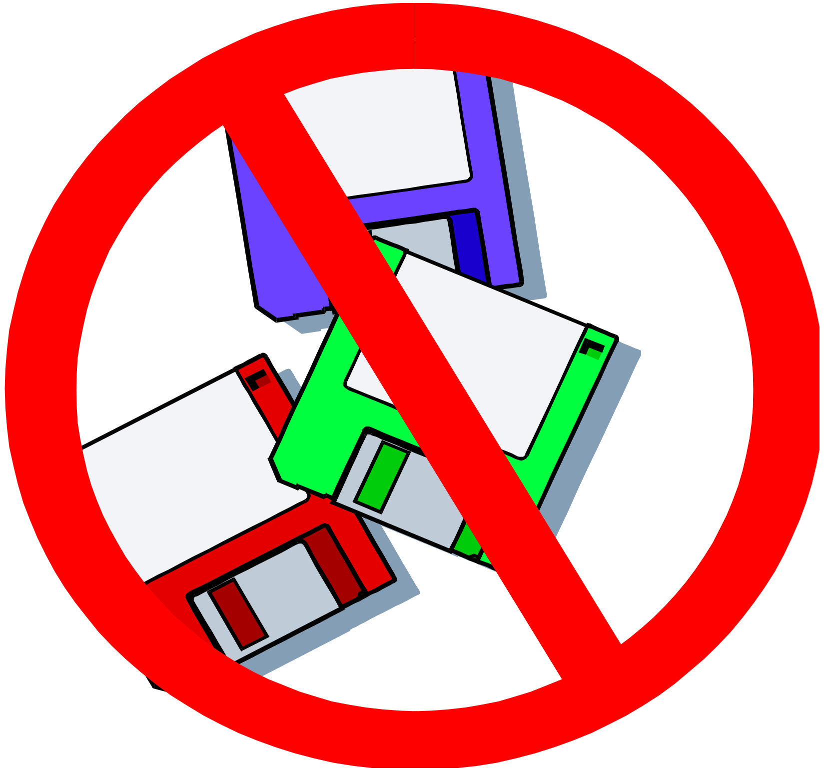
Equações de Maxwell

SEL 413 Telecomunicações

Amílcar Careli César
Departamento de Engenharia Elétrica da EESC-USP

Atenção!

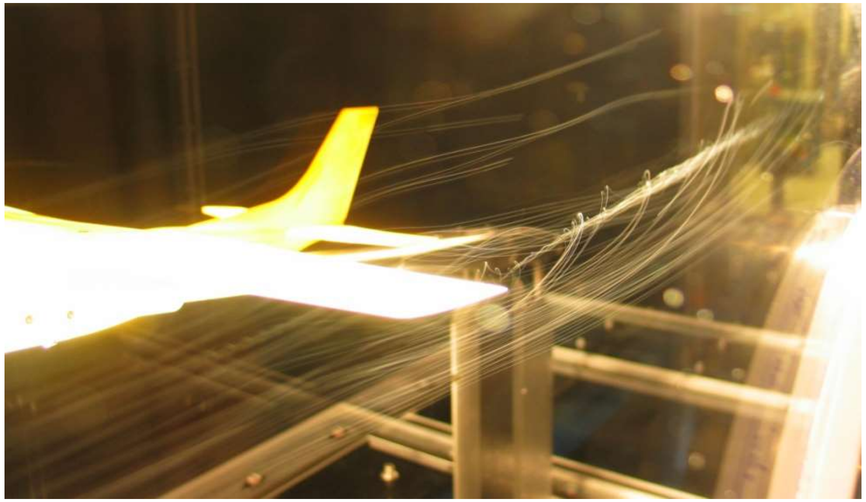


- Este material didático é planejado para servir de apoio às aulas de SEL-310 E SEL-612: Ondas Eletromagnéticas, oferecida aos alunos regularmente matriculados no curso de engenharia de computação.
- Não são permitidas a reprodução e/ou comercialização do material.
- solicitar autorização ao docente para qualquer tipo de uso distinto daquele para o qual foi planejado.

Campo vetorial-1

Objetivo: modelagem, representação de fenômeno

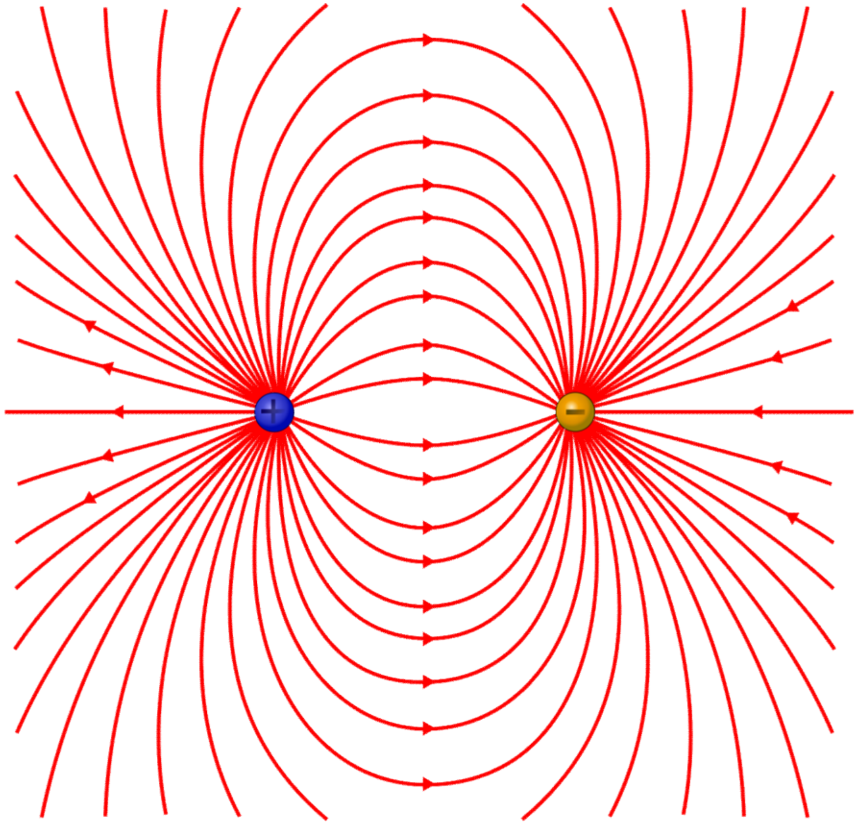
Velocidade e direção de fluido em movimento pelo espaço
Módulo (intensidade, magnitude) e direção de força gravitacional, elétrica, magnética

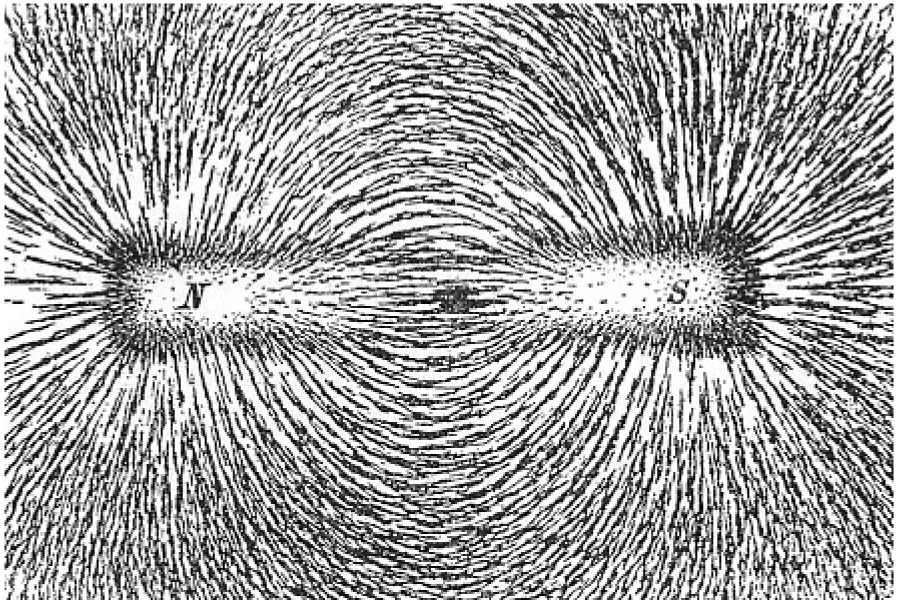


Modelo Cessna 182 em túnel de vento

Vórtice produzido avião

Linhas de campo



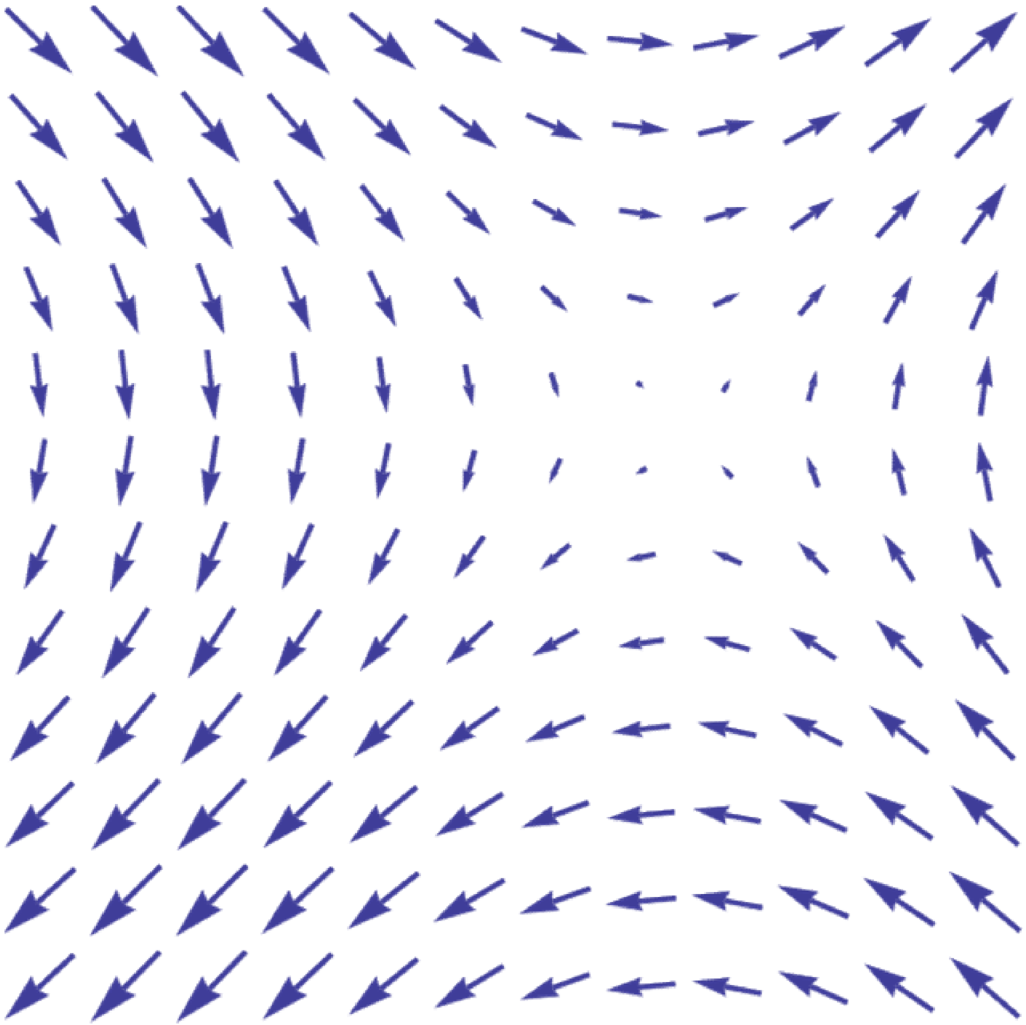


1 C → carga de $6{,}241\times10^{18}$ elétrons

Elétrico1 elétrico2

magnético

Campo vetorial-1



Coleção de setas com magnitude e direção
Cada uma associada a um ponto do plano

http://en.wikipedia.org/wiki/Vector_field

Lei de Faraday

Campo magnético variante cria (induz) campo elétrico

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$\mathbf{E}$: vetor campo elétrico, $\mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1}$

$\mathbf{B}$: vetor densidade de fluxo magnético, $\mathrm{Wb} \cdot \mathrm{m}^{-2}$

animação1, animação2

Lei de Ampère

Campo magnético é gerado por corrente ou por campo variante

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$\mathbf{J}$: vetor densidade de corrente, $\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-2}$

$\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$: vetor densidade de corrente de deslocamento, $\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-2}$

http://en.wikipedia.org/wiki/Andr%C3%A9-Marie_Amp%C3%A8re

Lei de Gauss (elétrica)

Relação entre cargas elétricas e campo elétrico.

O número de linhas de campo determina

a carga total contida no volume.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$\mathbf{D}$: vetor densidade de fluxo elétrico, $\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-2}$

ρ : densidade volumétrica de cargas, $\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-3}$

animação

Lei de Gauss (magnética)

Não há carga magnética.
Fluxo magnético total
através da superfície é zero.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$\mathbf{B}$: vetor densidade de fluxo magnético, $\mathrm{Wb} \cdot \mathrm{m}^{-2}$

http://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss

Equações de Maxwell

Lei de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Lei de Ampere

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Lei de Gauss (elétrica)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

Lei de Gauss (magnética)

$$\nabla \cdot \overline{B} = 0$$

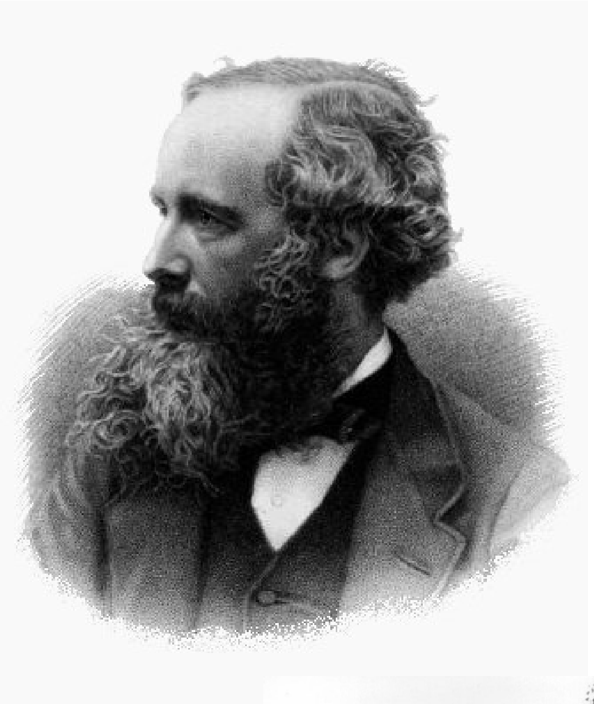
animação

Equações de Maxwell

Símbolo	Descrição	Unidade
$\bar{E}$	Vetor campo elétrico	volt/metro (V/m)
$\bar{H}$	Vetor campo magnético	ampere/metro (A/m)
$\bar{D}$	Vetor densidade de fluxo elétrico	coulomb/metro^2 (C/m^2)
$\bar{B}$	Vetor densidade de fluxo magnético	weber/metro^2 (Wb/m^2)
$\bar{J}$	Vetor densidade de corrente	ampere/metro^2 (A/m^2)
ρ	Densidade volumétrica de cargas	coulomb/metro^3 (C/m^3)

Equações de Maxwell

- James Clerk Maxwell
- Nascimento: 13 junho de 1831, em Edinburgh, Escócia
- Falecimento: 5 novembro de 1879, em Cambridge
- Docente em
  - Marischal College, Aberdeen
  - King´s College, London
  - Cambridge University



Parton Chuchyard

Gleinlair

Campos Variantes no Tempo

Campos variantes no tempo; excitação de freqüência única

$$\mathbf{F}\left(x, y, z, t\right) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{F}(x, y, z)\exp(j\omega t)\right\}$$

$\mathbf{F}(x, y, z)$ representa qualquer um dos vetores relacionados nas equações de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\mathbf{D}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \to j\omega$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

Relações Constitutivas

para um meio isotrópico

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$ vetor densidade de fluxo elétrico

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$ vetor densidade de fluxo magnético

ε permissividade dielétrica

μ permeabilidade magnética

vácuo

$$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$$ F/m

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$$ H/m

Campos Estáticos

$\partial / \partial t = 0$ elimina a dependência temporal

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

governam o comportamento dos campos eletrostáticos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{D}$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

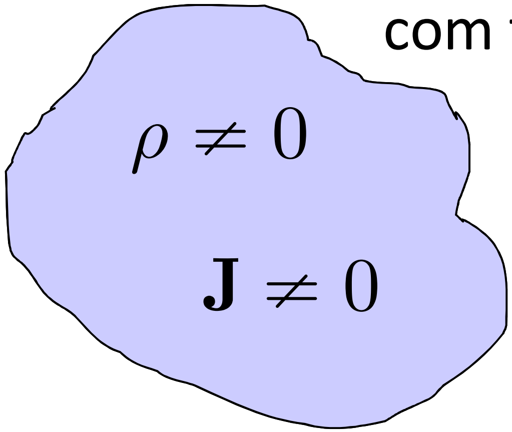
governam o comportamento dos campos magnetostáticos $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$

Região sem Fontes

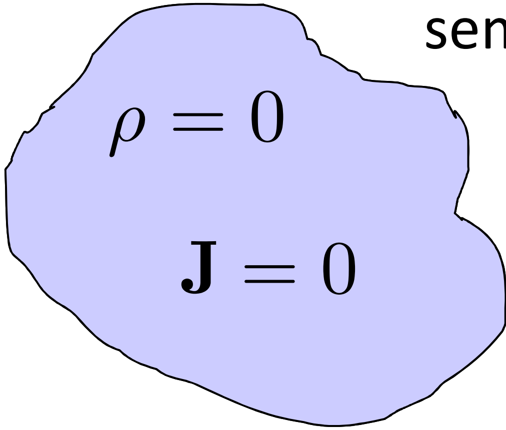
$\rho = 0$ e $\mathbf{J} = 0$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$



com fontes



sem fontes

Meio isotrópico, região sem fontes, regime senoidal-1

Fator de variação temporal: $\exp(j\omega t)$

Fator de variação espacial: $\exp(-jk_z z)$

Região sem fontes: $\rho = 0; \mathbf{J} = 0$

Meio isotrópico: $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$

Os campos são da forma

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left[F_x(x,y)\hat{x} + F_y(x,y)\hat{y} + F_z(x,y)\hat{z} \right] e^{-jk_z z}$$

Determinação de **H** a partir de **E**

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\nabla \times \mathbf{E}}{-j\omega\mu}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

analogamente

$$\mathbf{E} = \frac{\nabla \times \mathbf{H}}{j\omega\varepsilon}$$

Vetor de Poynting

$$\mathbf{S}(x,y,z,t) = \mathbf{E}(x,y,z,t) \times \mathbf{H}(x,y,z,t),\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$$

$$\mathbf{E}(x,y,z,t)\ :\ \text{vetor campo elétrico},\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$$

$$\mathbf{H}(x,y,z,t)\ :\ \text{vetor campo magnético},\ \mathrm{A \cdot m^{-1}}$$

Vetor de Poynting complexo

$$\mathbf{S}(x,y,z) = \mathbf{E}(x,y,z) \times \mathbf{H}^{*}(x,y,z), \ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$$

$\mathbf{E}(x,y,z)$: vetor campo elétrico fasorial, $\mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1}$

$\mathbf{H}^{*}(x,y,z)$: vetor campo magnético fasorial, $\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-1}$

$*$: complexo conjugado

Valor médio do vetor de Poynting-1

$$< \mathbf{S}(x,y,z,t) >= \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{E}(x,y,z,t) \times \mathbf{H}(x,y,z,t)dt$$

$\mathbf{E}(x,y,z,t)$: vetor campo elétrico, $\mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1}$

$\mathbf{H}^*(x,y,z,t)$: vetor campo magnético, $\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-1}$

$\left[< \mathbf{S}(x,y,z,t) >\right]$: $\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$

Valor médio do vetor de Poynting-2

$$< \mathbf{S}(x,y,z,t) > = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}(x,y,z)\times\mathbf{H}^{*}(x,y,z)\right\}$$

$\mathbf{E}(x,y,z)$: vetor campo elétrico fasorial, $\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}^{-1}$

$\mathbf{H}^{*}(x,y,z)$: vetor campo magnético fasorial, $\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}^{-1}$

$\left[< \mathbf{S}(x,y,z,t) >\right]$: $\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}$

Referências

- ✓ Livro: Equações de Maxwell
  - http://en.wikipedia.org/wiki/Book:Maxwell%27s_equations
- ✓ Math Insight
  - http://mathinsight.org/curl_components
- ✓ PhET
- ✓ http://phet.colorado.edu/
- ✓ Wolfram Alpha
  - http://www.wolframalpha.com/

Equações vetoriais e escalares

EXTRAS

Equações de Maxwell-2

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

Equações de Maxwell-3

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x + \frac{\partial D_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y + \frac{\partial D_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}$$

Equações de Maxwell-4

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Equações de Maxwell-5

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho$$