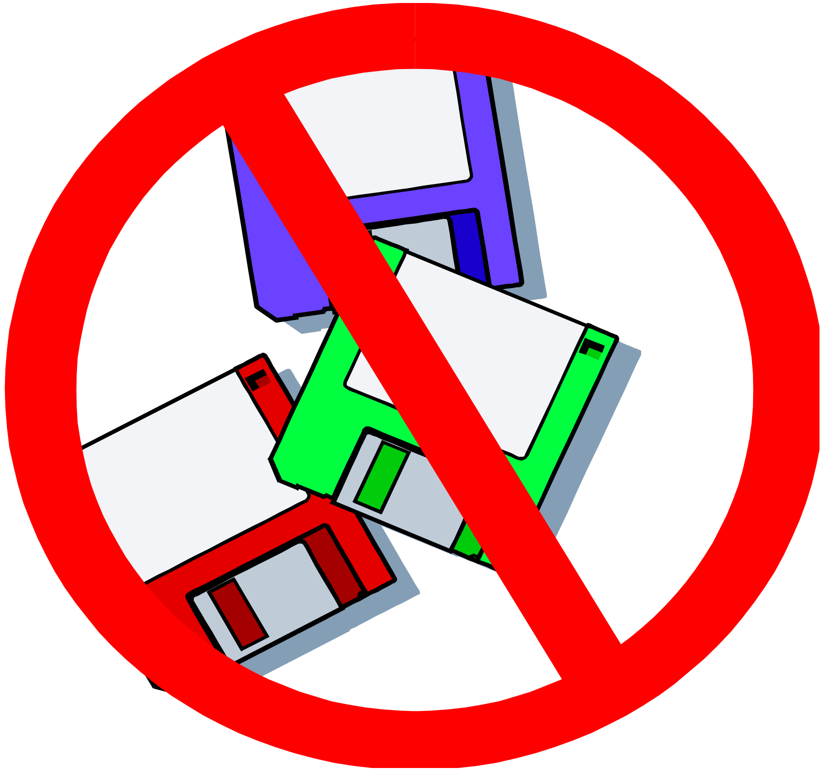
Equações de Onda

SEL 413 Telecomunicações

Amílcar Careli César
Departamento de Engenharia Elétrica da EESC-USP

Atenção!



- Este material didático é planejado para servir de apoio às aulas de SEL-310 E SEL-612: Ondas Eletromagnéticas, oferecida aos alunos regularmente matriculados no curso de engenharia de computação.
- Não são permitidas a reprodução e/ou comercialização do material.
- solicitar autorização ao docente para qualquer tipo de uso distinto daquele para o qual foi planejado.

Equações de Maxwell (SI)

Símbolo	Descrição	Unidade
$\mathbf{E}$	Vetor campo elétrico	volt/metro (V/m)
$\mathbf{H}$	Vetor campo magnético	ampere/metro (A/m)
$\mathbf{D}$	Vetor densidade de fluxo elétrico	coulomb/metro^2 (C/m^2)
$\mathbf{B}$	Vetor densidade de fluxo magnético	weber/metro^2 (Wb/m^2)
$\mathbf{J}$	Vetor densidade de corrente	ampere/metro^2 (A/m^2)
ρ	Densidade volumétrica de cargas	coulomb/metro^3 (C/m^3)

Equações de Maxwell-1

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

Equações de Maxwell-2

Fonte frequência ω, meio isotrópico

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\varepsilon\mathbf{E}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

Equações de onda: Resumo

equação de onda para $\mathbf{E}$

$$\left(\nabla^2 + \omega^2 \mu \varepsilon\right)\mathbf{E} = j\omega\mu\mathbf{J} - \nabla\left(\frac{\nabla \cdot \mathbf{J}}{j\omega\varepsilon}\right)$$

equação de onda para $\mathbf{H}$

$$\left(\nabla^2 + \omega^2 \mu \varepsilon\right)\mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J}$$

Equações de onda em região sem fontes

região sem fontes, $\mathbf{J} = 0$ e $\rho = 0$

$$\left(\nabla^2 + \omega^2 \mu \varepsilon\right) \mathbf{E} = 0$$

equação de onda para $\mathbf{E}$

$$\left(\nabla^2 + \omega^2 \mu \varepsilon\right) \mathbf{H} = 0$$

equação de onda para $\mathbf{H}$

Relação de dispersão-1

região sem fontes, $\mathbf{J} = 0$ e $\rho=0$

$$\left(\nabla^2 + \omega^2\mu\varepsilon\right)\mathbf{E} = 0$$

$$\left(\nabla^2 + \omega^2\mu\varepsilon\right)\mathbf{E}\left(x,y,z\right) = 0$$

$$\mathbf{E}\left(x,y,z\right) = E_x(x,y,z)\widehat{x} + E_y(x,y,z)\widehat{y} + E_z(x,y,z)\widehat{z}$$

solução da equação de onda

componente E_x

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2\mu\varepsilon\right)E_x(x,y,z) = 0$$

Relação de dispersão-2

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\omega^2\mu\varepsilon\right)E_x(x,y,z)=0$$

solução

$$E_x(x,y,z)=E_{x0}\exp\left[-j\left(k_x x+k_y y+k_z z\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_x(x,y,z)=-k_x^2E_x(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}E_y(x,y,z)=-k_y^2E_x(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_z(x,y,z)=-k_z^2E_x(x,y,z)$$

Relação de dispersão-3

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\omega^2\mu\varepsilon\right)E_x(x,y,z)=0$$

solução

$$E_x(x,y,z)=E_{x0}\exp\left[-j\left(k_x x+k_y y+k_z z\right)\right]$$

k_x, k_y, k_z: constantes

$$\left[-\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)+\omega^2\mu\varepsilon\right]E_x(x,y,z)=0$$

$$-\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)+\omega^2\mu\varepsilon=0$$

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=\omega^2\mu\varepsilon\equiv k^2$$

relação de dispersão

Vetor propagação e vetor posição

vetor propagação

$$\mathbf{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$$

ponto de observação $\left(x, y, z\right)$

vetor posição

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

produto escalar

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

Onda plana-1

solução

$$E_x(x,y,z) = E_{x0} \exp\left[-j\left(k_x x + k_y y + k_z z\right)\right]$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

$$E_x(x,y,z) = E_{x0} \exp\left(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\right)$$

Onda plana-2

solução no domínio do tempo

$$E_x(x,y,z) = E_{x0}\exp\left(-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right)$$

$$E_x(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left\{E_{x0}\exp\left(-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right)\exp\left(j\omega t\right)\right\}$$

$$\mathbf{k} = \left|\mathbf{k}\right|\hat{k}$$

$$E_x(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left\{E_{x0}\exp\left[j\omega\left(t - \frac{\left|\mathbf{k}\right|}{\omega}\hat{k}\cdot\mathbf{r}\right)\right]\right\}$$

$$E_x(x,y,z,t) = E_{x0}\cos\left[\omega\left(t - \frac{\left|\mathbf{k}\right|}{\omega}\hat{k}\cdot\mathbf{r}\right)\right]$$

Plano de fase constante-1

$$\text{instante } t = t_0 \text{ e } \omega$$

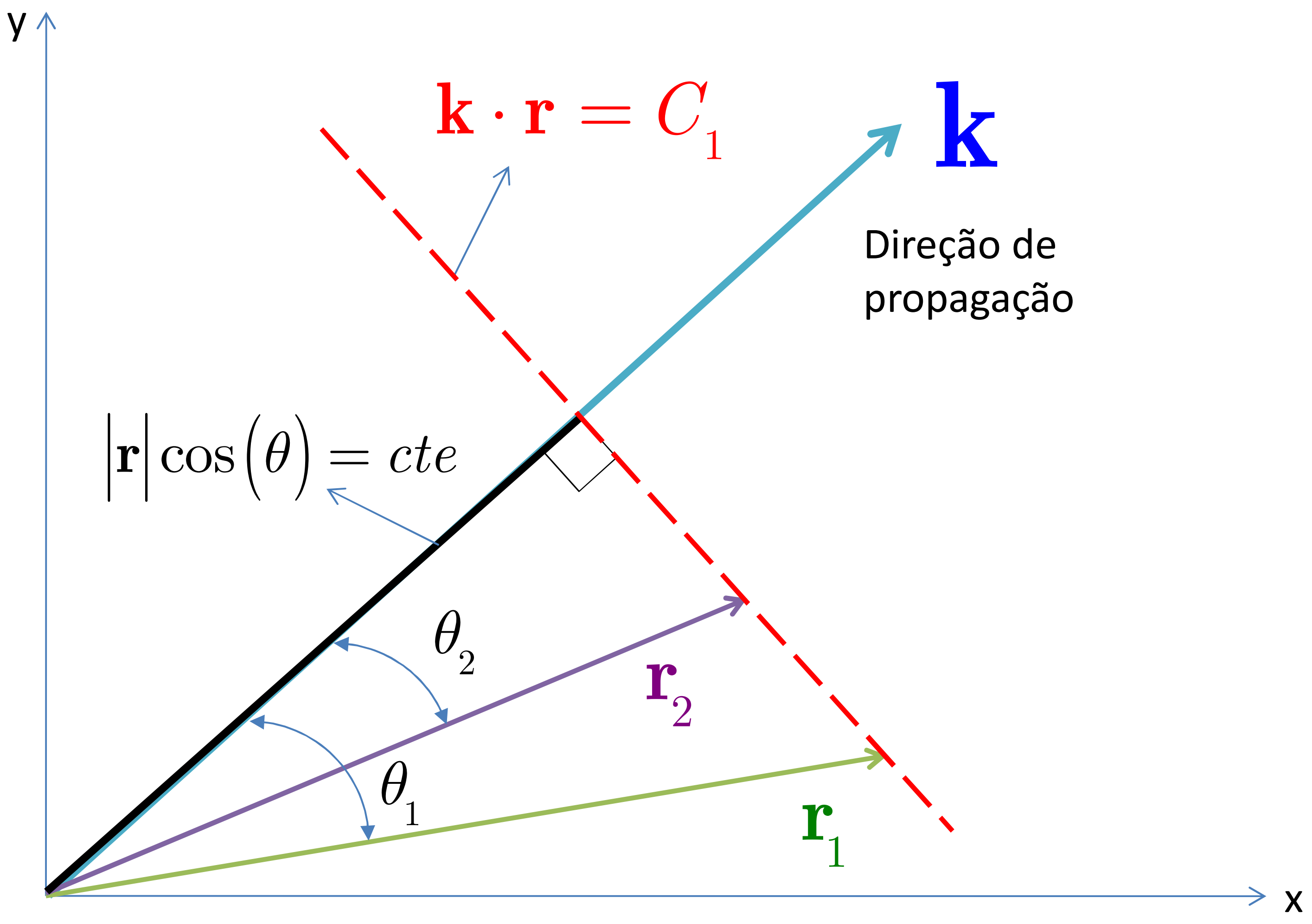
$$E_x(x,y,z,t) = E_{x0} \cos\left[\omega\left(t_0 - \frac{|\mathbf{k}|}{\omega}\hat{k}\cdot\mathbf{r}\right)\right]$$

$$\text{fase constante: } \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = cte \equiv C_1$$

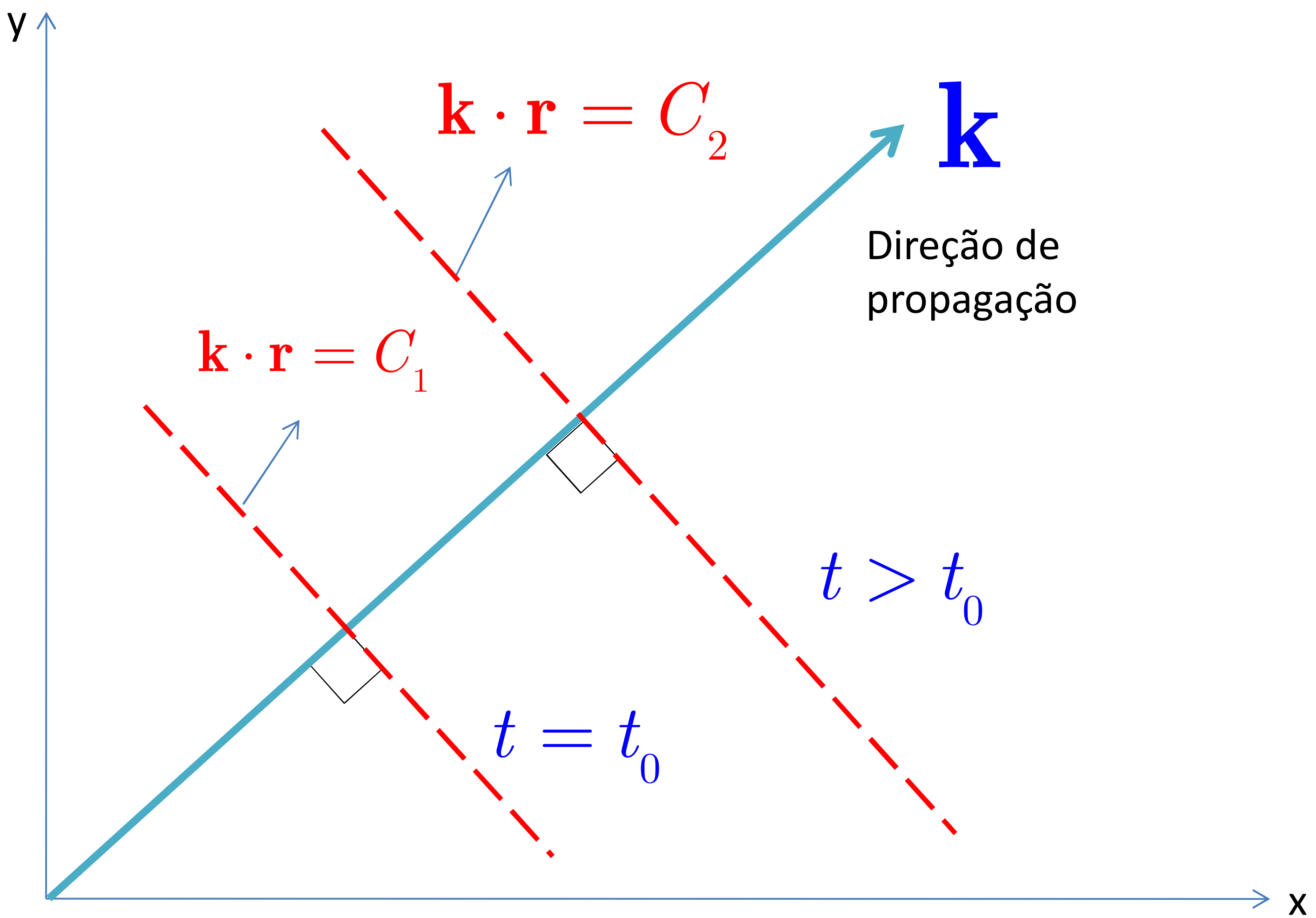
$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = |\mathbf{k}||\mathbf{r}|\cos(\theta) = C_1$$

$$|\mathbf{r}|\cos(\theta)\text{: projeção de } \mathbf{r} \text{ na direção } \hat{k}$$

Plano de fase constante-2



Plano de fase constante-3

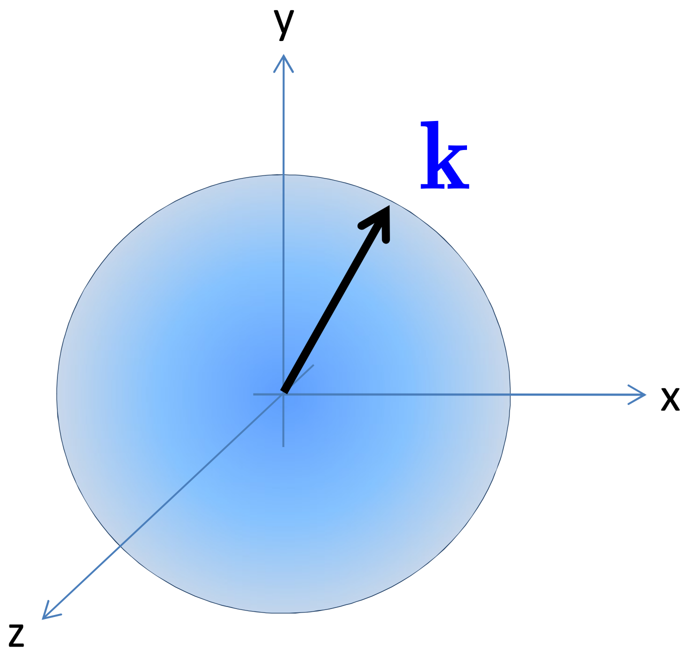


Vetor propagação

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \equiv k^2$$

esfera de raio $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

no sistema (x, y, z)



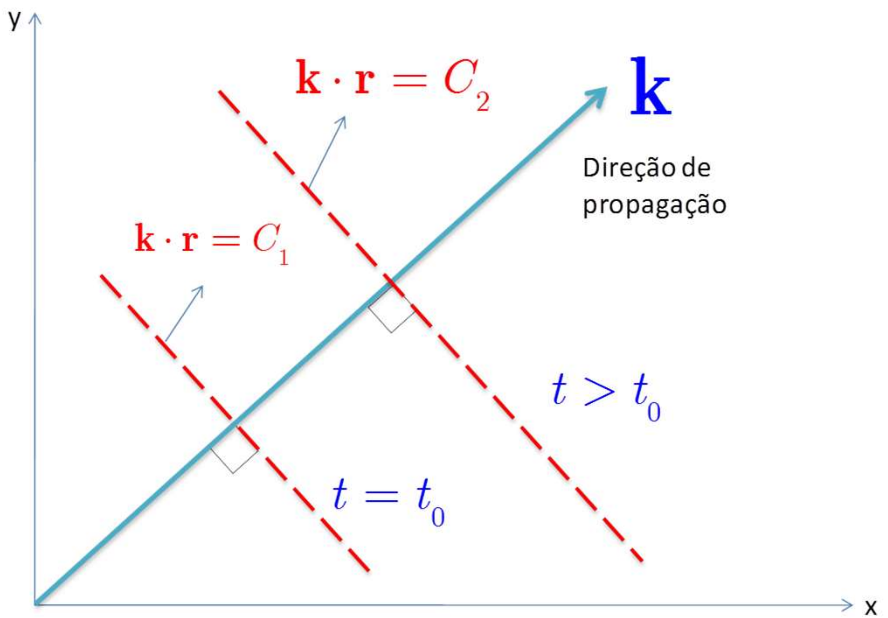
Onda plana uniforme

se a superfície de fase constante

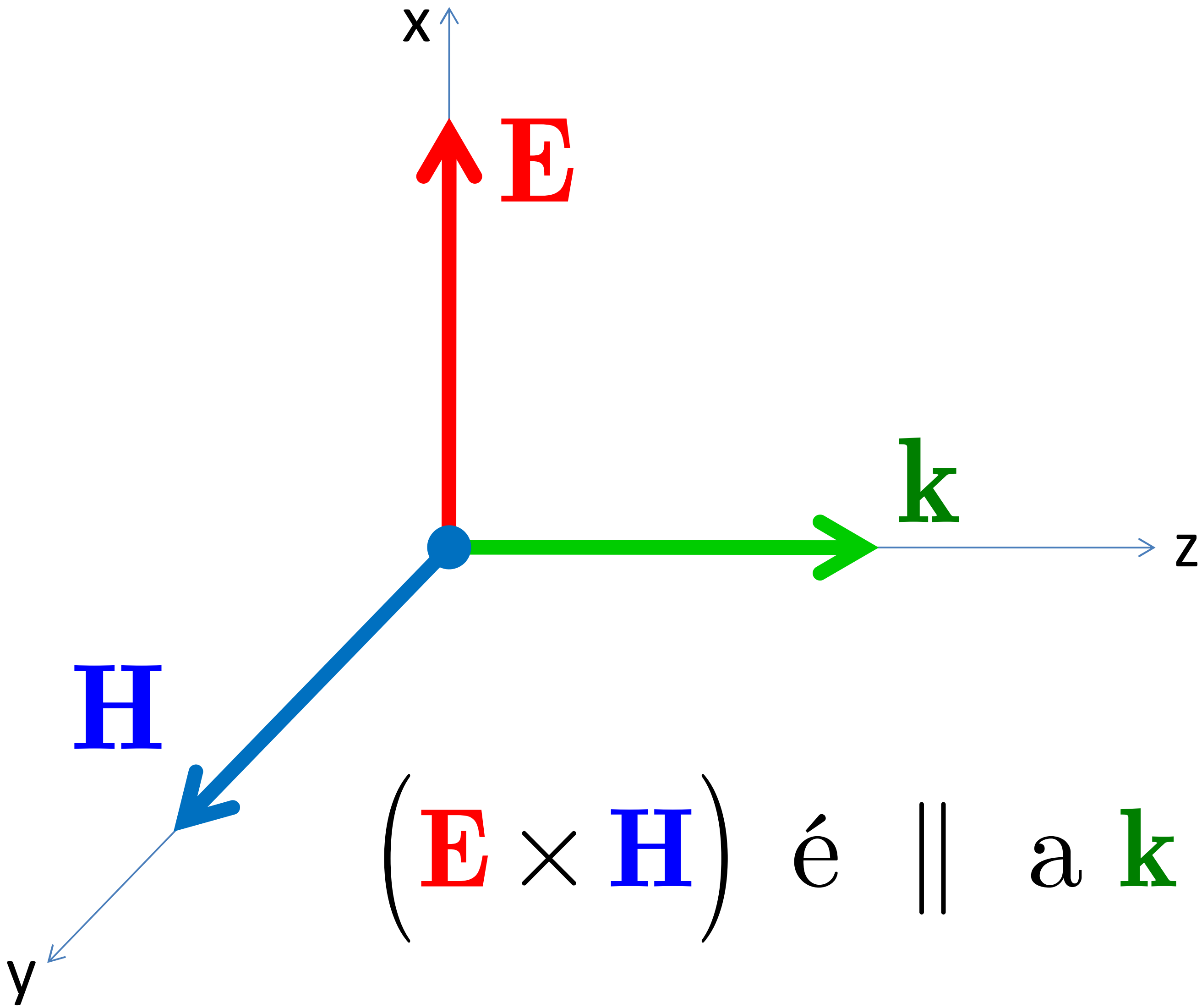
é um plano $\rightarrow$ onda plana

se o plano é também de

amplitude constante $\rightarrow$ onda plana uniforme



Ortogonalidade entre o vetores



$$\left(\mathbf{E} \times \mathbf{H}\right) \text{ é } \parallel \text{ a } \mathbf{k}$$

Impedância intrínseca do meio

$$\mathbf{E}(z) = \hat{x}E_{x0}\exp(-jk_z z)$$

$$\mathbf{H}(z) = \hat{y}\frac{k_z}{\omega\mu}E_{x0}\exp(-jk_z z)$$

$$\mathbf{H}(z) = \hat{y}\frac{1}{\eta}E_{x0}\exp(-jk_z z)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\text{: impedância intrínseca do meio}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\ \Omega$$

para onda plana

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} = \eta$$

Campos no domínio do tempo

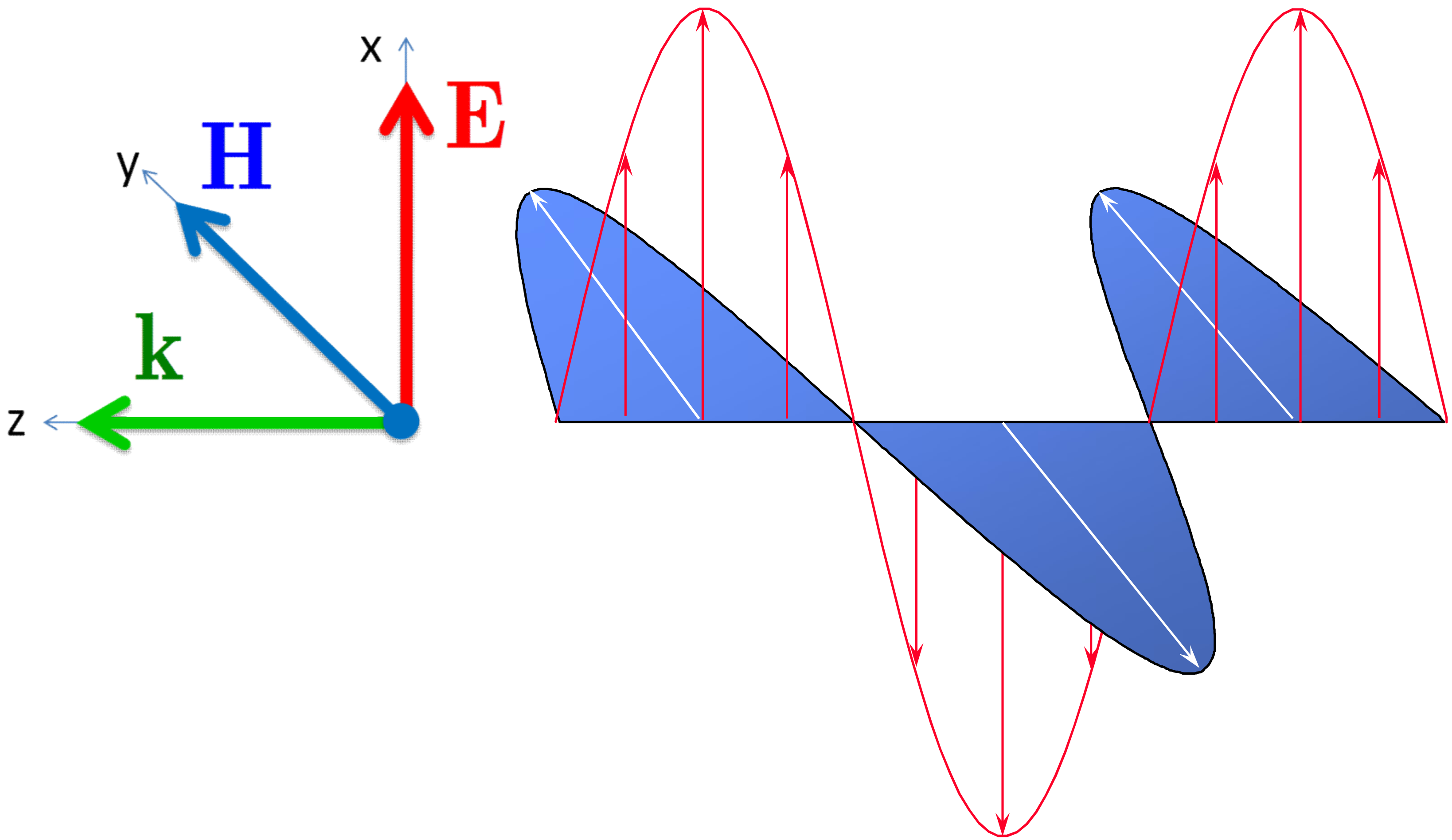
$$\mathbf{E}(z) = \hat{x} E_{x0} \exp(-jk_z z)$$

$$\mathbf{H}(z) = \hat{y} \frac{1}{\eta} E_{x0} \exp(-jk_z z)$$

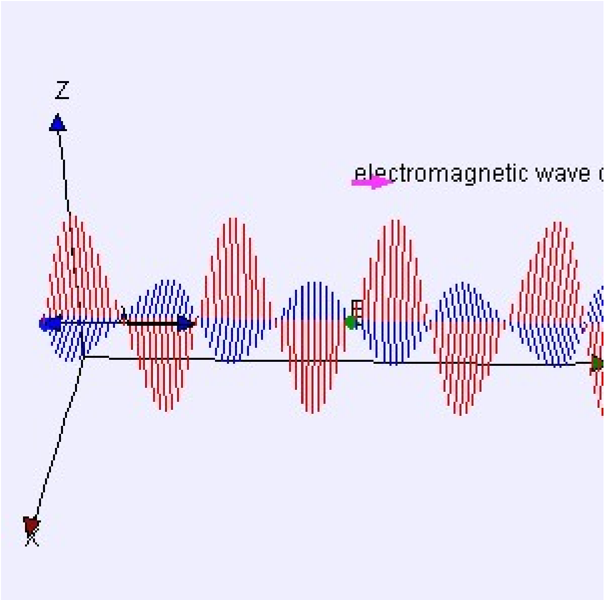
$$\mathbf{E}(z,t) = \mathrm{Re}\left\{ \hat{x} E_{x0} e^{-jk_z z} e^{j\omega t} \right\} = \hat{x} E_{x0} \cos(\omega t - k_z z)$$

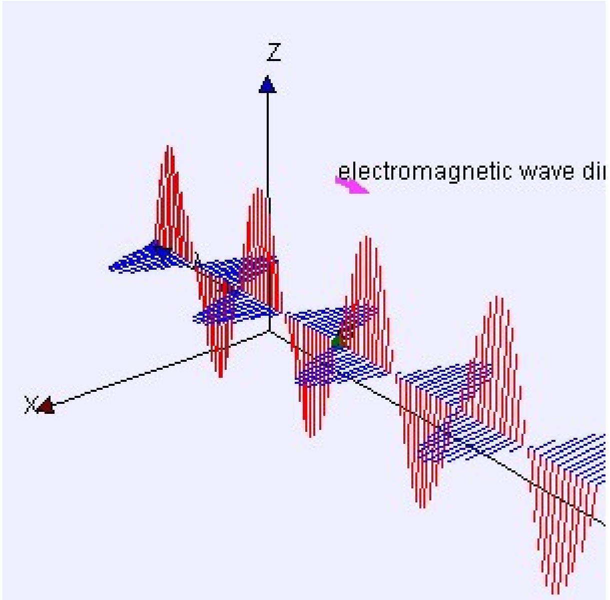
$$\mathbf{H}(z,t) = \mathrm{Re}\left\{ \hat{y} \frac{1}{\eta} E_{x0} e^{-jk_z z} e^{j\omega t} \right\} = \hat{y} \frac{E_{x0}}{\eta} \cos(\omega t - k_z z)$$

Onda plana-1



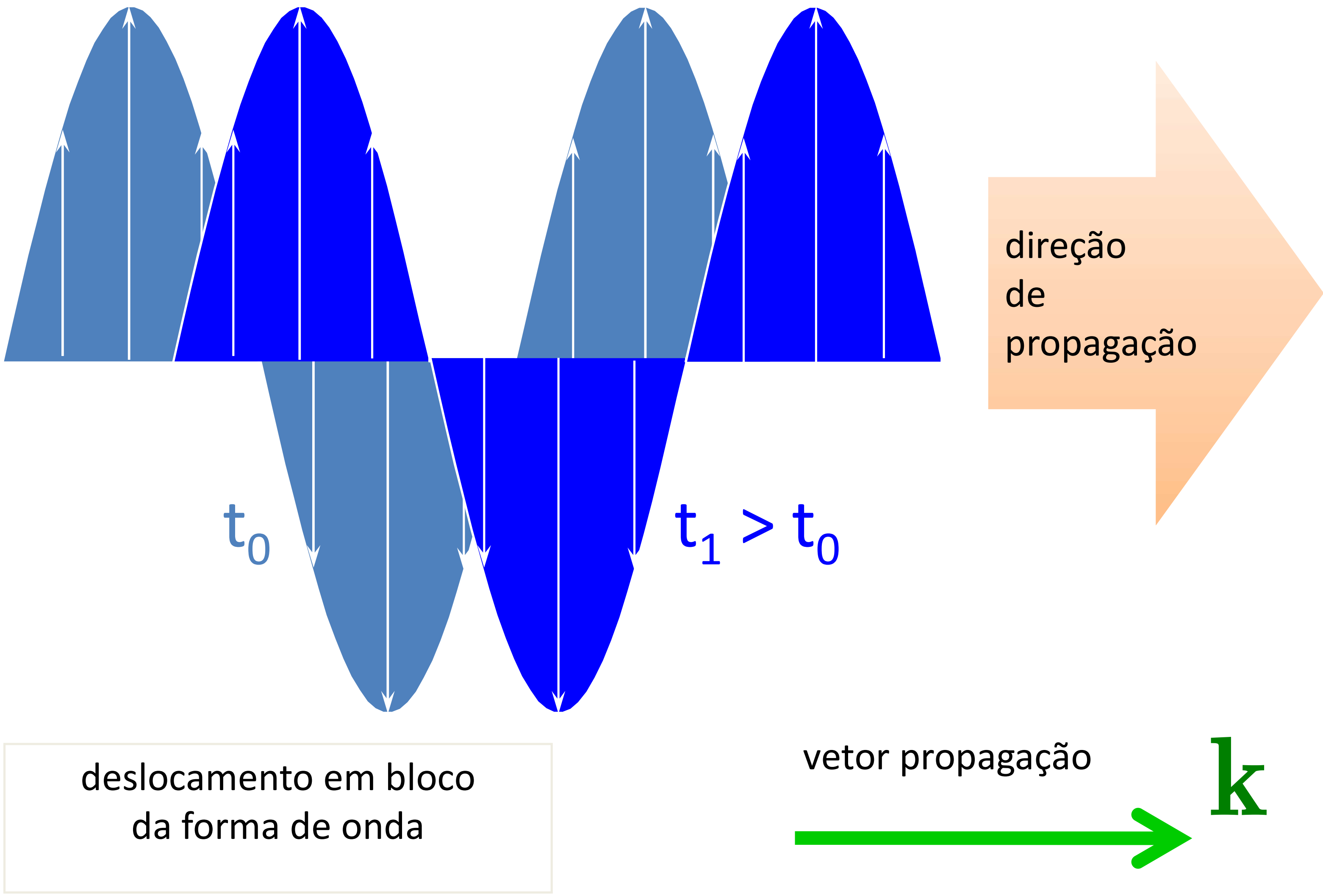
Onda plana-2





http://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnetic_radiation

Propagação da onda eletromagnética plana



EXTRAS

DETERMINAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ONDA

Equação de onda para **E**-1

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\nabla \times \mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\varepsilon\mathbf{E}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\left(\mathbf{J} + j\omega\varepsilon\mathbf{E}\right)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \omega^2\mu\varepsilon\mathbf{E} - j\omega\mu\mathbf{J}$$

Equação de onda para **E**-2

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{E} - j\omega\mu \mathbf{J}$$

identidade vetorial

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$$

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{E} - j\omega\mu \mathbf{J}$$

Equação de onda para **E**-3

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{E} - j\omega\mu \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon \mathbf{E} \right) = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

Equação de onda para **E**-4

$$\nabla\nabla\cdot\mathbf{E}-\nabla^2\mathbf{E}=\omega^2\mu\varepsilon\mathbf{E}-j\omega\mu\mathbf{J}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$$

equação da continuidade

$$\nabla\cdot\mathbf{J}+j\omega\rho=0$$

$$\rho=-\frac{\nabla\cdot\mathbf{J}}{j\omega}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=-\frac{\nabla\cdot\mathbf{J}}{j\omega\varepsilon}$$

Equação de onda para **E**-5

$$\nabla\nabla\cdot\mathbf{E}-\nabla^2\mathbf{E}=\omega^2\mu\varepsilon\mathbf{E}-j\omega\mu\mathbf{J}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=-\frac{\nabla\cdot\mathbf{J}}{j\omega\varepsilon}$$

$$-\nabla\left(\frac{\nabla\cdot\mathbf{J}}{j\omega\varepsilon}\right)-\nabla^2\mathbf{E}=-j\omega\mu\mathbf{J}+\omega^2\mu\varepsilon\mathbf{E}$$

$$\left(\nabla^2+\omega^2\mu\varepsilon\right)\mathbf{E}=j\omega\mu\mathbf{J}-\nabla\left(\frac{\nabla\cdot\mathbf{J}}{j\omega\varepsilon}\right)$$

equação de onda para **E**

Equação de onda para **H**-1

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\varepsilon\mathbf{E}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} + j\omega\varepsilon\nabla \times \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} + j\omega\varepsilon\left(-j\omega\mu\mathbf{H}\right)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} + \omega^2\mu\varepsilon\mathbf{H}$$

Equação de onda para **H**-2

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} + \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{H}$$

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} + \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{H}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mu \mathbf{H} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \text{ para } \mu = 0$$

$$\left(\nabla^2 + \omega^2 \mu \varepsilon\right) \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J}$$

equação de onda para **H**

ORTOGONALIDADE ENTRE OS VETORES

Equações de Maxwell e onda plana-1

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{E}\left(x,y,z\right)\\ \mathbf{H}\left(x,y,z\right)\end{array}\right\} = \left.\begin{array}{l}\mathbf{E}_0\\ \mathbf{H}_0\end{array}\right\}\exp\left(-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right)$$

rotacional de $\mathbf{E}\left(x,y,z\right)$

$$\nabla\times\mathbf{E}\left(x,y,z\right) = \nabla\times\mathbf{E}_0\exp\left[-j\left(k_x x + k_y y + k_z z\right)\right]$$

$$\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\mathbf{E}\left(x,y,z\right) =$$

$$-j\left(k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}\right)\times\mathbf{E}\left(x,y,z\right)$$

$$\nabla\times\mathbf{E}\left(x,y,z\right) = -j\mathbf{k}\times\mathbf{E}\left(x,y,z\right)$$

Equações de Maxwell e onda plana-2

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}(x,y,z)\\ \mathbf{H}(x,y,z)\end{aligned}\right\} = \left.\begin{aligned}\mathbf{E}_0\\ \mathbf{H}_0\end{aligned}\right\} \exp\left(-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right)$$

$$\text{divergente de } \mathbf{E}(x,y,z)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(x,y,z) = \nabla\cdot\mathbf{E}_0 \exp\left[-j\left(k_x x + k_y y + k_z z\right)\right]$$

$$\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\mathbf{E}(x,y,z) =$$

$$-j\left(k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}\right)\cdot\mathbf{E}(x,y,z)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(x,y,z) = -j\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}(x,y,z)$$

Equações de Maxwell e onda plana-3

região sem fontes

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B};\ \nabla \times \mathbf{H} = -j\omega\mathbf{D}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0;\ \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E}\left(x, y, z\right) = -j\mathbf{k} \times \mathbf{E}\left(x, y, z\right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}\left(x, y, z\right) = -j\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}\left(x, y, z\right)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mathbf{B}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega\mathbf{D}$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0$$

Equações de Maxwell e onda plana-4

região sem fontes e meio isotrópico

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \;;\; \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D}$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \;;\; \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0 \rightarrow \mathbf{k} \cdot \varepsilon \mathbf{E} = 0 \rightarrow \varepsilon \left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} \right) = 0$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{k} \cdot \mu \mathbf{H} = 0 \rightarrow \mu \left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} \right) = 0$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \rightarrow \mathbf{E} \text{ é } \perp \text{ a } \mathbf{k}$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \rightarrow \mathbf{H} \text{ é } \perp \text{ a } \mathbf{k}$$

Equações de Maxwell e onda plana-5

região sem fontes e meio isotrópico

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}=0\rightarrow\mathbf{E}\text{ é }\perp\text{ a }\mathbf{k}$$

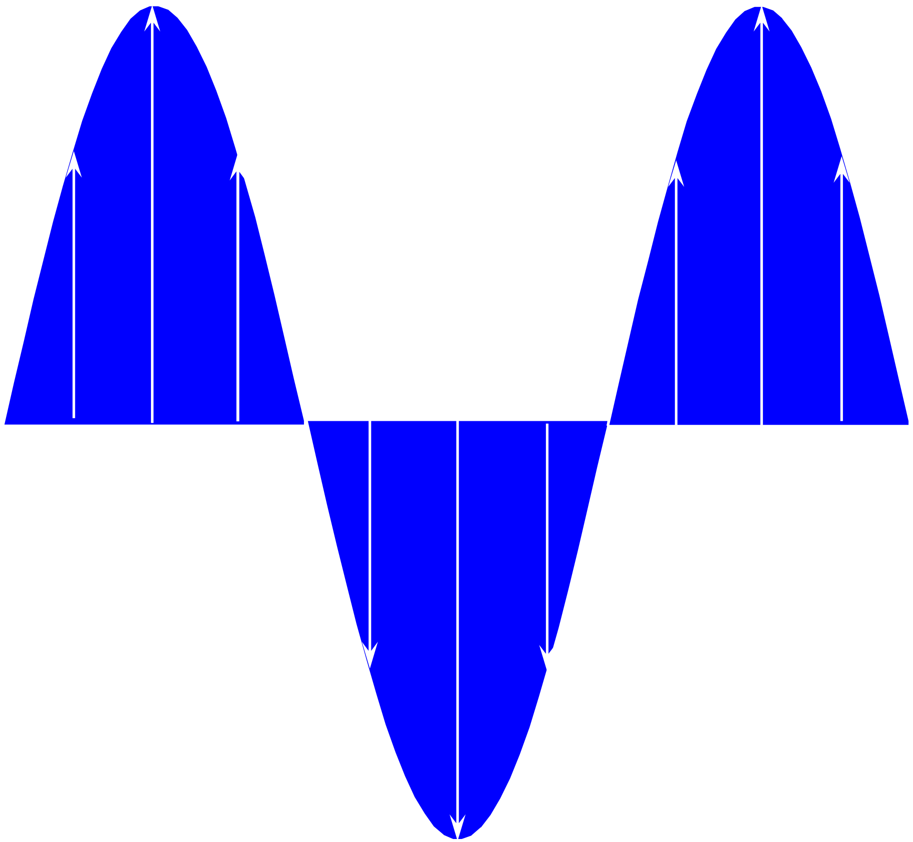
$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{H}=0\rightarrow\mathbf{H}\text{ é }\perp\text{ a }\mathbf{k}$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{E}=\omega\mu\mathbf{H}\rightarrow\left(\mathbf{k}\times\mathbf{E}\right)\text{ é }\parallel\text{ a }\mathbf{H}$$

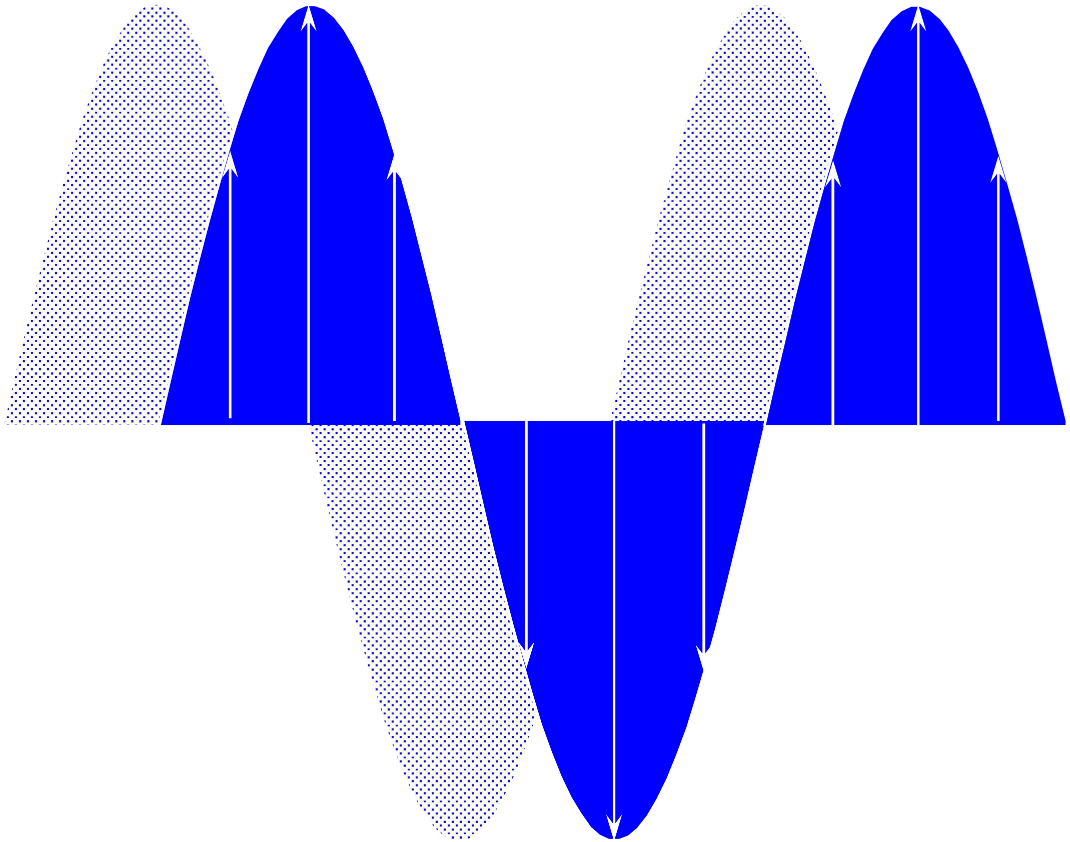
$$\mathbf{k}\times\mathbf{H}=-\omega\varepsilon\mathbf{E}\rightarrow\left(\mathbf{k}\times\mathbf{H}\right)\text{ é anti-}\parallel\text{ a }\mathbf{E}$$

PROPAGAÇÃO DA EQUAÇÃO DE ONDA

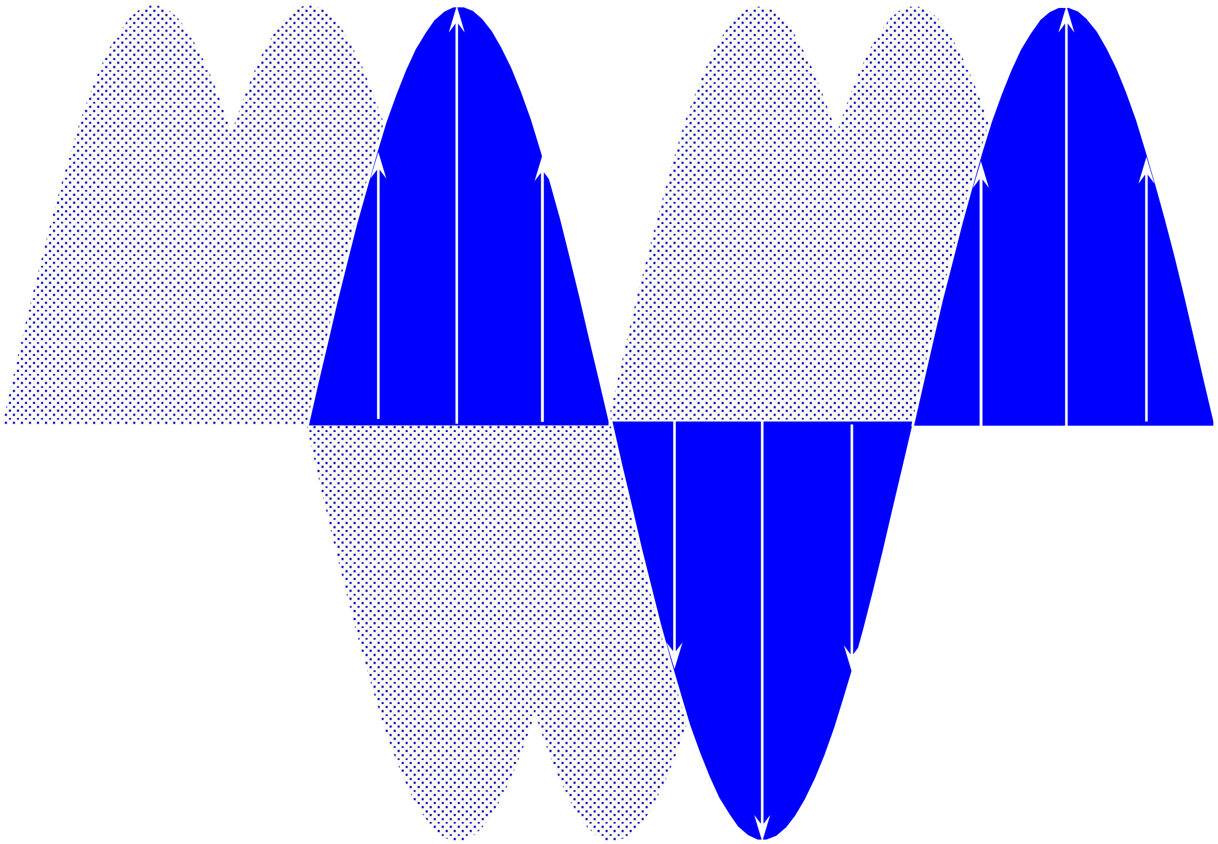
Deslocamento da onda plana



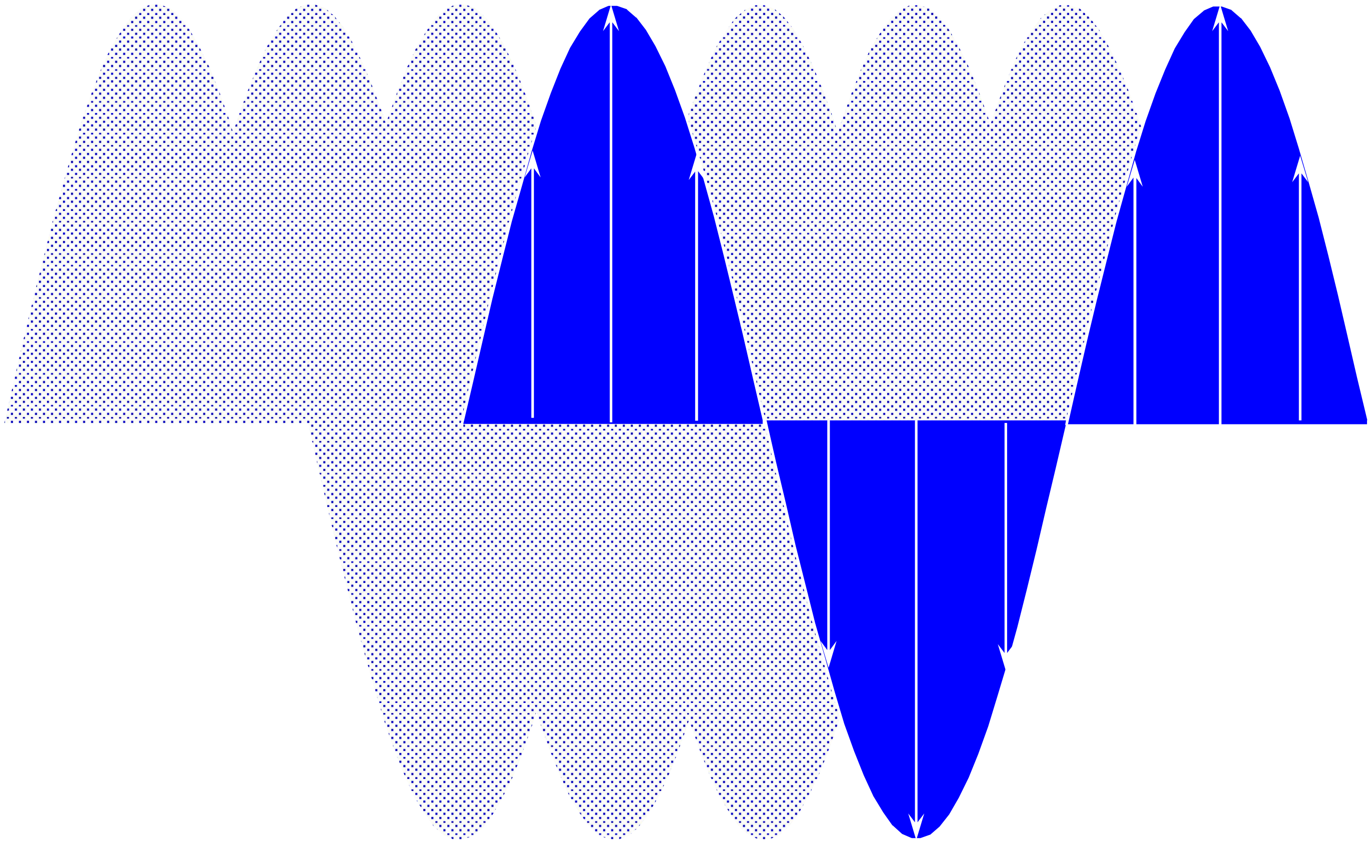
Deslocamento da onda plana



Deslocamento da onda plana



Deslocamento da onda plana



Deslocamento da onda plana