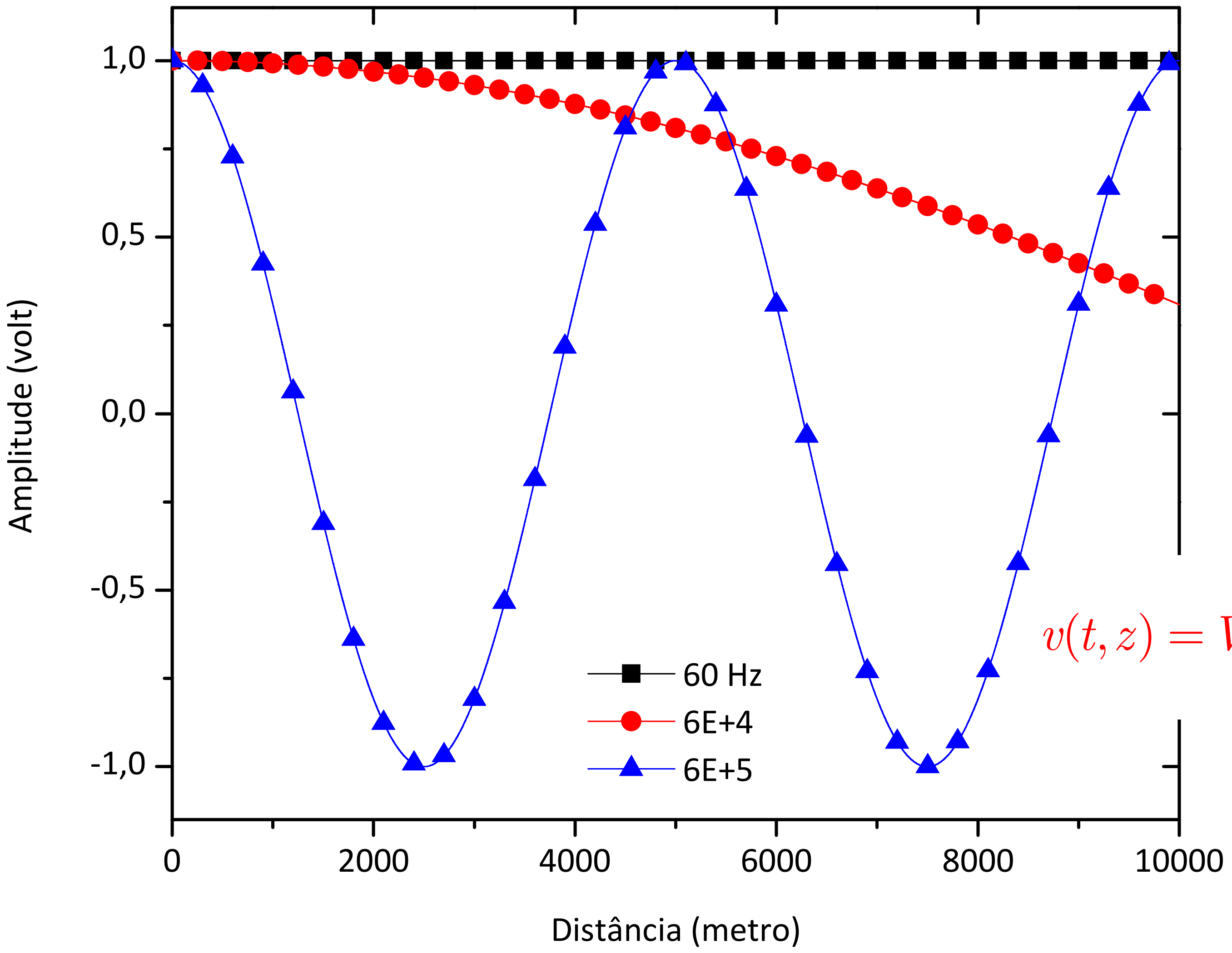
Perturbação mecânica em corda-1



Perturbação mecânica em corda-2



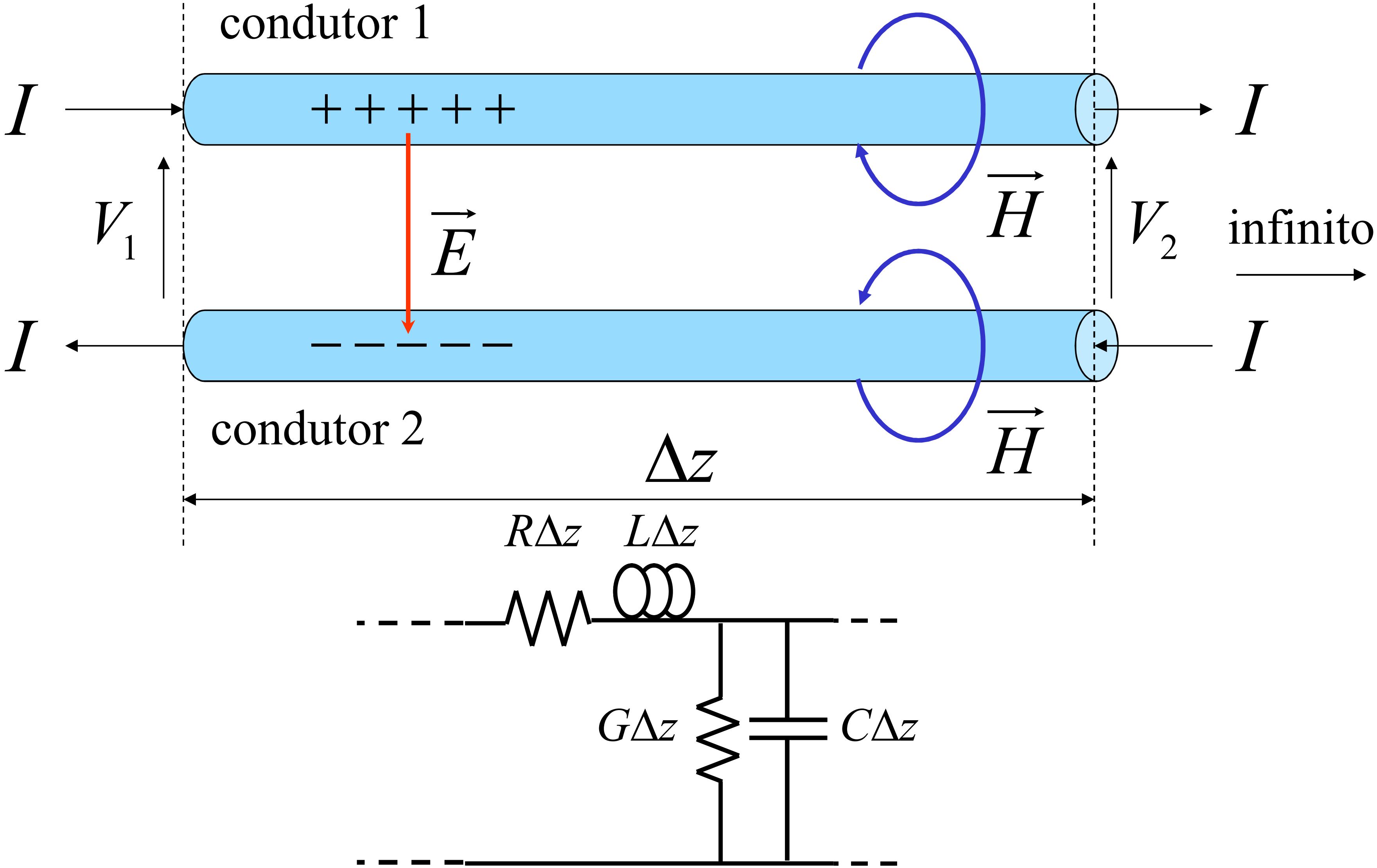
Comparação entre comprimentos de onda



$$v(t,z) = V_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \; volt$$

t=10^{-9} s
V_0=1 V
c= 3×10^8 m/s

Modelo de linha de transmissão



Equação de onda para linha sem perdas

Linha curta, sem perdas, *R=G=0*
Equação de onda para tensão

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

Equação de onda para corrente

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2}$$

Sistemas que obedecem a estas equações podem ser utilizados para transmitir informações sob a forma de onda eletromagnética

Solução da equação de onda para tensão-1

$$v(z,t) = \underbrace{v^{+}\left(t - \frac{z}{v_f}\right)}_{\text{Onda propagando na direção positiva de } z} + \underbrace{v^{-}\left(t + \frac{z}{v_f}\right)}_{\text{Onda propagando na direção negativa de } z}$$

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{LC}} \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

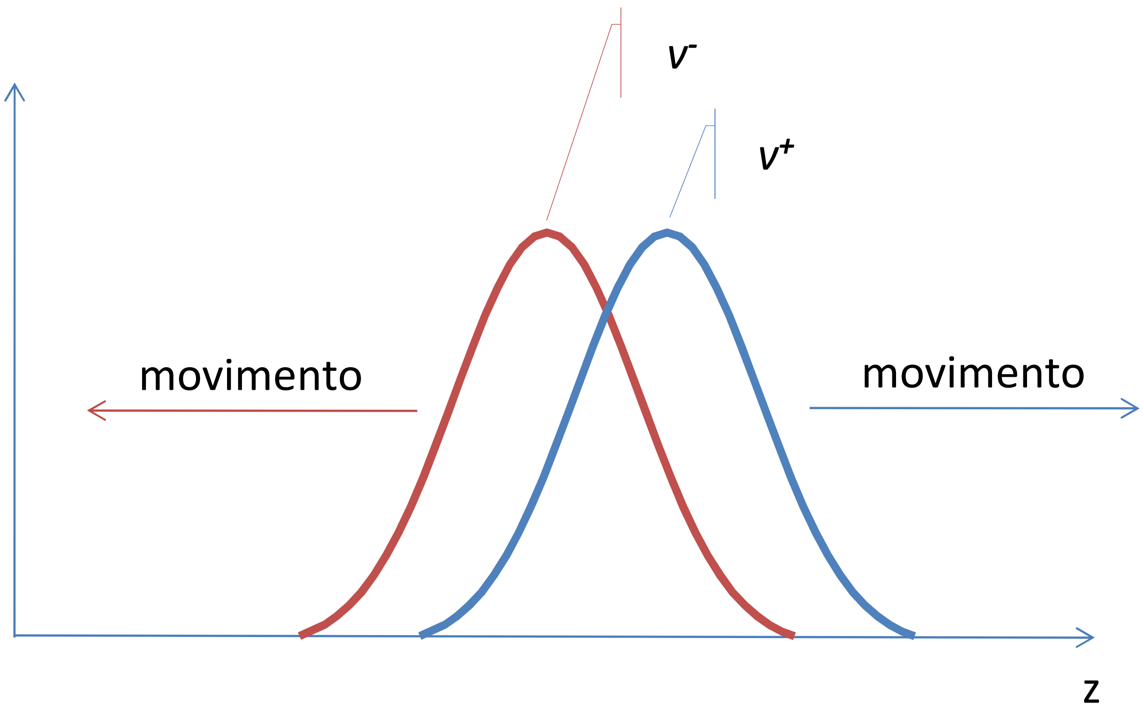
Onda propagando na direção positiva de *z*

Onda propagando na direção negativa de *z*

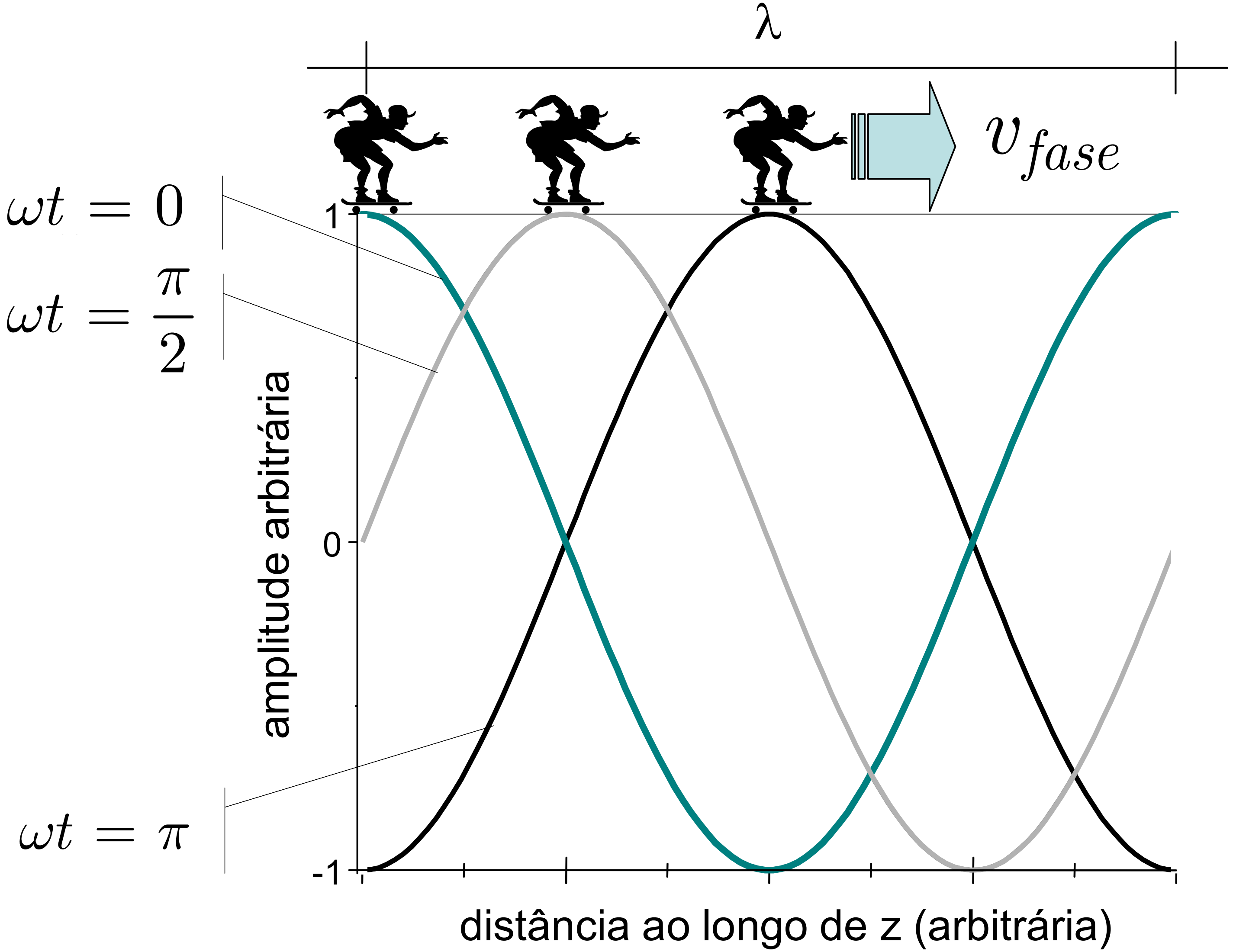
Solução da equação de onda para tensão-2

$$v^{+}\left(t-\frac{z}{v_f}\right)$$

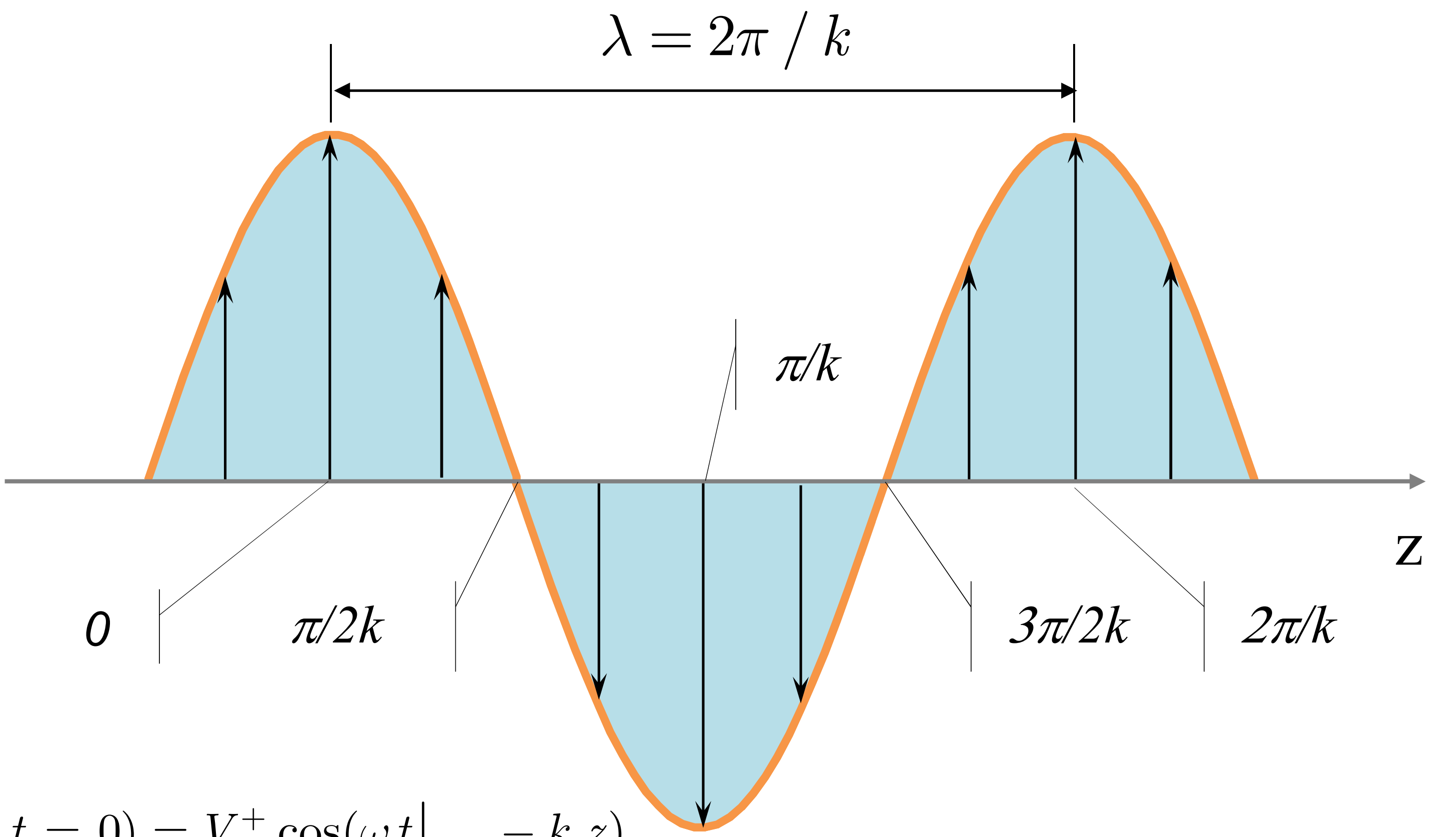
$$v^{-}\left(t+\frac{z}{v_f}\right)$$



Velocidade de fase



Comprimento de onda



$$v^{+}(z, t = 0) = V^{+} \cos(\omega t\big|_{t=0} - k_z z)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} - 0$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

k: constante de fase
[rad/unid. compr.] ou [(unid. compr.)$^{-1}$]

Solução da equação de onda (LT sem perdas)

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

$$v(z,t) = V_0^+ \cos\left(\omega t - k_z z + \phi^+\right) + V_0^- \cos\left(\omega t + k_z z + \phi^-\right)$$

$$v^+(z,t) = V_0^+ \cos\left(\omega t - k_z z + \phi^+\right)$$

Onda propagando na direção positiva de *z*

$$v^-(z,t) = V_0^- \cos\left(\omega t + k_z z + \phi^-\right)$$

Onda propagando na direção negativa de *z*

Representação complexa-1

$$v^+(z,t) = V_0^+ \cos\left(\omega t - k_z z + \phi^+\right)$$

$$v^+(z,t) = \mathrm{Re}\left\{V_0^+ \exp\left(-jk_z z\right)\exp\left(j\omega t\right)\exp\left(j\phi^+\right)\right\}$$

$$v^+(z,t) = \mathrm{Re}\left\{V_0^+ \exp\left[j\left(\omega t - k_z z + \phi^+\right)\right]\right\}$$

$$v^+(z,t) = \mathrm{Re}\left\{V_0^+ \left[\cos\left(\omega t - k_z z + \phi^+\right) + j\mathrm{sen}\left(\omega t - k_z z + \phi^+\right)\right]\right\}$$

Representação complexa-2

$$v^+(z,t) = V_0^+ \cos\left(\omega t - kz + \phi^+\right)$$

$$v^+(z,t) = \mathrm{Re}\left\{\underbrace{\underbrace{V_0^+ \exp\left(\phi^+\right)\exp\left(-jkz\right)}_{\text{fasor}}\exp\left(j\omega t\right)}_{\text{Representação complexa instantânea}}\right\}$$

Representação complexa-3

tensão instantânea real

$$\mathcal{V}\left(z,t\right)=V_{0}\cos\left(\omega t-kz+\phi\right)$$

tensão complexa instantânea

$$V\left(z,t\right)=V_{0}\exp\left(j\phi\right)\exp\left(-jkz\right)\exp\left(j\omega t\right)$$

tensão fasorial

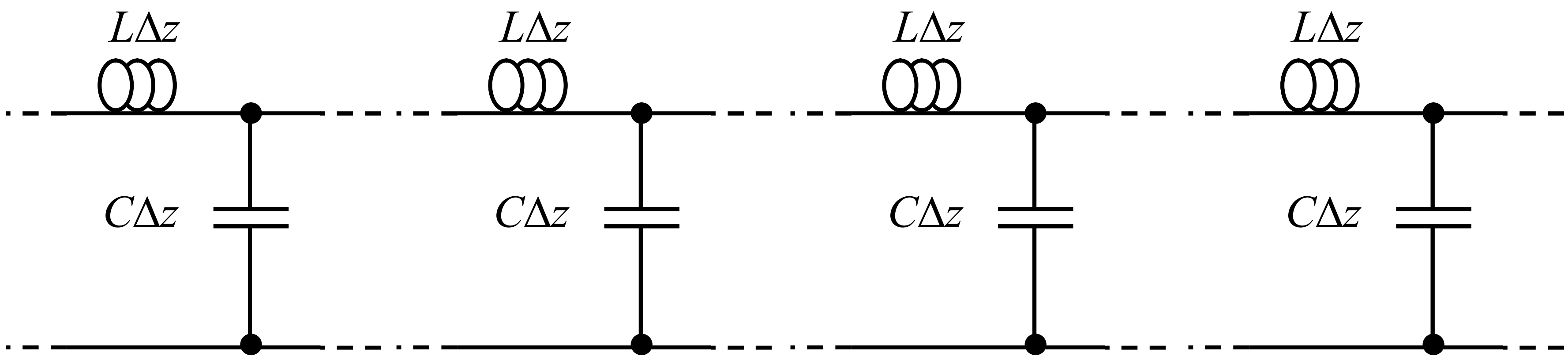
$$V\left(z\right)=V_{0}\exp\left(j\phi\right)\exp\left(-jkz\right)$$

Linha de transmissão sem perdas

$$V(z) = V^{+}e^{-jkz} + V^{-}e^{+jkz}$$

$$I(z) = \frac{V^{+}}{Z_0}e^{-jkz} - \frac{V^{-}}{Z_0}e^{-jkz}$$

k : constante de fase, constante de propagação



LT sem perdas: Constante de fase

$$k = \omega\sqrt{LC} = \frac{\omega}{v_{fase}} \quad m^{-1}$$

$$v_{fase} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

Coeficiente de Reflexão

$$\Gamma(z) = \frac{V^-(z)}{V^+(z)} = \left(\frac{V^-}{V^+}\right)\frac{e^{jkz}}{e^{-jkz}} = \Gamma_0 \frac{e^{jkz}}{e^{-jkz}} = \Gamma_0 e^{j2kz}$$

Coeficiente de reflexão na carga

$$\Gamma(z=0) = \frac{V^-}{V^+} \equiv \Gamma_0 = |\Gamma_0| \exp(j\phi_r)$$

$$\Gamma(z) = |\Gamma_0| e^{(j2kz + j\phi_r)}$$

$$\Gamma(z) = |\Gamma_0| \exp\left[j\left(2kz + \phi_r\right)\right]$$

Impedância ao Longo de Linha sem Perdas-4

$$Z(z) = \frac{V^{+}(z) + V^{-}(z)}{I^{+}(z) - I^{-}(z)}$$

$$z \leq 0$$

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L - jZ_0 tg(kz)}{Z_0 - jZ_L tg(kz)}$$

Coeficiente de Reflexão na Carga

$$Z(z) = Z_0 \frac{\left[\left(1+\Gamma_0\right)/\left(1-\Gamma_0\right)\right] - j\mathrm{tg}\left(kz\right)}{1 - j\left[\left(1+\Gamma_0\right)/\left(1-\Gamma_0\right)\right]\mathrm{tg}\left(kz\right)}$$

em $z = 0$

$$Z\left(z=0\right) = Z_0\left(1+\Gamma_0\right)/\left(1-\Gamma_0\right) = Z_L$$

$$\Gamma_0 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Potência Média Transportada pela Onda

A potência instantânea transportada pela onda incidente é

$$p^+(z,t) = v^+(z,t)i^+(z,t) \quad \mathrm{W}$$

A potência instantânea transportada pela onda incidente é

$$p_m^+ = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{V^+(z)\left[I^+(z)\right]^*\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{\left|V^+(z)\right|^2}{Z_{01}}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\left|V^+\right|^2}{Z_{01}} \quad \mathrm{W}$$

A potência média transportada pela onda refletida é

$$p_m^- = \left|\Gamma\right|^2 \left|V^+\right|^2 / \left(2Z_{01}\right) \quad \mathrm{W}$$

A potência média transportada pela onda transmitida é

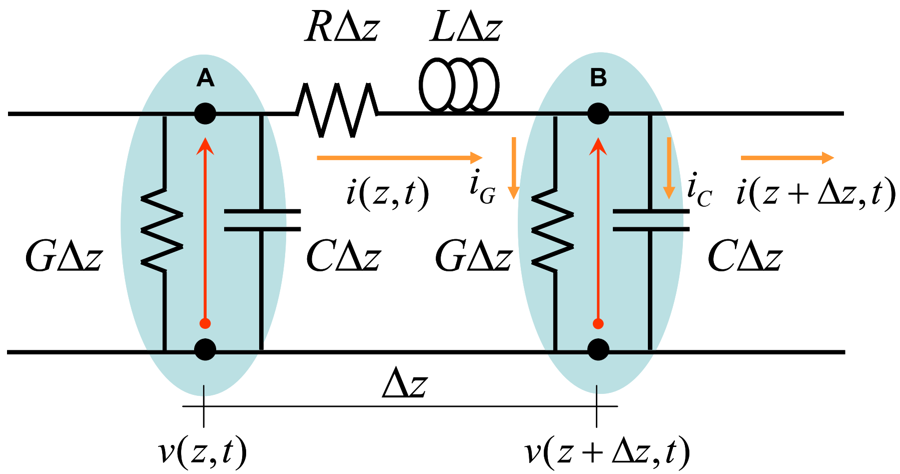
$$p_{m,t}^+ = \left|\tau\right|^2 \left|V_t^+\right|^2 / \left(2Z_{02}\right) \quad \mathrm{W}$$

Inclui perdas

MODELO COMPLETO

Resumo das equações fundamentais de uma L.T.

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = k^2V(z)$$



$$\frac{dV(z)}{dz} = -ZI(z)$$

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} = k^2I(z)$$

$$Z = R + j\omega L$$

$$Y = G + j\omega C$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -Yv(z)$$

$$ZY = \left(RG - \omega^2LC\right) + j\omega\left(RC + LG\right)$$

$$k^2 = ZY$$

Soluções das equações de onda

A solução da equação de onda para tensão

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} - k^2V(z) = 0$$

é da forma

$$V(z) = \underbrace{V^+e^{-kz}}_{\text{Sentido positivo de } z} + \underbrace{V^-e^{+kz}}_{\text{Sentido negativo de } z}$$

$V^+ ; V^-$: constantes a serem determinadas

Corrente

$$V(z) = V^{+}e^{-kz} + V^{-}e^{+kz}$$

$$\frac{dV(z)}{dz} = -ZI(z)$$

$$I(z) = \frac{k}{Z}\left(V^{+}e^{-kz} - V^{-}e^{kz}\right)$$

$$I(z) = I^{+}e^{-kz} - I^{-}e^{kz}$$

$$I^{+} = \frac{k}{Z}V^{+} \text{ e } I^{-} = \frac{k}{Z}V^{-}$$

Corrente

$$I(z) = I^+ e^{-kz} - I^- e^{kz}$$

$$I^+ = \frac{k}{Z} V^+ \text{ e } I^- = \frac{k}{Z} V^-$$

$$\frac{k}{Z} = \frac{\sqrt{ZY}}{Z} = \sqrt{\frac{ZY}{Z^2}} = \sqrt{\frac{Y}{Z}}$$

$$\left[\frac{k}{Z}\right] = \left[\sqrt{\frac{1/\Omega}{\Omega}}\right] = \left[\sqrt{\frac{1}{\Omega^2}}\right] = ohm^{-1}$$

Tensão e corrente

$$V(z) = V^{+}e^{-kz} + V^{-}e^{kz}$$

$$I(z) = I^{+}e^{-kz} - I^{-}e^{kz}$$

Constante de propagação e atenuação

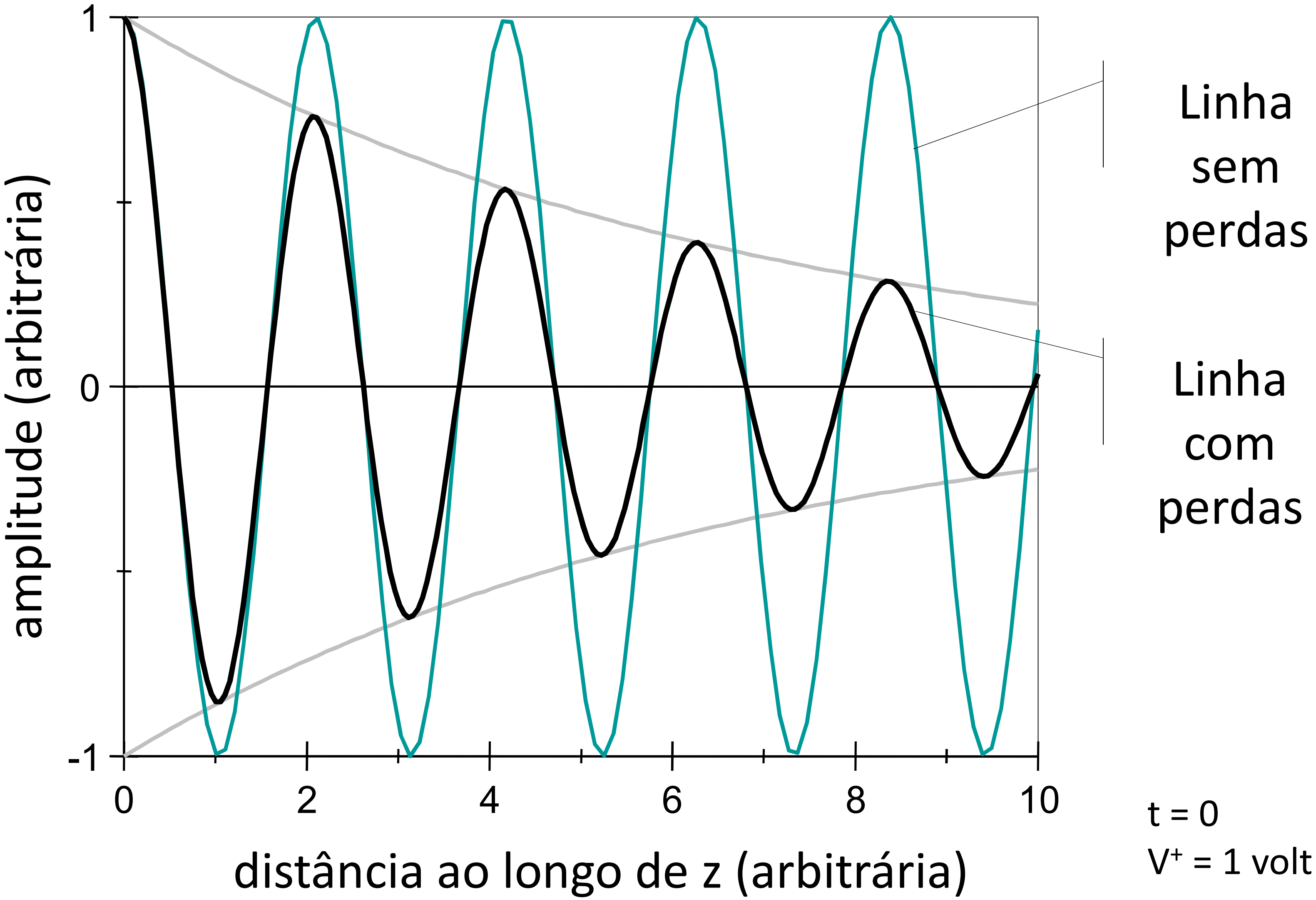
$$v^+(z) = V^+ e^{-kz} = V^+ e^{-\left(k_R + jk_I\right)z}$$

$$v^+(z) = V^+ e^{-k_R z} e^{-jk_I z}$$

$$v^+(z) = \underbrace{V^+ e^{-k_R z}}_{\text{Amplitude decrescendo exponencialmente}} \cos\left(\omega t - k_I z\right)$$

k_R : constante de atenuação: [neper/metro] ou [dB/metro]
k_I : constante de fase: [rad/metro] ou [m^{-1}]

Solução das equações de onda-3



Impedância característica-2

$$\frac{k}{Z} = \frac{\sqrt{ZY}}{Z} = \sqrt{\frac{ZY}{Z^2}} = \sqrt{\frac{Y}{Z}} \equiv \frac{1}{Z_0}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{Z_s}{Z_p}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$ ohm

LT sem perdas: Impedância característica

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

$$\text{Para } R = 0 \text{ e } G = 0$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad ohm$$

Aproximação para a Impedância característica

$$\omega / 2\pi > 100 \quad \text{kHz}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

$$\omega L \gg R$$

$$\omega C \gg G$$

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\omega / 2\pi \simeq 1 \quad \text{kHz}$$

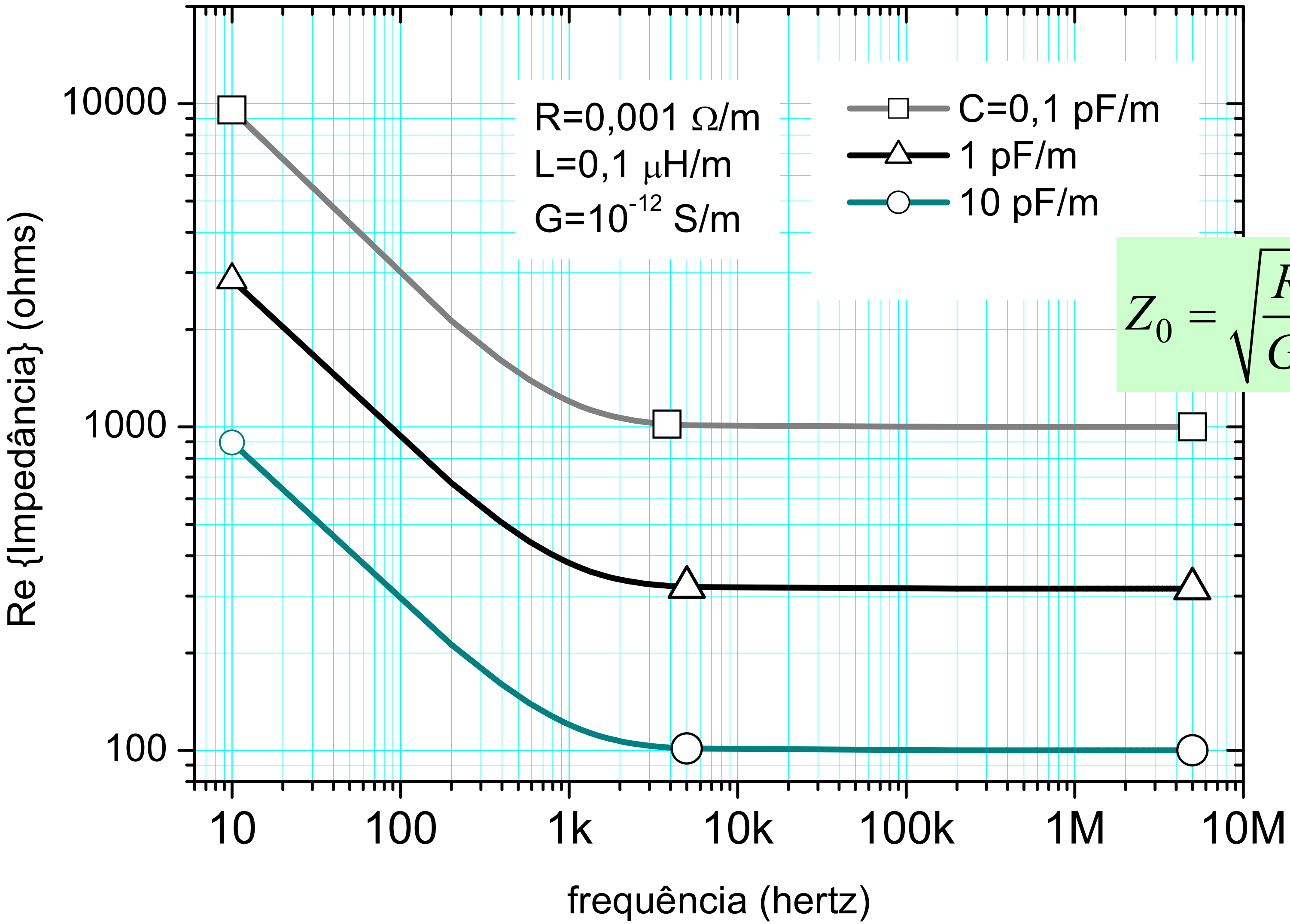
$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

$$\omega L \ll R$$

$$\omega C \ll G$$

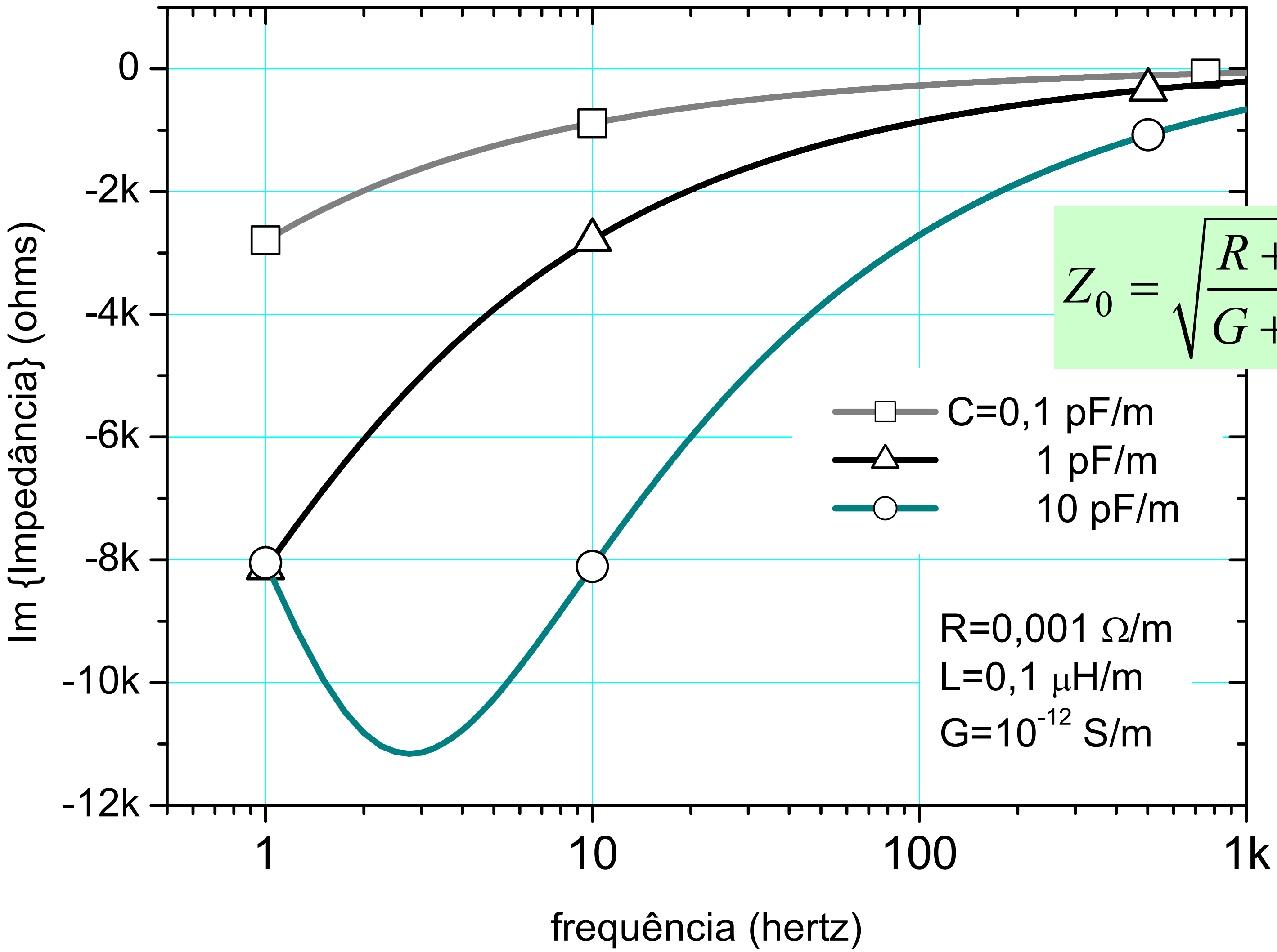
$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{R}{G}}$$

Impedância: variação da capacitância-1



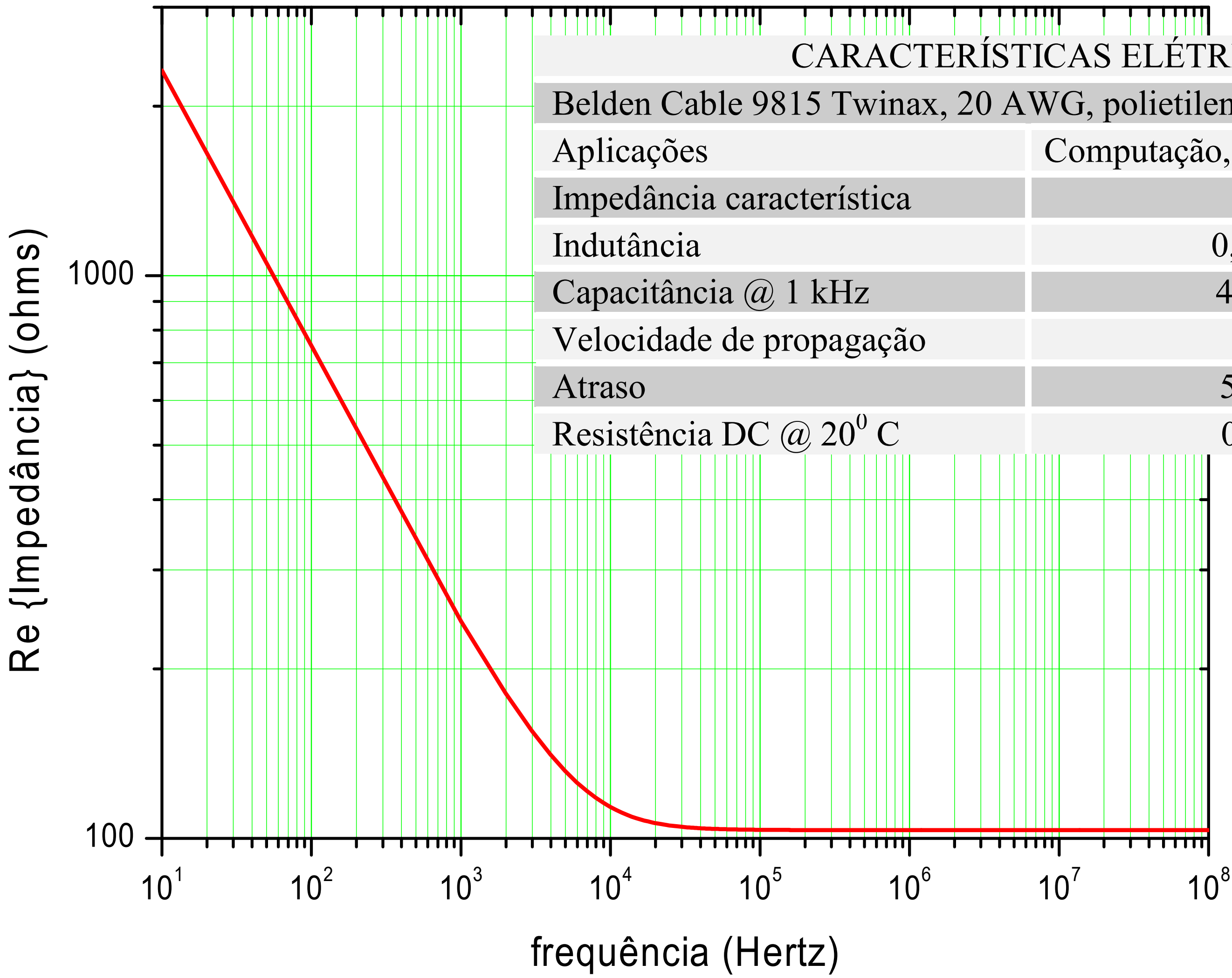
$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

Impedância: variação da capacitância-2



$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

Par de fios trançados



CARACTERÍSTICAS ELÉTRICAS	
Belden Cable 9815 Twinax, 20 AWG, polietileno (2,25-2,3 em 1 kHz)	
Aplicações	Computação, instrumentação
Impedância característica	100 Ω
Indutância	0,509 μH/m
Capacitância @ 1 kHz	47,57 pF/m
Velocidade de propagação	66 %
Atraso	5,05 ns/cm
Resistência DC @ 20^0 C	0,032 Ω/m

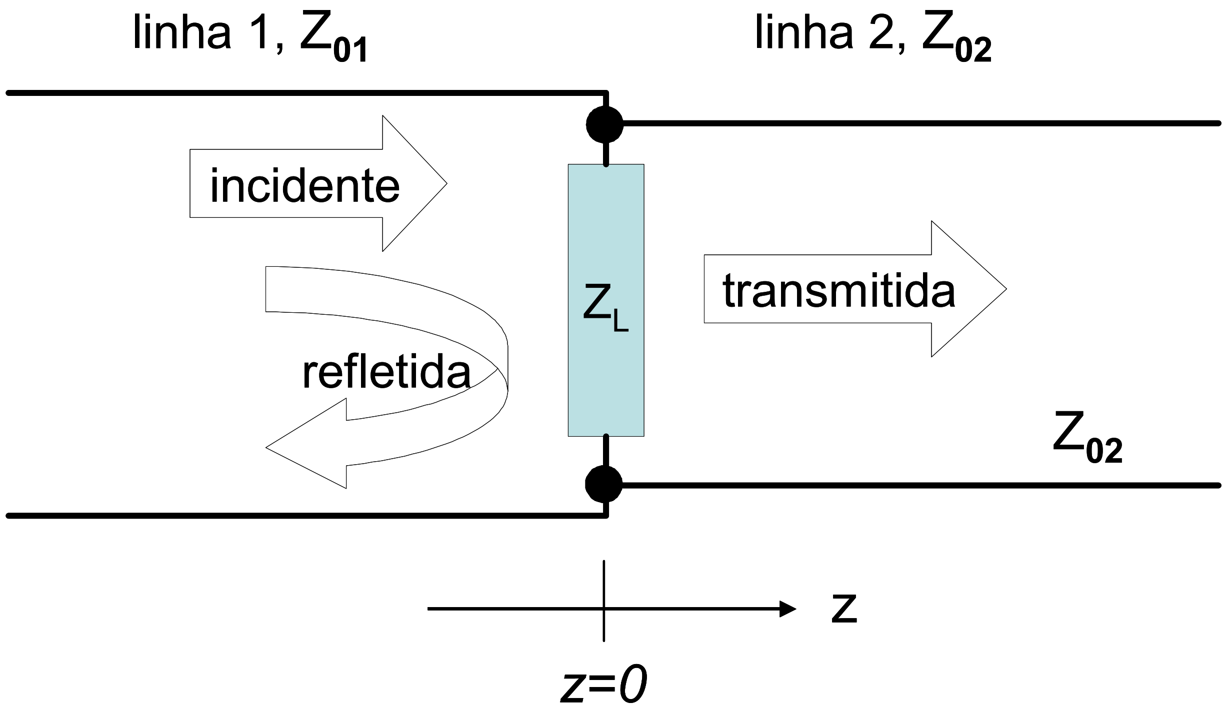
$G=10^{-12}$ S/m

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

Ref.: Belden Cable, http://bwccat.belden.com

COEFICIENTE DE TRANSMISSÃO

Coeficiente de transmissão-1



coeficiente de transmissão

$$\Gamma\left(z\right) = \frac{v^{-}\left(z\right)}{v^{+}\left(z\right)} = \Gamma_0 e^{2kz}$$

coeficiente de reflexão

$$\tau\left(z\right) = \frac{v_t^{+}\left(z\right)}{v^{+}\left(z\right)}$$

Coeficiente de transmissão-2

$$v_t^+(z=0) = v^+(z=0) + v^-(z=0)$$

dividindo por $v^+(z=0)$

$$\frac{v_t^+(z=0)}{v^+(z=0)} = \frac{v^+(z=0)}{v^+(z=0)} + \frac{v^-(z=0)}{v^+(z=0)} = 1 + \frac{v^-(z=0)}{v^+(z=0)}$$

mas, $\Gamma_0 = v^-(z=0) \,/\, v^+(z=0)$

$$\tau_0 = 1 + \Gamma_0$$

os dois coeficientes são,
em geral, números complexos

Resumo

$$\frac{v^+(z=0)}{Z_{01}} - \frac{\Gamma_0 v^+(z=0)}{Z_{01}} = \frac{\tau_0 v^+(z=0)}{Z_{02}} + \frac{\tau_0 v^+(z=0)}{Z_L}$$

$$1 - \Gamma_0 = \tau_0 \frac{Z_{01}}{Z_{02}} \left(\frac{Z_L + Z_{02}}{Z_L} \right)$$

$$Z_{\|} = Z_{02} Z_L / \left(Z_{02} + Z_L \right)$$

associação em paralelo entre Z_{02} e Z_L

$$\Gamma_0 = \frac{Z_{//} - Z_{01}}{Z_{//} + Z_{01}}$$

$$\tau_0 = \frac{2Z_{//}}{Z_{//} + Z_{01}}$$