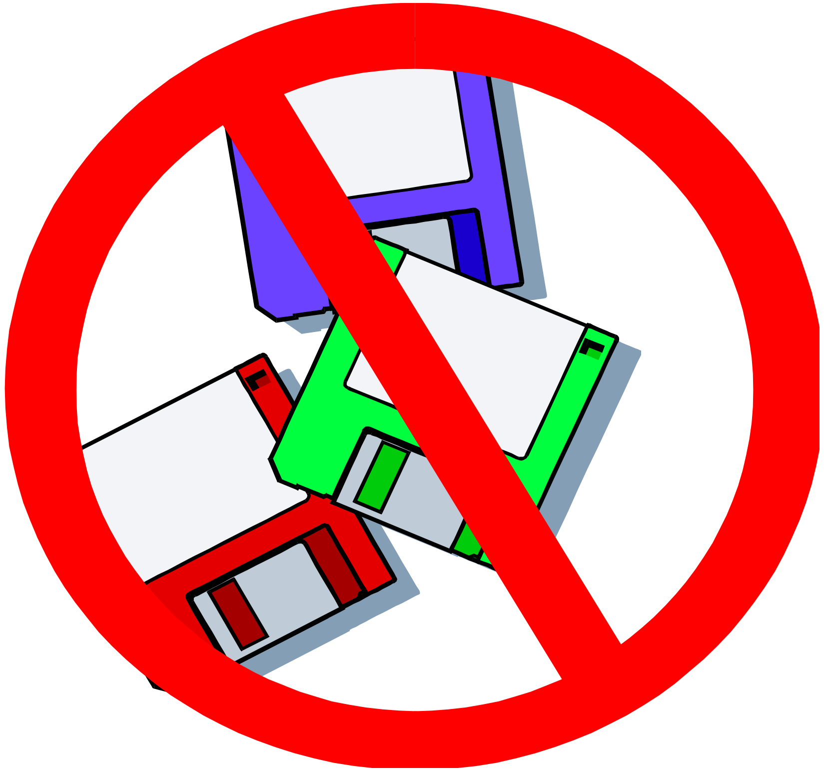
# Fundamentos
# Vetores Complexos

SEL 310/612 Ondas Eletromagnéticas

Amílcar Careli César
Departamento de Engenharia Elétrica da EESC-USP

# Atenção!

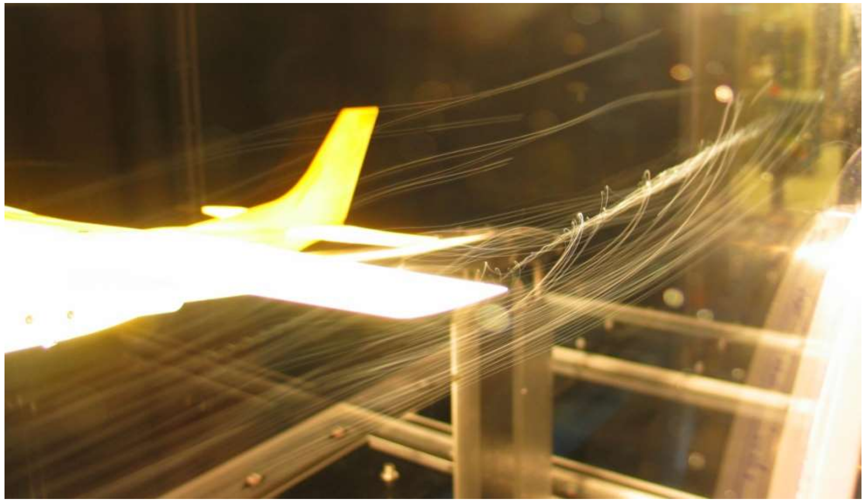


- Este material didático é planejado para servir de apoio às aulas de SEL-310 E SEL-612: Ondas Eletromagnéticas, oferecida aos alunos regularmente matriculados no curso de engenharia de computação.
- Não são permitidas a reprodução e/ou comercialização do material.
- solicitar autorização ao docente para qualquer tipo de uso distinto daquele para o qual foi planejado.

# Campo vetorial: Exemplos

Objetivo: modelagem, representação de fenômeno

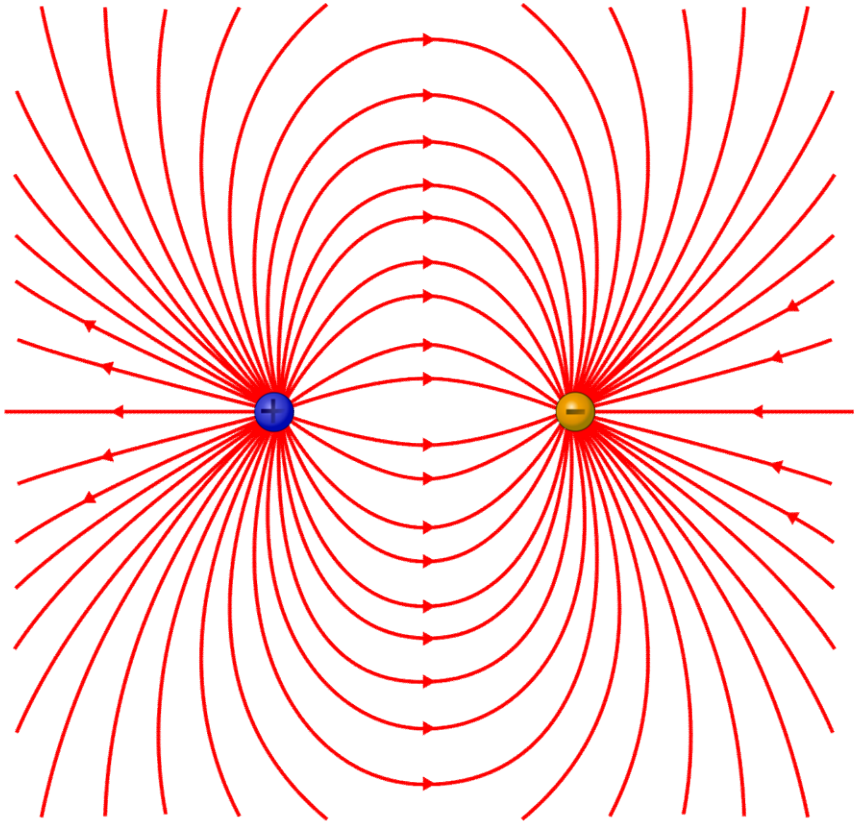
Velocidade e direção de fluido em movimento pelo espaço
Intensidade (magnitude) e direção de força gravitacional, elétrica, magnética

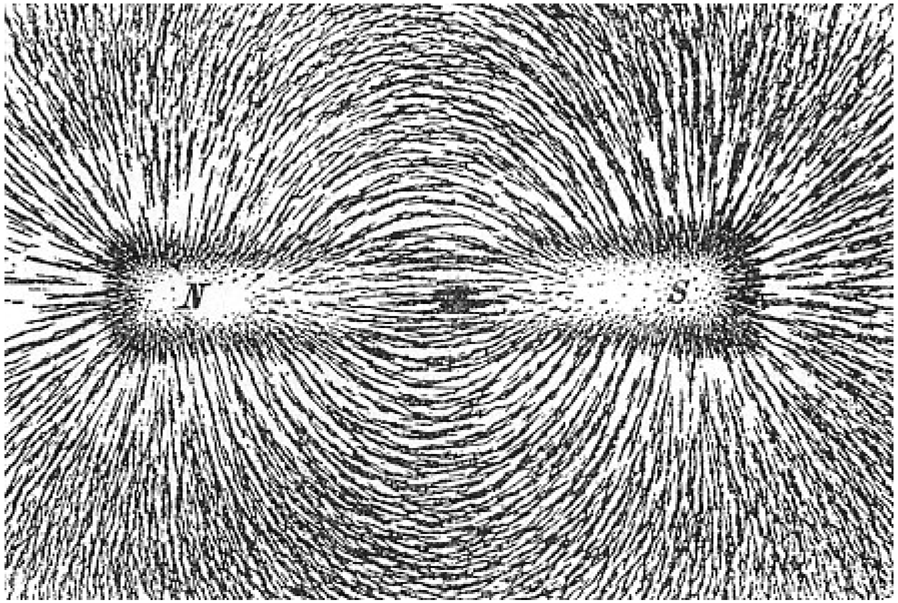


Modelo Cessna 182 em túnel de vento

Vórtice produzido avião

# Linhas de campo

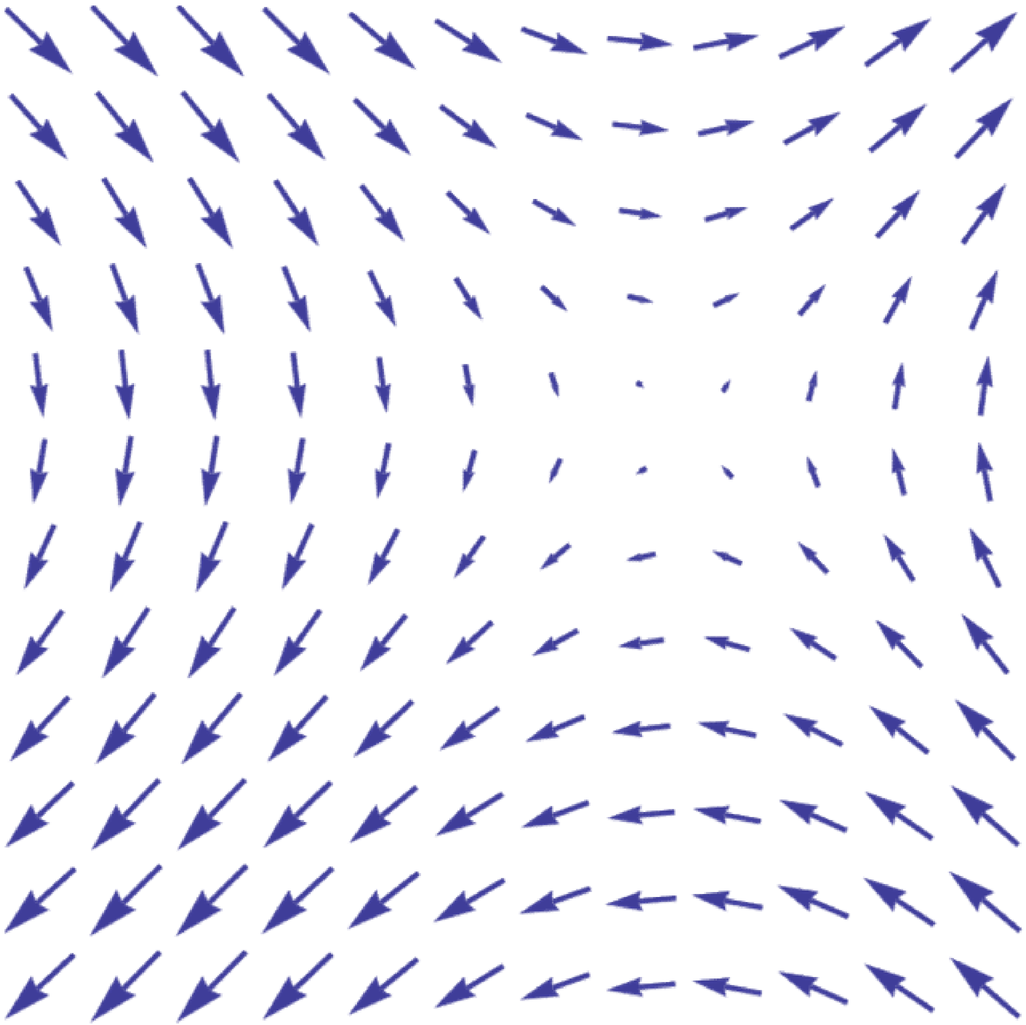





1 C $\rightarrow$ carga de $6{,}241\times10^{18}$ elétrons

[elétrico] [magnético]

# Campo vetorial



Coleção de setas com magnitude e direção
Cada uma associada a um ponto do plano

http://en.wikipedia.org/wiki/Vector_field

# Vetor real e complexo

$$\bar{V}(t) = V_x \cos(\omega t + \phi_x)\hat{x} + V_y \cos(\omega t + \phi_y)\hat{y} + V_z \cos(\omega t + \phi_z)\hat{z}$$

A representação complexa deste vetor é

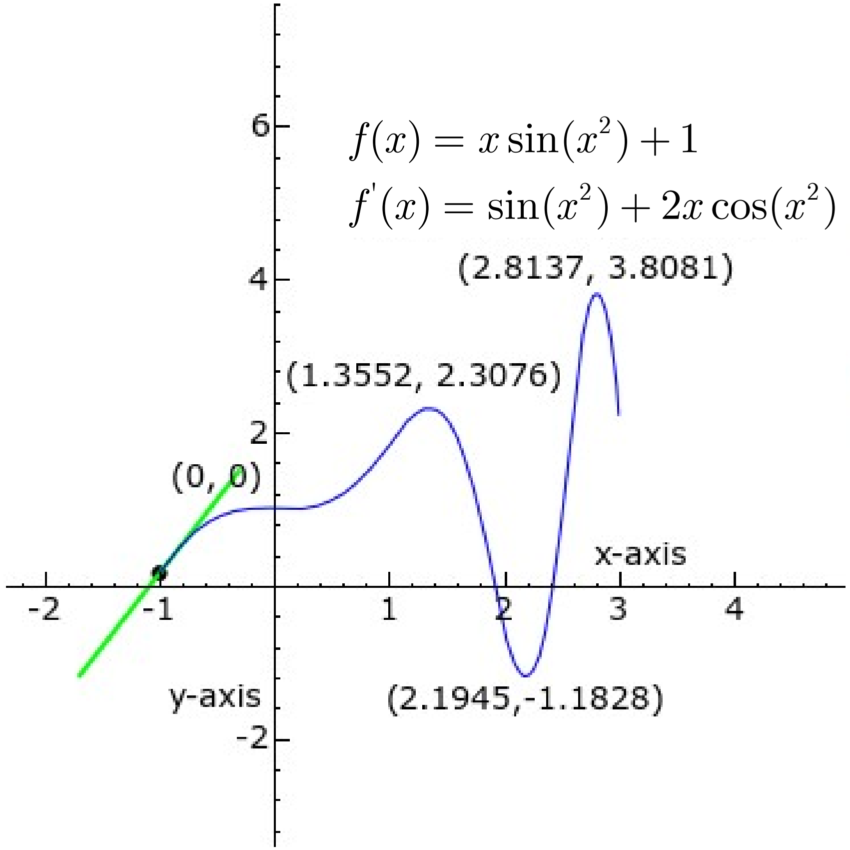
$$\overline{V}(t) = \mathrm{Re}\{[V_x \exp(j\phi_x)\hat{x} + V_y \exp(j\phi_y)\hat{y} + V_z \exp(j\phi_z)\hat{z}]\exp(j\omega t)\}$$

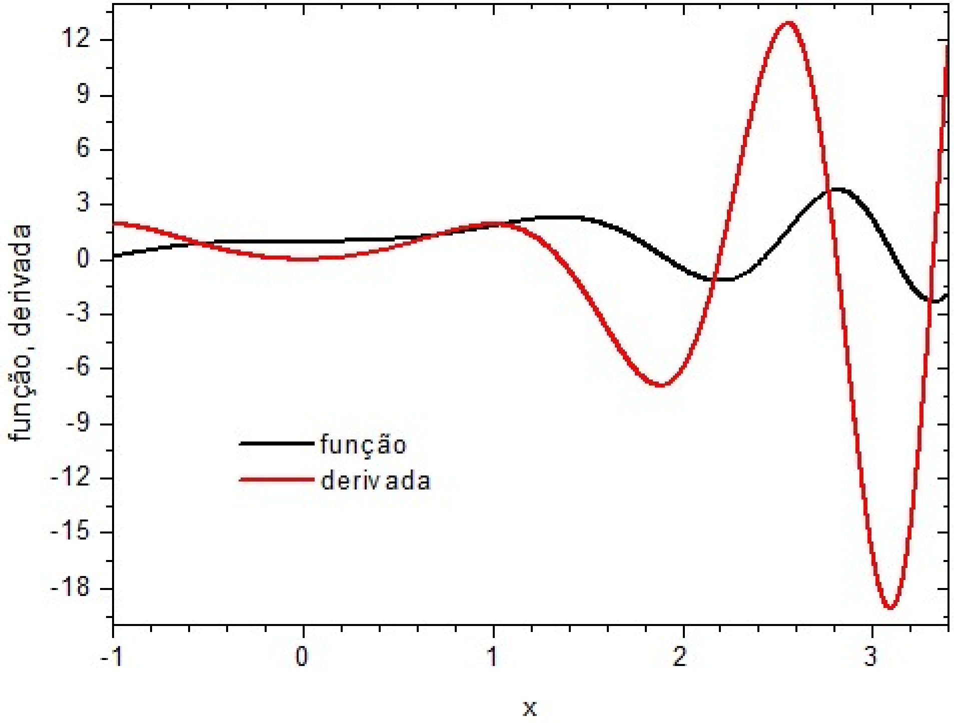
$$\bar{V}(t) = \mathrm{Re}\{\bar{V} \exp(j\omega t)\}$$

$$\bar{V} = V_x \exp(j\phi_x)\hat{x} + V_y \exp(j\phi_y)\hat{y} + V_z \exp(j\phi_z)\hat{z}$$

vetor complexo

# Função e derivada

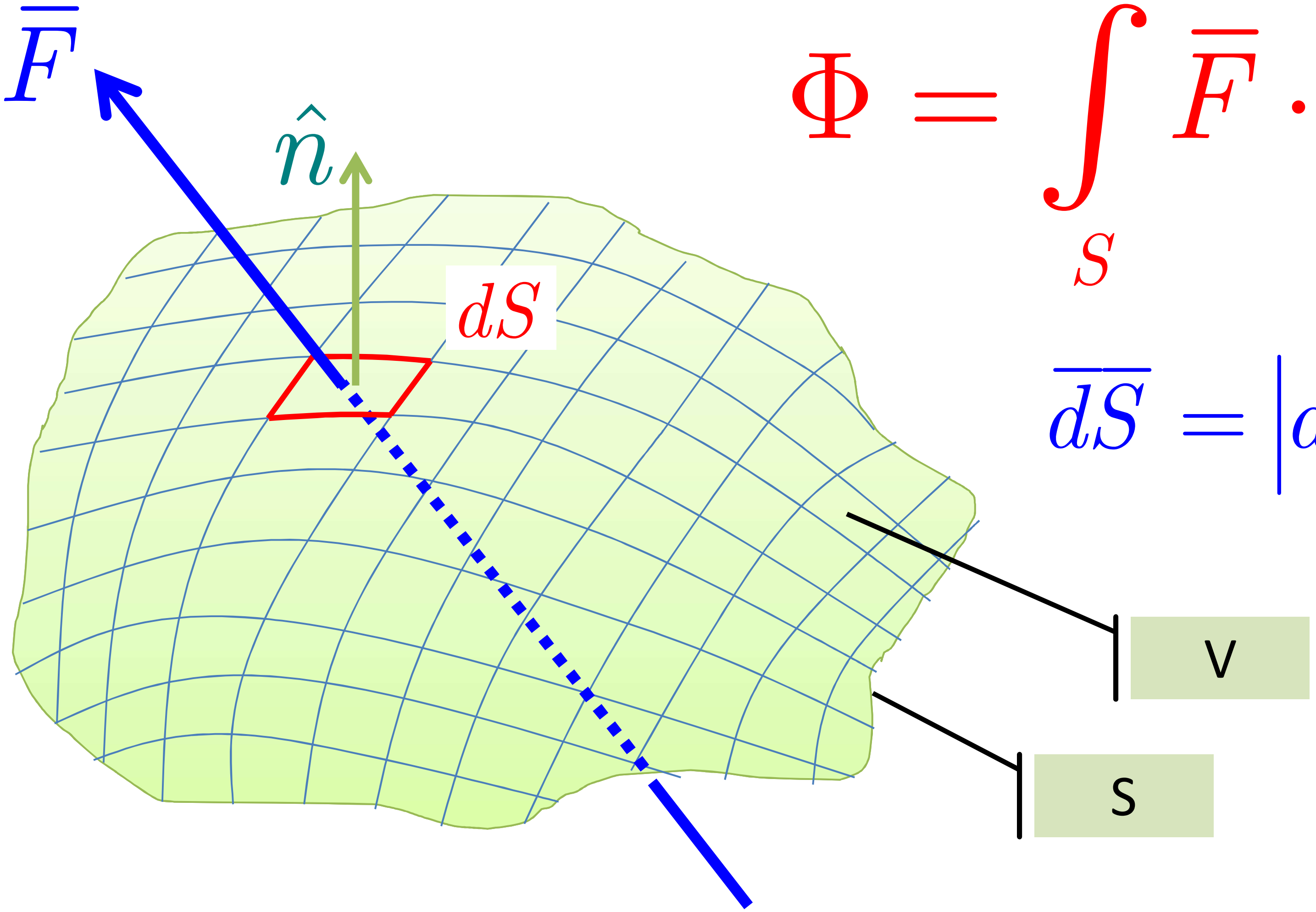



http://phet.colorado.edu/simulations/sims.php?sim=Calculus_Grapher

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7a/Graph_of_sliding_derivative_line.gif

# Fluxo através de S-1




$$\Phi = \int_S \overline{F} \cdot \overline{dS}$$

$$\overline{dS} = \left| dS \right| \hat{n}$$

animação

# Rotacional e divergente

$$\mathbf{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z} \text{ campo vetorial}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z} \text{ operador del (notação)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right) \cdot \left(F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z}\right)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right) \times \left(F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z}\right)$$

# Operadores diferenciais vetoriais-1

$$\nabla\psi \ : \text{gradiente de escalar}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} \ : \text{divergente de vetor}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} \ : \text{rotacional de vetor}$$

$$\nabla^2\psi \ : \text{laplaciano de escalar}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} \ : \text{laplaciano de vetor}$$

# Operadores diferenciais vetoriais-2

$$\nabla \psi = \hat{x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) +$$

$$\hat{y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

# Operadores diferenciais vetoriais-3

$$\nabla \cdot \nabla \psi = \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \hat{x} \nabla^2 A_x + \hat{y} \nabla^2 A_y + \hat{z} \nabla^2 A_z\end{aligned}$$

# Valor Médio de Grandeza Variável no Tempo

grandeza escalar $$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$

valor médio da função $$\langle v(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T V_0 \cos(\omega t + \phi) dt = 0$$

o valor médio de vetor complexo é

$$\langle \mathbf{V}(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T [V_x \cos(\omega t + \phi_x)\widehat{x} + V_y \cos(\omega t + \phi_y)\widehat{y} + V_z \cos(\omega t + \phi_z)\widehat{z}] = 0$$

$$\langle v^2(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T v^2(t) dt = \frac{V_0^2}{2}$$

# Valor Médio do Produto Vetorial de Dois Vetores-1

vetores complexos

$$\overline{A} = \overline{A}_r + j\overline{A}_i$$
$$\overline{B} = \overline{B}_r + j\overline{B}_i$$

domínio do tempo

$$\overline{A}(t) = \mathrm{Re}\{\overline{A}\exp(j\omega t)\} = \overline{A}_r\cos(\omega t) - \overline{A}_i\mathrm{sen}(\omega t)$$
$$\overline{B}(t) = \mathrm{Re}\{\overline{B}\exp(j\omega t)\} = \overline{B}_r\cos(\omega t) - \overline{B}_i\mathrm{sen}(\omega t)$$

# Valor Médio do Produto Vetorial de Dois Vetores-2

domínio do tempo

$$\overline{A}(t) = \mathrm{Re}\{\overline{A}\exp(j\omega t)\} = \overline{A}_r\cos(\omega t) - \overline{A}_i\mathrm{sen}(\omega t)$$
$$\overline{B}(t) = \mathrm{Re}\{\overline{B}\exp(j\omega t)\} = \overline{B}_r\cos(\omega t) - \overline{B}_i\mathrm{sen}(\omega t)$$

produto vetorial

$$\overline{A}(t)\times\overline{B}(t) = \left(\overline{A}_r\times\overline{B}_r\right)\cos^2(\omega t) + \left(\overline{A}_i\times\overline{B}_i\right)\mathrm{sen}^2(\omega t) - \left(\overline{A}_r\times\overline{B}_i + \overline{A}_i\times\overline{B}_r\right)\mathrm{sen}(\omega t)\cos(\omega t)$$

valor médio deste produto vetorial

$$\left\langle\overline{A}(t)\times\overline{B}(t)\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T\overline{A}(t)\times\overline{B}(t)dt = \frac{1}{2}\left(\overline{A}_r\times\overline{B}_r + \overline{A}_i\times\overline{B}_i\right)$$

# Valor Médio do Produto Vetorial de Dois Vetores-3

$$\overline{A}(t)\times\overline{B}(t)=\left(\overline{A}_r\times\overline{B}_r\right)\cos^2(\omega t)+\left(\overline{A}_i\times\overline{B}_i\right)\mathrm{sen}^2(\omega t)-\left(\overline{A}_r\times\overline{B}_i+\overline{A}_i\times\overline{B}_r\right)\mathrm{sen}(\omega t)\cos(\omega t)$$

valor médio deste produto vetorial

$$\left\langle\overline{A}(t)\times\overline{B}(t)\right\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T\overline{A}(t)\times\overline{B}(t)dt=\frac{1}{2}\left(\overline{A}_r\times\overline{B}_r+\overline{A}_i\times\overline{B}_i\right)$$

$$\overline{A}\times\overline{B}^*=\left(\overline{A}_r+j\overline{A}_i\right)\times\left(\overline{B}_r-j\overline{B}_i\right)=\left(\overline{A}_r\times\overline{B}_r+\overline{A}_i\times\overline{B}_i\right)+j\left(\overline{A}_i\times\overline{B}_r-\overline{A}_r\times\overline{B}_i\right)$$

$$\left\langle\overline{A}(t)\times\overline{B}(t)\right\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\overline{A}\times\overline{B}^*\right\}$$

o valor médio do produto vetorial de dois vetores é determinado a partir da representação complexa

# Referências

✓ Math Insight

– http://mathinsight.org/curl_components

✓ PhET

✓ http://phet.colorado.edu/

✓ Wolfram Alpha

– http://www.wolframalpha.com/