# Transformada Z: definição e propriedades

Magno Teófilo Madeira da Silva

EPUSP, 22 de fevereiro de 2010

# Conhecimentos prévios

- Sistemas e sinais de tempo discreto
- Resposta em freqüência
- Transf. de Fourier de Tempo Discreto (TFTD)
- Série de Fourier Discreta (SFD)
- Transformada de Fourier Discreta (TFD)

Conhecimento sobre transformada de Laplace

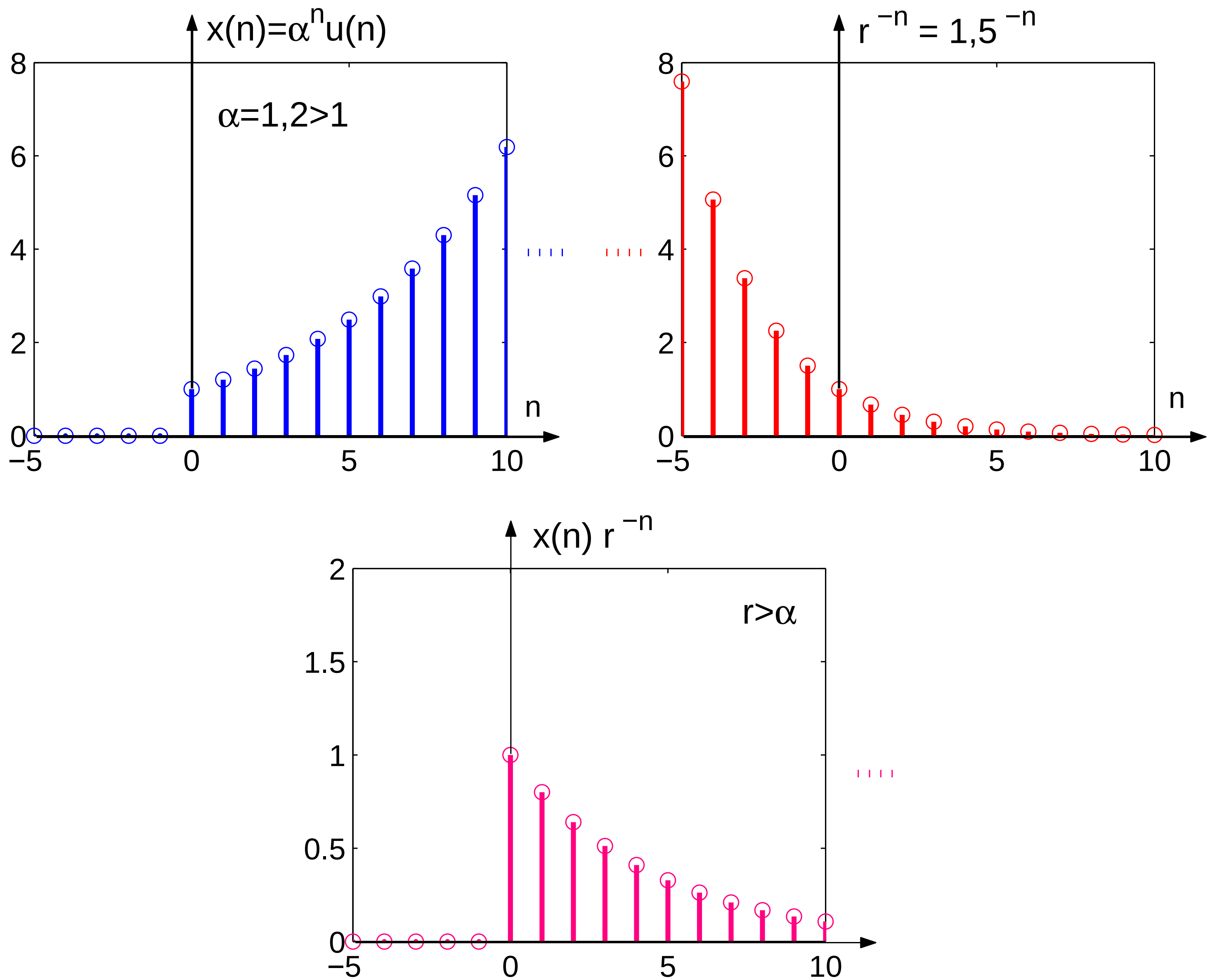
# Referências

- A. V. Oppenheim, R. W. Shafer, J.R. Buck *Discrete-time signal processing*. 2a. edição, Prentice Hall, 1999.
- C. Itiki, V. H. Nascimento *Processamento de Sinais de Tempo Discreto: Parte II.* EPUSP, 2007.
- J. G. Proakis, D. G. Manolakis, *Digital signal processing : principles, algorithms, and applications*, 4a. edição, Prentice Hall, 2006
- S. K. Mitra, *Digital Signal Processing - a computer based approach*, 3a edição, McGraw Hill, 2006

# Tópicos

1) Motivação
2) Definição da transformada z
3) Convergência
4) Região de Convergência de seqüência lateral a direita, lateral à esquerda e bilateral
5) Propriedades da região de convergência
6) Propriedades da transformada z

# 1. Transformada Z (TZ) - Motivação



# 1. Transformada Z (TZ) - Motivação

- Mesmo papel que a transformada de Laplace
- Permite manipulações algébricas simples
- Pode existir para muitas seqüências em que a TFTD não existe
- Função de transferência de sistemas de tempo discreto

# 2. Transformada Z - Definição

Define-se a TZ da seqüência $x(n)$ como

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}}$$

sendo $z \in \mathbb{C}$. Com $z = re^{j\omega}$, pode-se escrever

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\omega n}$$

que pode ser interpretada como a TFTD da seqüência $x(n)r^{-n}$. Em particular, se for possível tomar $r = 1$, a TZ de $x(n)$ se reduz à TFTD.

# 3. Convergência

Para que a transformada z convirja é necessário

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \right| < \infty.$$

Como $|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}|$, então uma condição suficiente para a convergência é dada por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}||e^{-j\omega n}| =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}| < \infty. \quad \text{Reg. circulares}$$

# 3. Importância da região de Convergência

Seja $x_1(n) = a^n u(n)$ uma seqüência causal e $x_2(n) = -a^n u(-n-1)$ uma seqüência não-causal. Essas seqüências tem a mesma TZ, ou seja

$$X_1(z) = X_2(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}},$$

com diferentes regiões de convergência, dadas por

$$R_{x_1} = \{|z| > |a|\}$$

e

$$R_{x_2} = \{|z| < |a|\}.$$

TZ bilateral: diferentes regiões de convergência (RC).

# 3. Caso particular: TZ do degrau unitário

Seja $x_1(n) = u(n)$ o degrau unitário. Usando o resultado anterior, chega-se a

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

Considerando agora a seqüência não-causal $x_2(n) = -u(-n-1)$, obtém-se

$$X_2(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| < 1$$

# 4. Soma de exponenciais - seq. lateral à direita

Calcular a TZ da seqüência lateral à direita

$$x_1(n) = (a_1\alpha^n + a_2\beta^n)u(n - N_0)$$

com $a_1, a_2, \alpha$ e $\beta$ ctes reais tal que $|\alpha| < |\beta|$ e $N_0$ inteiro positivo ou negativo. Aplicando a definição

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_1\alpha^n u(n - N_0)z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_2\beta^n u(n - N_0)z^{-n}$$

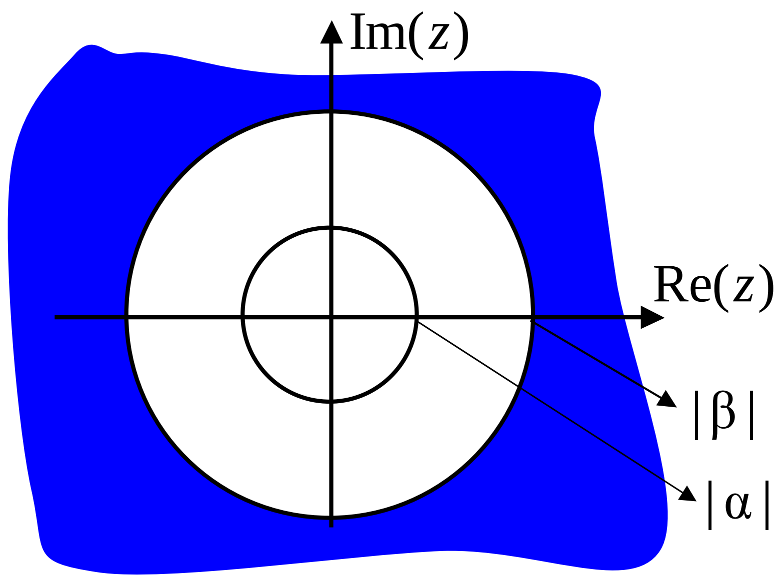
$$= a_1 \underbrace{\sum_{n=N_0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n}_{\text{converge para } |z| > |\alpha|} + a_2 \underbrace{\sum_{n=N_0}^{\infty} (\beta z^{-1})^n}_{\text{converge para } |z| > |\beta|}$$

# 4. Soma de exponenciais - seq. lateral à direita

$$X_1(z) = \frac{a_1(\alpha z^{-1})^{N_0}}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{a_2(\beta z^{-1})^{N_0}}{1-\beta z^{-1}}$$

$$\mathcal{R}_{x_1} = \{|z| > |\alpha|\} \cap \{|z| > |\beta|\}$$

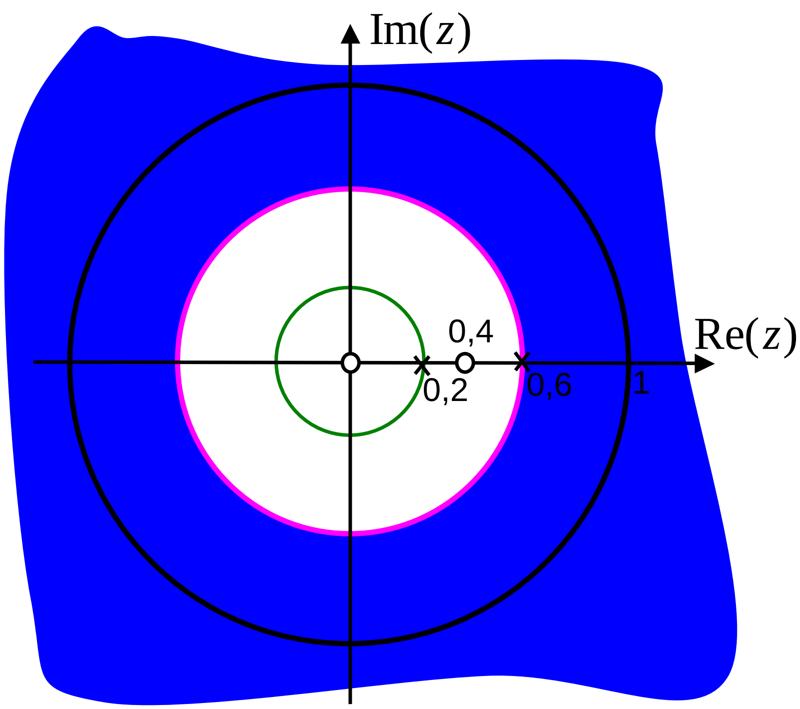
$$= |z| > |\beta|$$

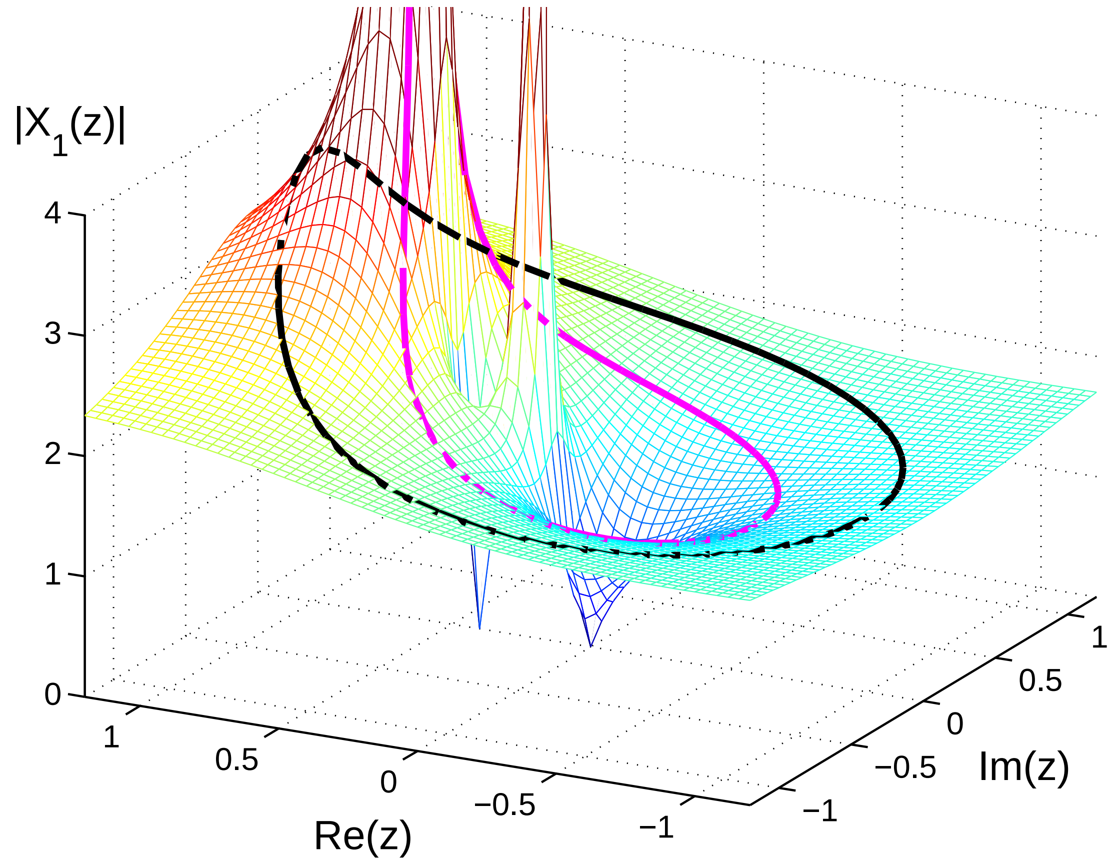


# 4. Soma de exponenciais - seq. lateral à direita

Para $N_0 = 0; \quad a_1 = a_2 = 1; \quad \alpha = 0,2; \quad \beta = 0,6$

$$x_1(n) = (0,2^n + 0,6^n)u(n) \leftrightarrow X_1(z) = \frac{2z(z-0,4)}{(z-0,2)(z-0,6)}$$



# 4. Soma de exponenciais - seq. lateral à esquerda

Calcular a TZ da seqüência lateral à esquerda

$$x_2(n) = (a_1\alpha^n + a_2\beta^n)u(-n-N_0)$$

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_1\alpha^n u(-n-N_0) z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_2\beta^n u(-n-N_0) z^{-n}$$

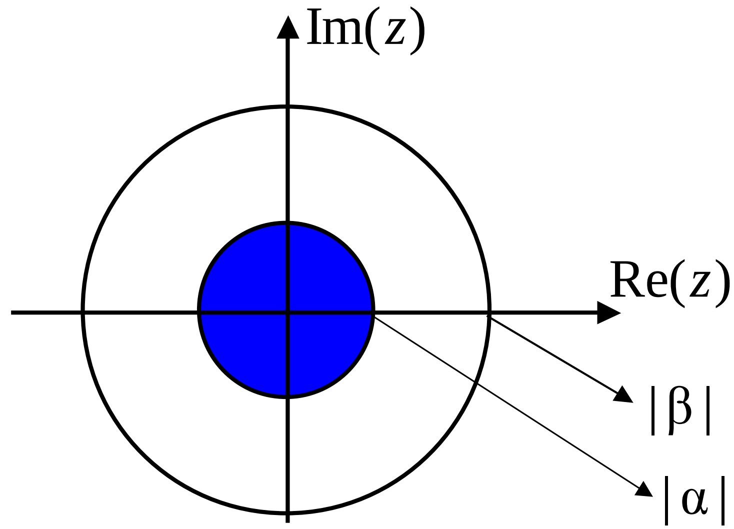
$$= a_1 \sum_{n=-\infty}^{-N_0} \alpha^n z^{-n} + a_2 \sum_{n=-\infty}^{-N_0} \beta^n z^{-n}$$

$$= a_1 \underbrace{\sum_{k=N_0}^{\infty} (\alpha^{-1} z)^k}_{\text{converge para } |z| < |\alpha|} + a_2 \underbrace{\sum_{k=N_0}^{\infty} (\beta^{-1} z)^k}_{\text{converge para } |z| < |\beta|}$$

# 4. Soma de exponenciais - seq. lateral à esquerda

$$X_2(z) = \frac{a_1(\alpha^{-1}z)^{N_0}}{1-\alpha^{-1}z} + \frac{a_2(\beta^{-1}z)^{N_0}}{1-\beta^{-1}z}$$

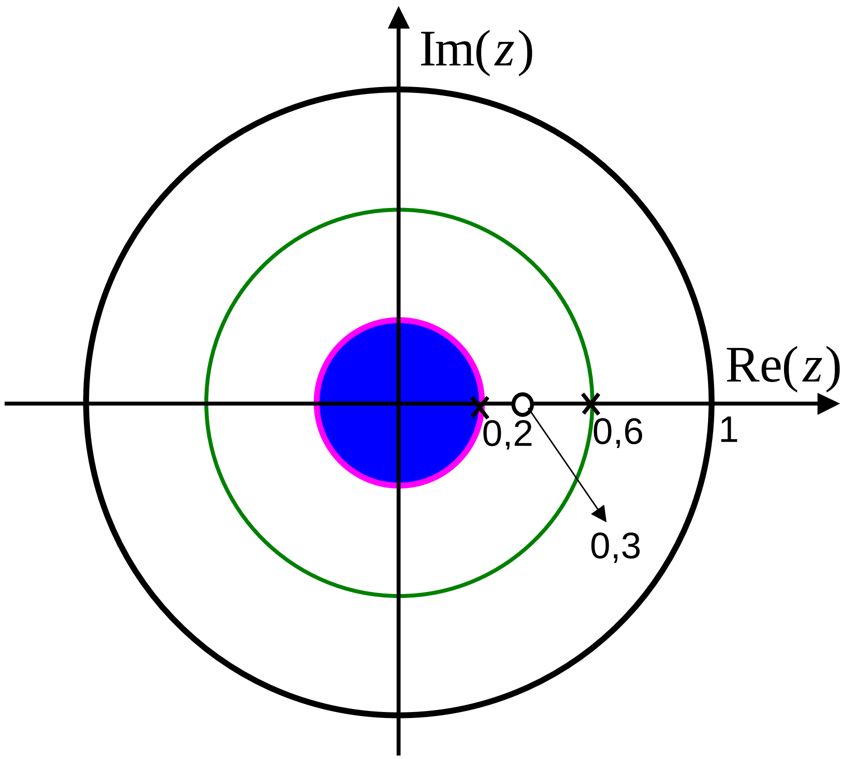
$$\mathcal{R}_{x_2} = \{|z| < |\alpha|\} \cap \{|z| < |\beta|\}$$
$$= |z| < |\alpha|$$

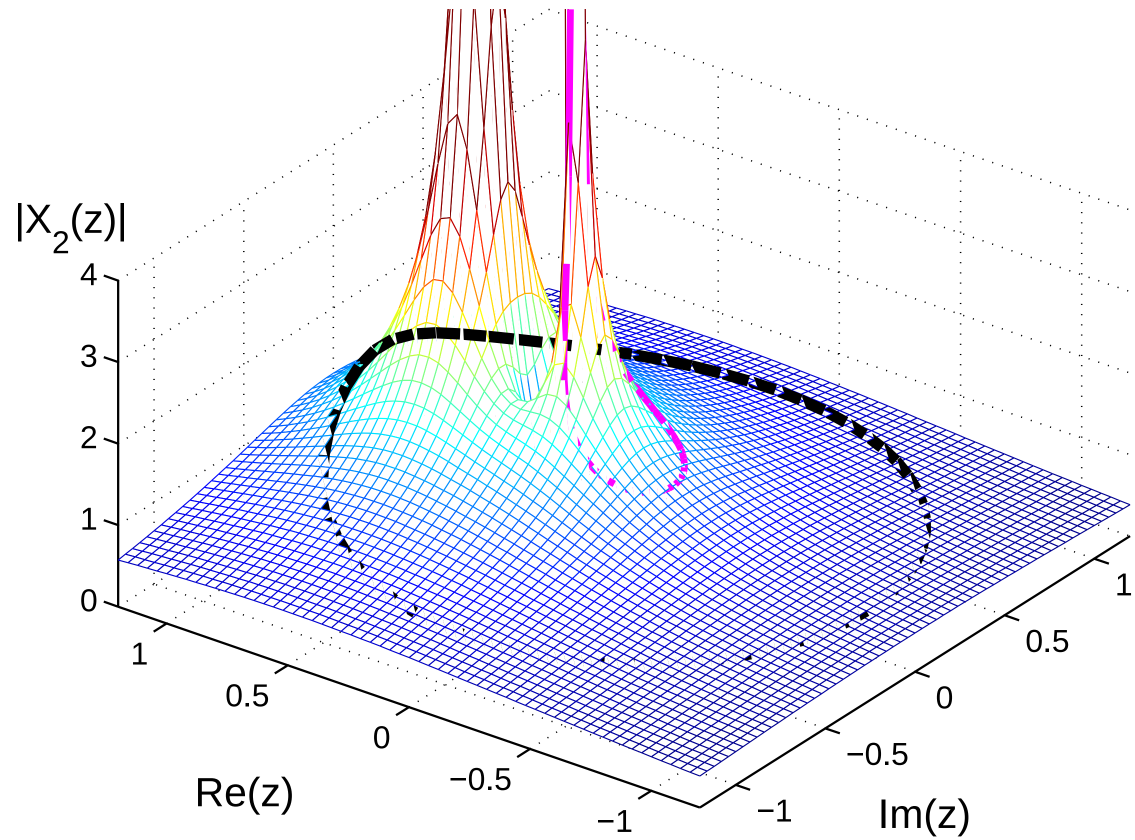


# 4. Soma de exponenciais - seq. lateral à esquerda

Para $N_0 = 0; \quad a_1 = a_2 = 1; \quad \alpha = 0,2; \quad \beta = 0,6$

$$x_2(n) = (0,2^n + 0,6^n)u(-n) \longleftrightarrow X_2(z) = \frac{-0,8(z-0,3)}{(z-0,2)(z-0,6)}$$



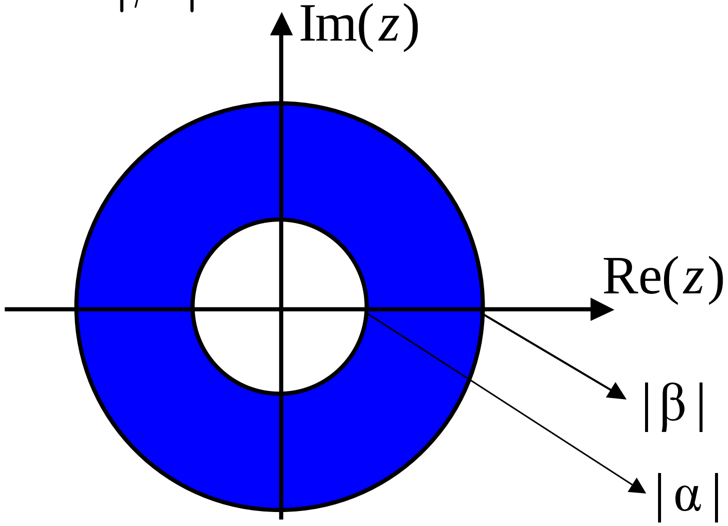
# 4. Soma de exponenciais - seq. bilateral

Calcular a TZ Considerando a seqüência bilateral

$$x_3(n) = a_1\alpha^n u(n - N_0) + a_2\beta^n u(-n - N_0)$$

$$X_3(z) = \frac{a_1(\alpha z^{-1})^{N_0}}{1 - \alpha z^{-1}} + \frac{a_2(\beta^{-1} z)^{N_0}}{1 - \beta^{-1} z}$$

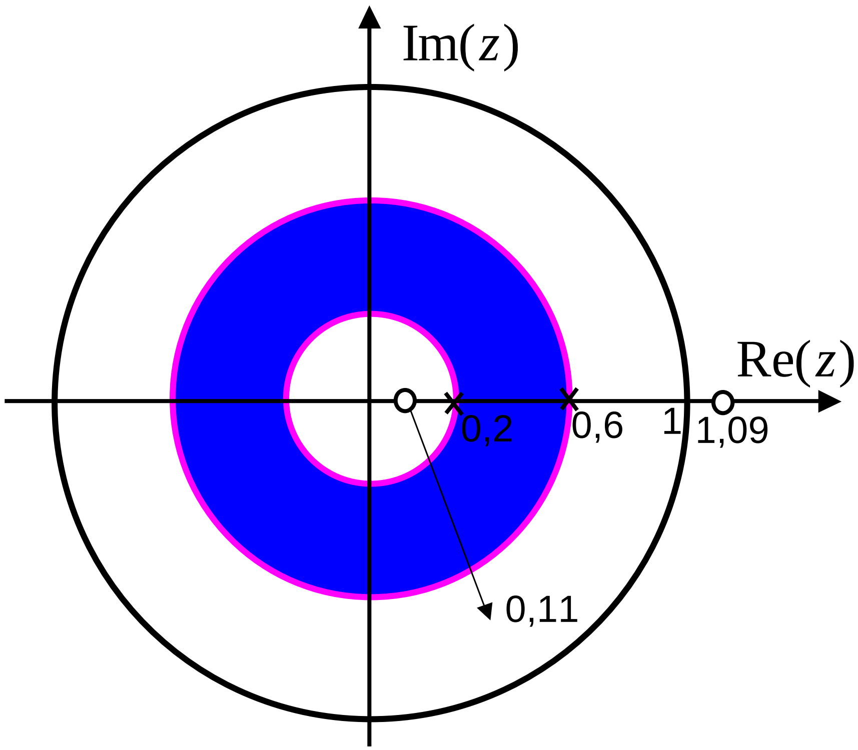
$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{x_3} &= \{|z| > |\alpha|\} \cap \{|z| < |\beta|\} \\ &= |\alpha| < |z| < |\beta| \end{aligned}$$

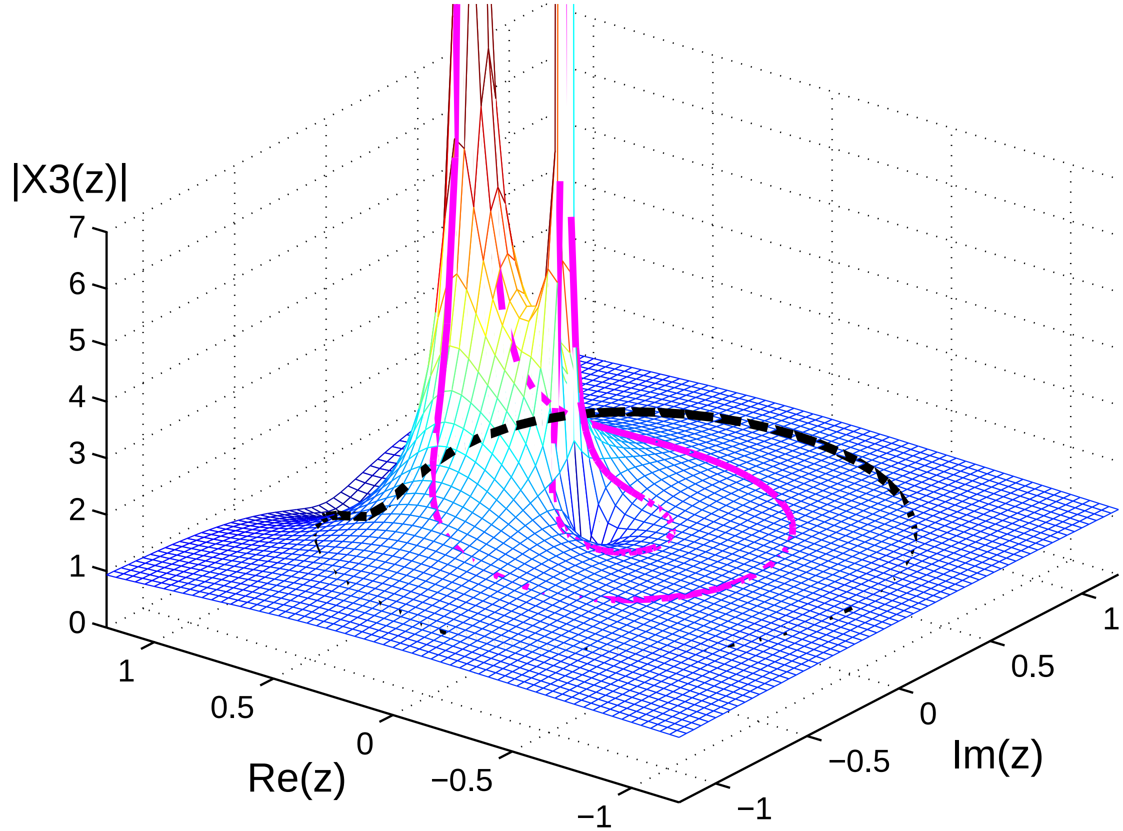


# 4. Soma de exponenciais - seq. bilateral

Para $N_0 = 0; \quad a_1 = a_2 = 1; \quad \alpha = 0,2; \quad \beta = 0,6$

$$x_3(n) = 0,2^n u(n) + 0,6^n u(-n) \leftrightarrow X_3(z) = \frac{(z-1,09)(z-0,11)}{(z-0,2)(z-0,6)}$$



# 4. Transformada z - seqüência finita à direita

Calcular a transformada z da seqüência

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n$$

$$= \frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}}$$

Se $|a| < \infty$, então a RC é todo o plano z com exceção da origem $(z = 0)$

# 4. Transformada z - seqüência finita à esquerda

Calcular a transformada z da seqüência

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & -N+1 \leq n \leq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

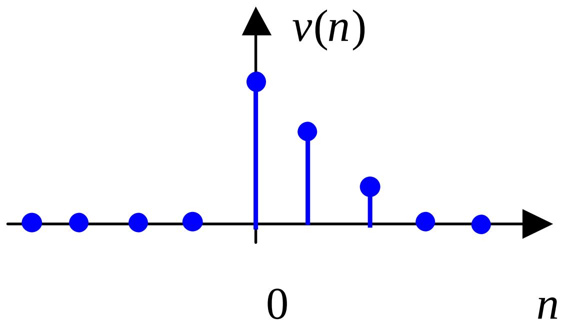
$$X(z) = \sum_{n=-N+1}^{0} a^n z^{-n} = \sum_{k=0}^{N-1} (a^{-1}z)^k$$

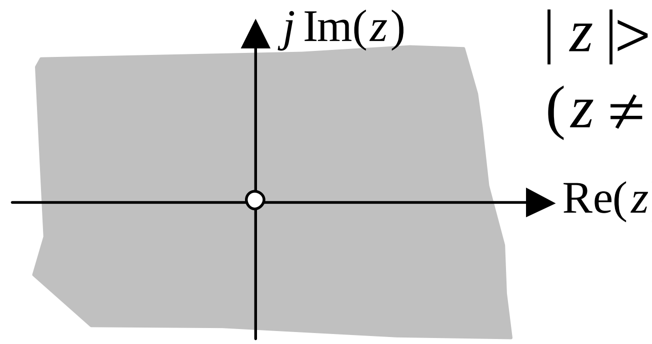
$$= \frac{1-(a^{-1}z)^N}{1-a^{-1}z}$$

Se $|a| \neq 0$, então a RC corresponde à $|z| < \infty$ ou $(z \neq \infty)$

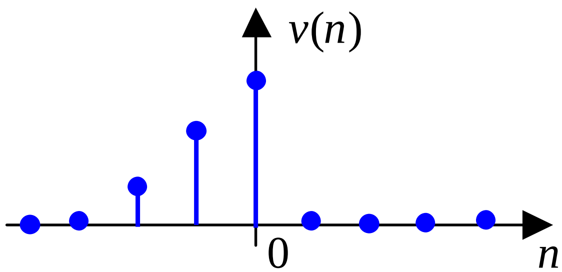
# 5. Região de Convergência - Seqüências finitas

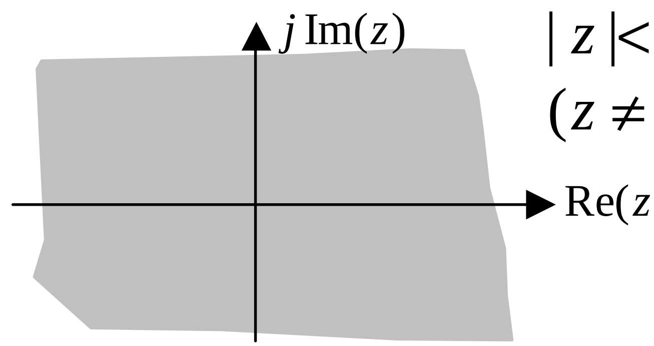
Sequência | Região de convergência



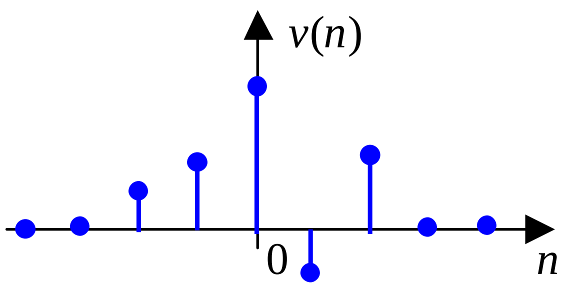



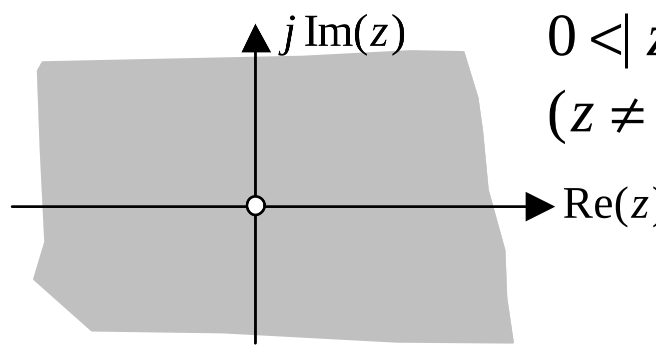

$$|z| > 0$$
$$(z \neq 0)$$




$$|z| < \infty$$
$$(z \neq \infty)$$

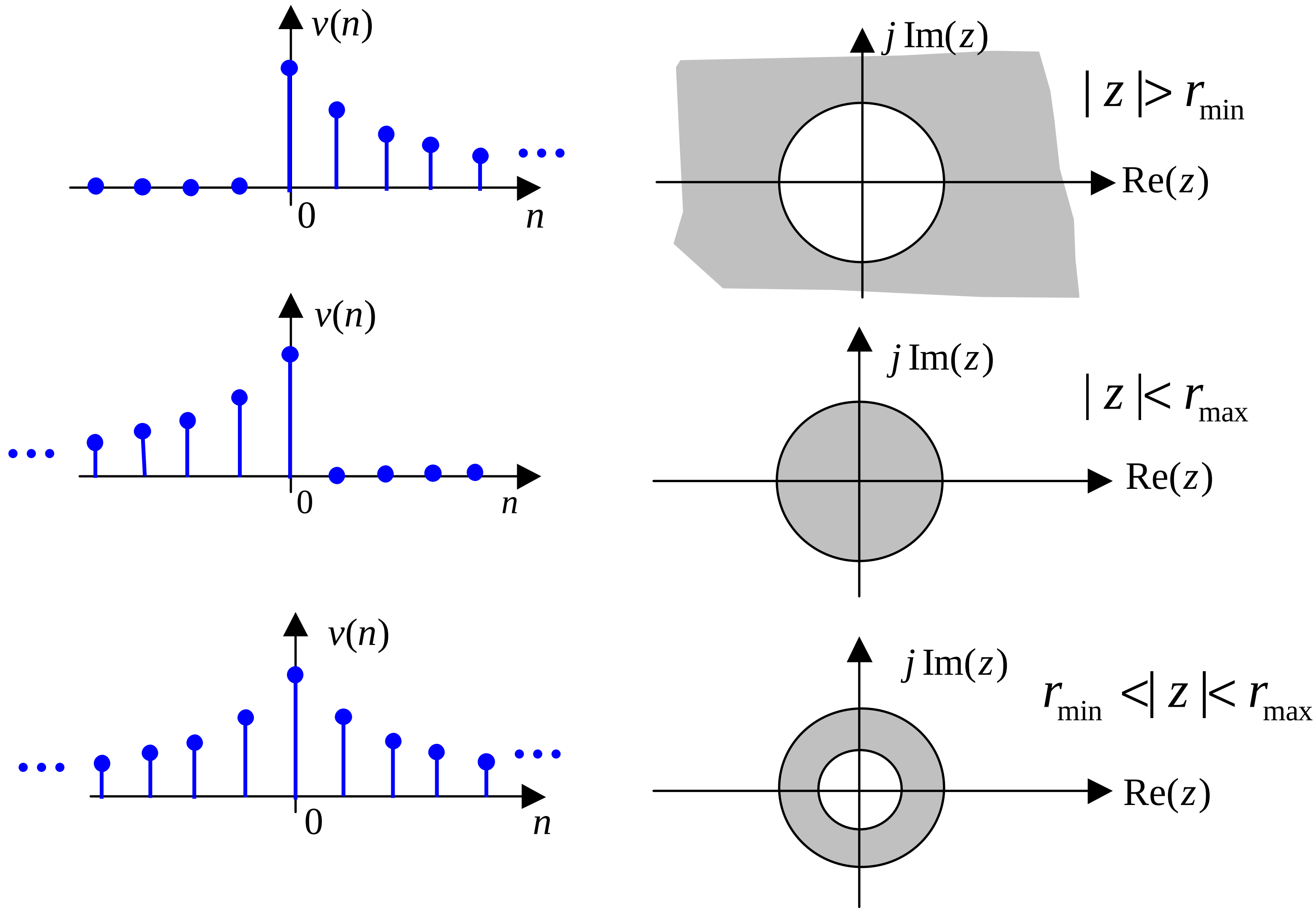



$$0 < |z| < \infty$$
$$(z \neq 0, z \neq \infty)$$

# 5. Região de Convergência - Seqüências infinitas

Sequência | Região de convergência



# 6. Propriedades da Transformada Z

- Deslocamento no tempo

$$x(n-n_0) \leftrightarrow z^{-n_0}X(z), \qquad z \in \mathcal{R}_x \pm \{z=0\} \pm |z| = \infty$$

Prova:

$$\mathcal{Z}\{x(n-n_0)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)z^{-n}$$

$$= z^{n_0-n_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)z^{-n} = z^{-n_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)z^{-(n-n_0)}$$

$$= z^{-n_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-(k)} = z^{-n_0}X(z)$$

# 6. Propriedades da Transformada Z

- Linearidade

$$y(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n) \leftrightarrow \alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$$

$$z \in \mathcal{R}_y \supseteq (\mathcal{R}_{x_1} \cap \mathcal{R}_{x_2})$$

Prova: Segue diretamente da definição da TZ.

# 6. Propriedades da Transformada Z

- Convolução

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(z)X_2(z), \ z \in \mathcal{R}_y \subseteq (\mathcal{R}_{x_1} \cap \mathcal{R}_{x_2})$$

Prova:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) x_2(n-k) \right] z^{-n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ x_1(k) z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-k) z^{-(n-k)} \right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) z^{-k} X_2(z) = X_1(z) X_2(z)$$

# 6. Propriedades da Transformada Z

- Diferenciação no domínio z

$$y(n) = nx(n) \leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}, \qquad z \in \mathcal{R}_x \pm \{z = 0\} \pm |z| = \infty$$

Prova:

$$-z\frac{dX(z)}{dz} = -z\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{dz^{-n}}{dz}$$

$$= -z\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left[-nz^{-n-1}\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[nx(n)\right] z^{-n} = Y(z)$$

- Mudança de escala no domínio z

$$y(n) = z_0^n x(n) \leftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right), \qquad z \in z_0 \mathcal{R}_x$$

Prova:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_0^n x(n) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left[\frac{z}{z_0}\right]^{-n} = X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

# 6. Propriedades da Transformada Z

- Inversão do eixo do tempo

$$y(n) = x(-n) \leftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right), \qquad z \in \mathcal{R}_x^{-1}$$

Prova:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n) z^{-n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \left(z^{-1}\right)^{-k} = X\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

# 6. Propriedades da Transformada Z

- Conjugação

$$y(n) = x^*(n) \leftrightarrow X^*\left(z^*\right), \qquad z \in \mathcal{R}_x$$

Prova:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[x(n)(z^*)^{-n}\right]^* \\ &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(z^*\right)^{-n}\right]^* = X^*(z^*) \end{aligned}$$