Sistemas de tempo discreto

Magno T. M. Silva

EPUSP, fevereiro de 2010

1. Sistemas de tempo discreto

São funções matemáticas que transformam uma seqüência de entrada $s(n)$ em uma seqüência de saída $y(n)$

$$s(n) \longrightarrow \boxed{\mathrm{T}\{\,\bullet\,\}} \longrightarrow y(n) = \mathrm{T}\{s(n)\}$$

Exemplos:

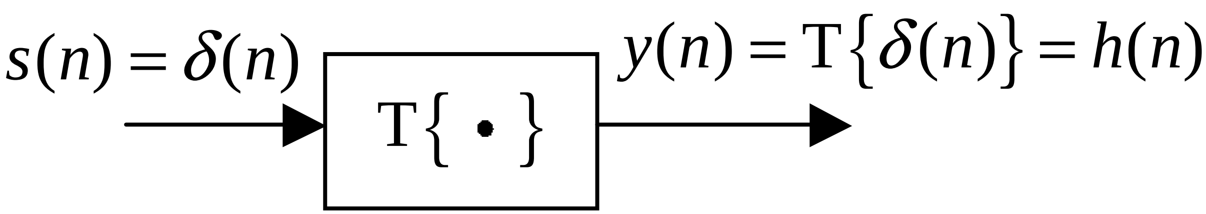
$$y(n) = \frac{1}{3}\Big[s(n) + s(n-1) + s(n-2)\Big]$$

$$y(n) = 0,8s(n) + 0,2s(n+1)$$

$$y(n) = s(n-1) - s(n-2) - 0,5y(n-1) + y(n-2)$$

$$y(n) = \cos(\omega_0 s(n))$$

1. Resposta Impulsiva
   Se $s(n) = \delta(n)$, a seqüência de saída de um sistema de tempo discreto recebe o nome de resposta impulsiva ou resposta ao pulso unitário



2. Propriedades de sistemas de tempo discreto

2. Homogeneidade

   Um sistema de tempo discreto é homogêneo se

$$\begin{aligned} y(n) &= T\{c\, s(n)\} \\ &= c\, T\{s(n)\} \end{aligned}$$

   sendo c uma constante complexa qualquer

3. Linearidade
   Um sistema de tempo discreto é linear se e somente se

$$\begin{aligned} y(n) &= T\{a_1 s_1(n) + a_2 s_2(n)\} \\ &= a_1 T\{s_1(n)\} + a_2 T\{s_2(n)\} \\ &= a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) \end{aligned}$$

4. Invariância no tempo
   Um sistema de tempo discreto é invariante no tempo se

$$y(n) = T\{s(n)\}$$
$$y(n - n_0) = T\{s(n - n_0)\},$$

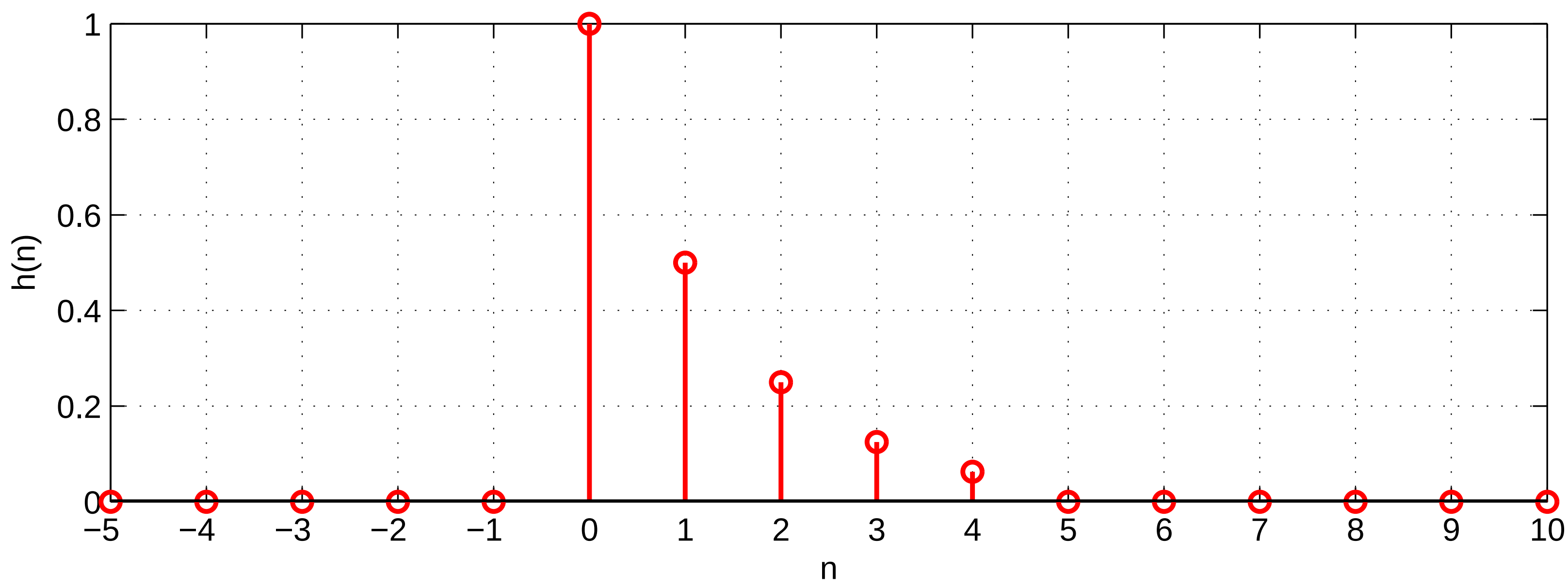
ou seja, um deslocamento de n_0 amostras da seqüência de entrada produz um deslocamento correspondente também de n_0 amostras na seqüência de saída para todos os valores de n e n_0.

5. Causalidade

Um sistema de tempo discreto é causal se

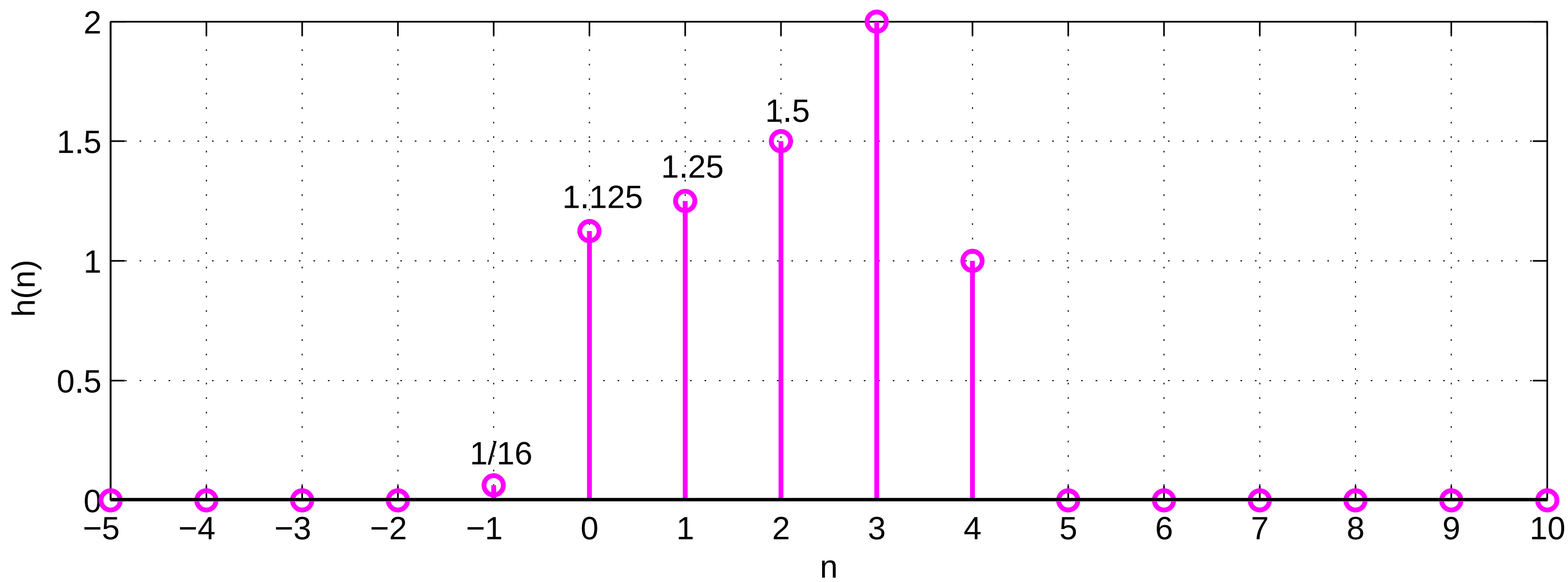
$$h(n) = 0, \quad n < 0$$

Exemplo de um sistema causal:



2. Propriedades de sistemas de tempo discreto

Exemplo de um sistema não-causal:



Num sistema não-causal a saída do instante n depende da entrada de instantes futuros, por exemplo, $(n + 1)$, $(n + 5)$, etc

2. Propriedades de sistemas de tempo discreto

6. Memória

   Um sistema de tempo discreto é sem memória se sua saída $y(n)$ no instante $n = n_0$, depende apenas da entrada do instante $n = n_0$, ou seja, $s(n_0)$.

7. Estabilidade
Um sistema de tempo discreto é estável em entrada-saída se uma seqüência limitada

$$|s(n)| \leq M_1$$

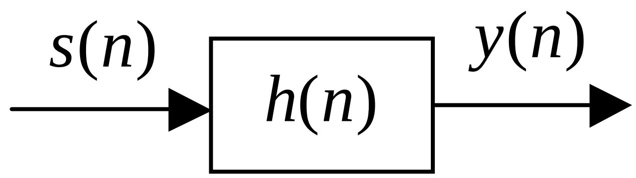
produz uma seqüência de saída limitada

$$|y(n)| \leq M_2$$

para M_1 e M_2 finitos. Isso também corresponde a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty.$$

3. Relação entrada-saída de um SLIT



Como caracterizar a saída $y(n)$ em função da entrada $s(n)$ e da resposta ao pulso unitário $h(n)$?

3. Somatório de convolução

Sinal de entrada de um sistema de tempo discreto

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k)\delta(n-k)$$

Sinal de saída de um SLIT

$$y(n) = T\left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k)\delta(n-k) \right\}$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k)T\{\delta(n-k)\}$$

3. Somatório de convolução

Resposta ao pulso unitário $h(n) = T\{\delta(n)\}$

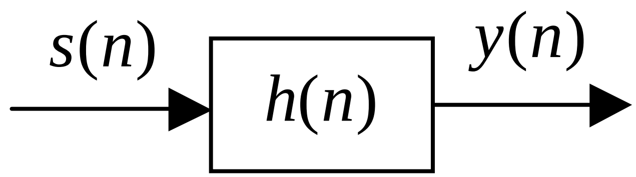
Sistema invariante no tempo $h(n-k) = T\{\delta(n-k)\}$

Saída de um SLIT

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k) T\{\delta(n-k)\}$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k) h(n-k)$$

3. Somatório de convolução



$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k)h(n-k) = s(n) * h(n)$$

3. Interpretação gráfica da convolução

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k)h(n_0 - k)$$

Rebatimento em torno da origem

$$h(k) \Longrightarrow h(-k)$$

Deslocamento de $h(-k)$ em n_0 amostras

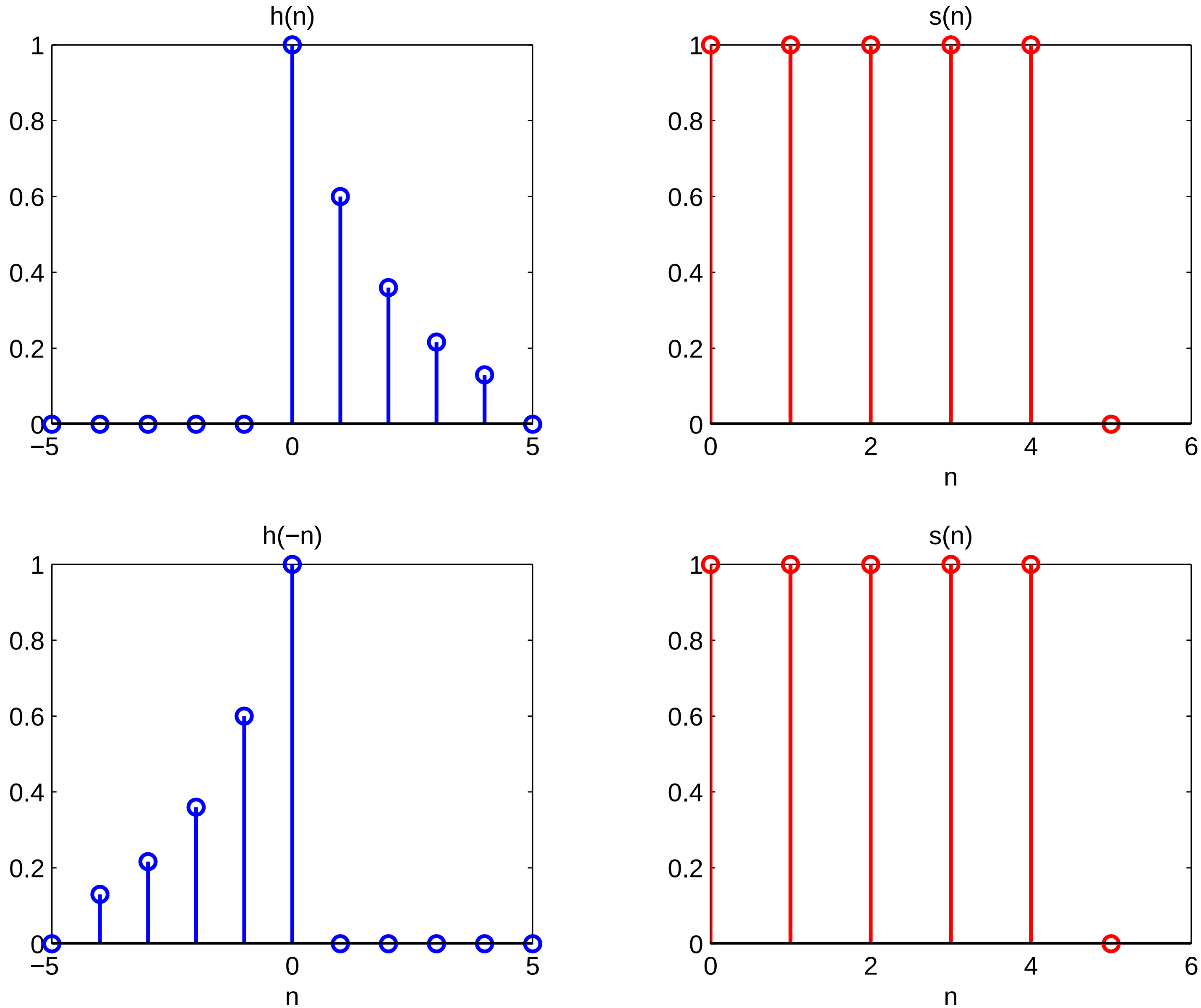
$$\Longrightarrow h(-(k - n_0)) = h(n_0 - k)$$

Produto, termo a termo, das seqüência

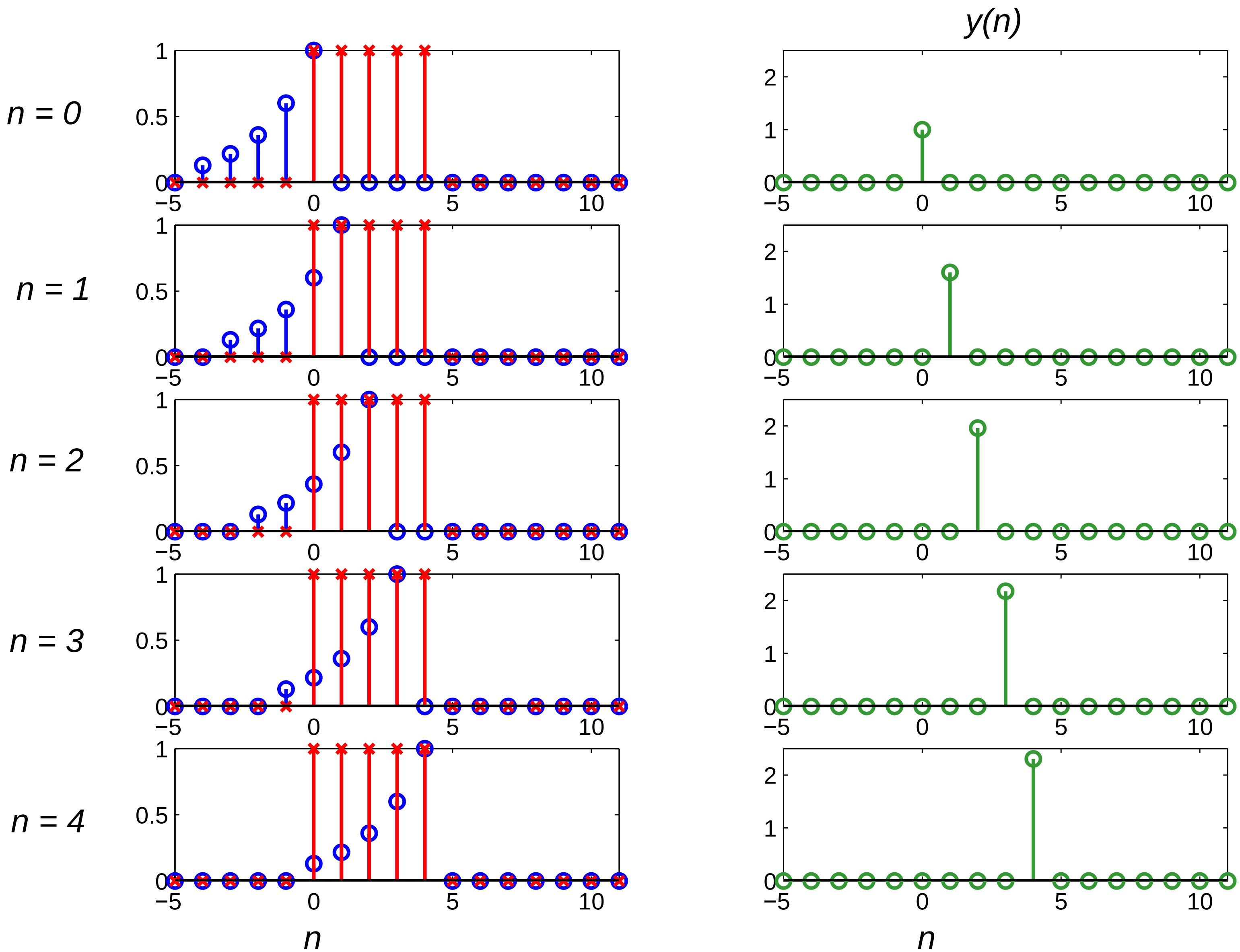
$s(k)$ e $h(n_0 - k) \Longrightarrow v(n_0, k)$

Soma de todos os termos da seqüência $v(n_0, k)$

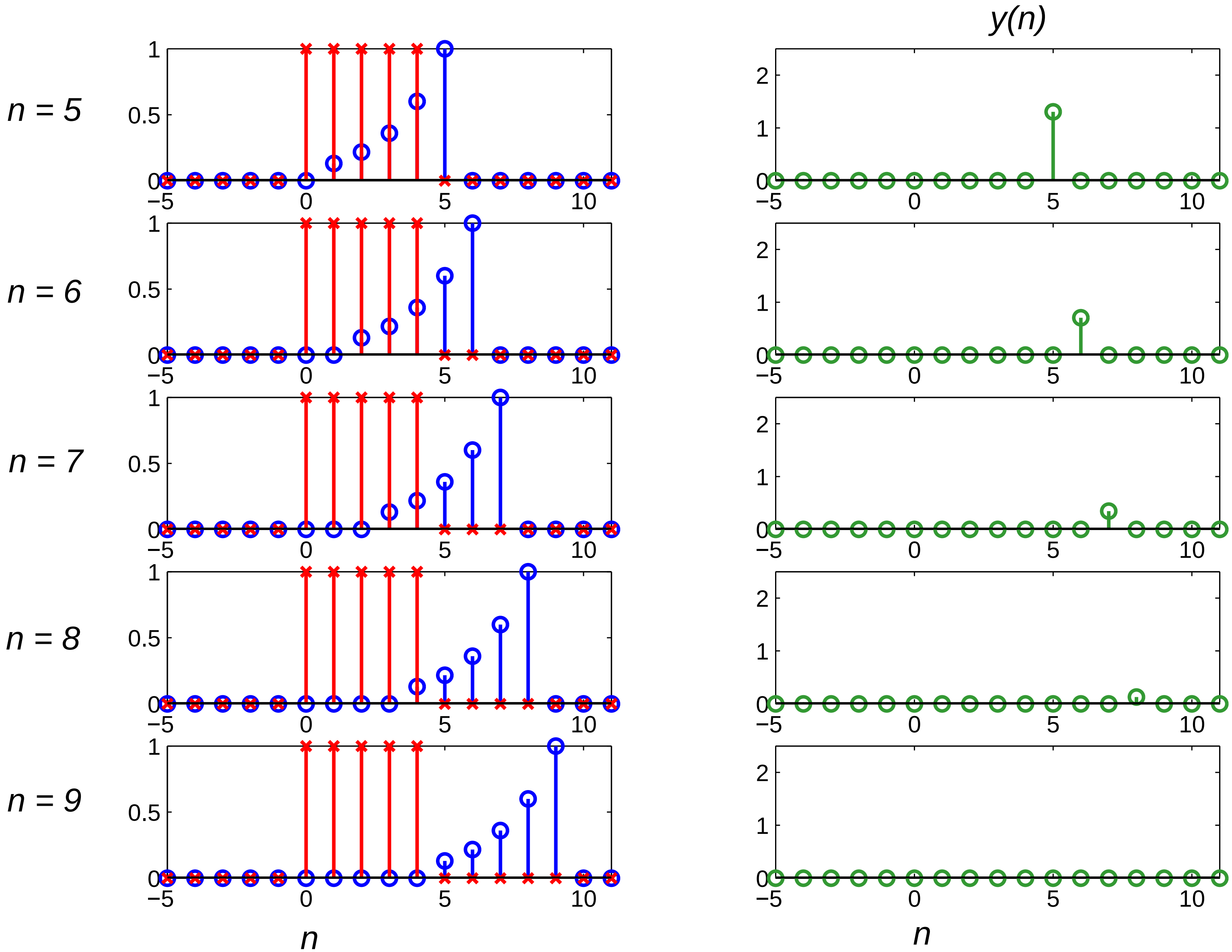
3. Ex. 1: $s(n) = u(n) - u(n-5)$ e $h(n) = 0{,}6^n s(n)$



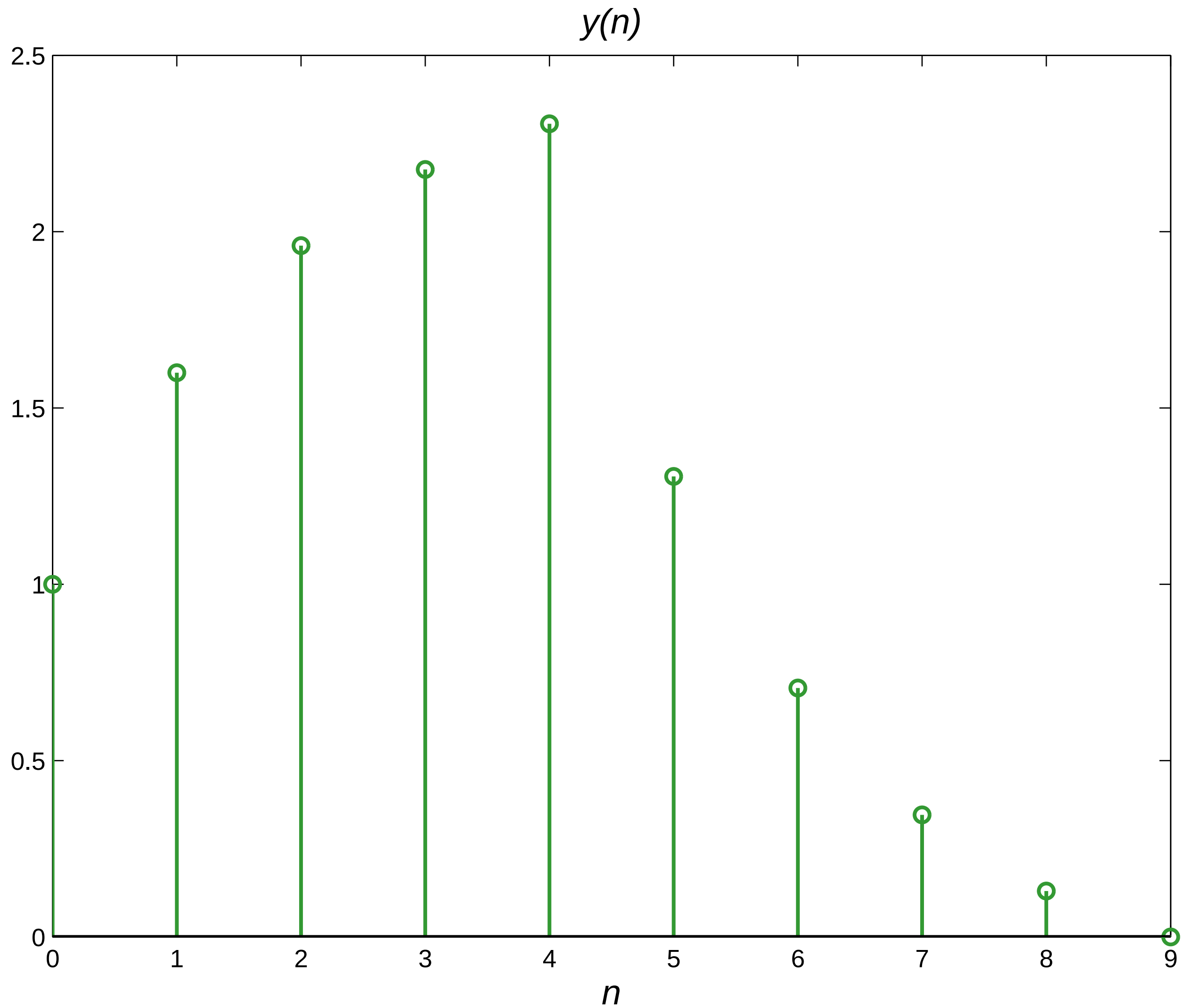
3. Exemplo 1: $y(n) = h(n) * s(n)$



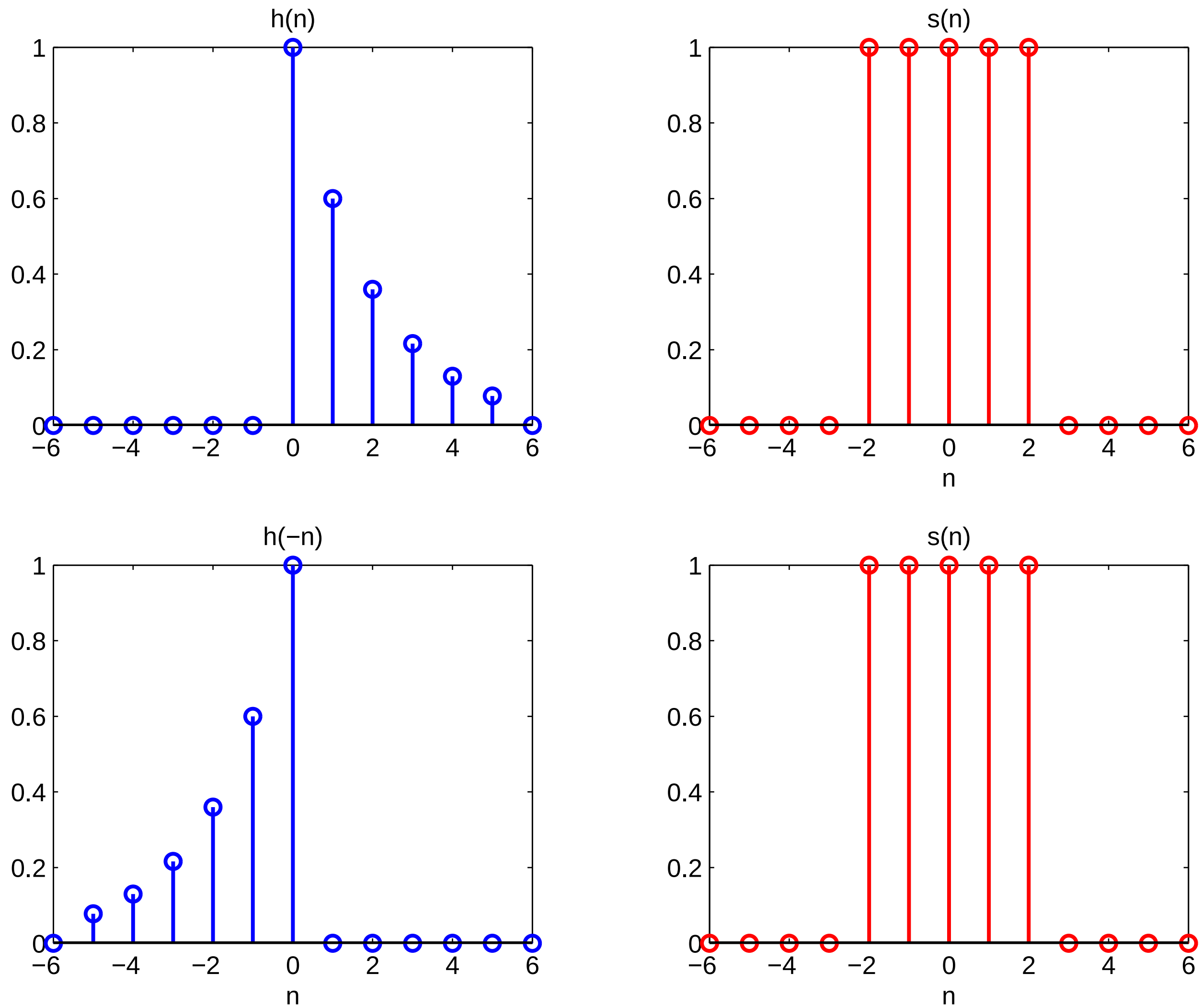
3. Exemplo 1: $y(n) = h(n) * s(n)$



3. Exemplo 1: $y(n) = h(n) * s(n)$

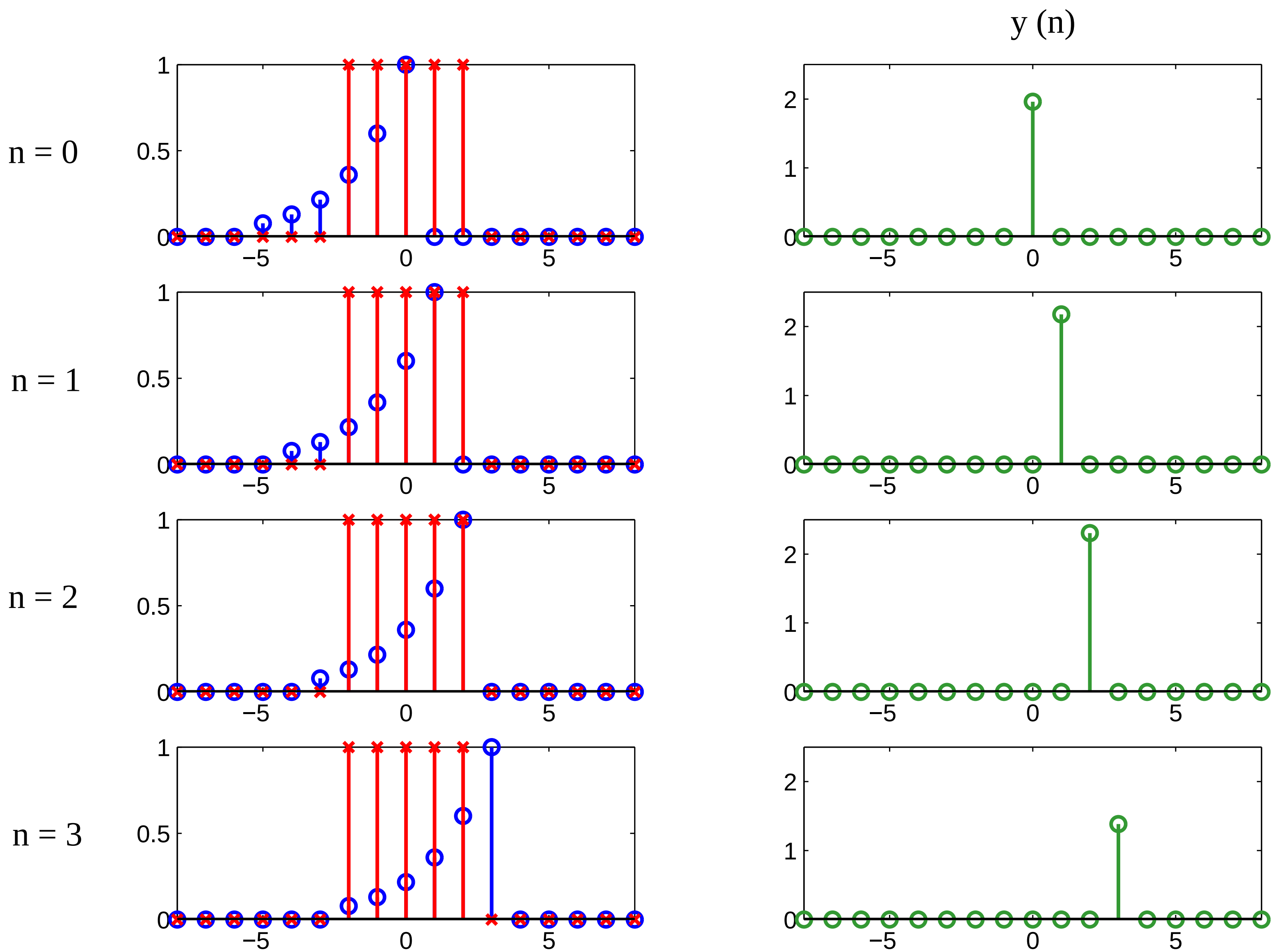


3. Exemplo 2: $h(n)$ e $s(n) = u(n+2) - u(n-2)$

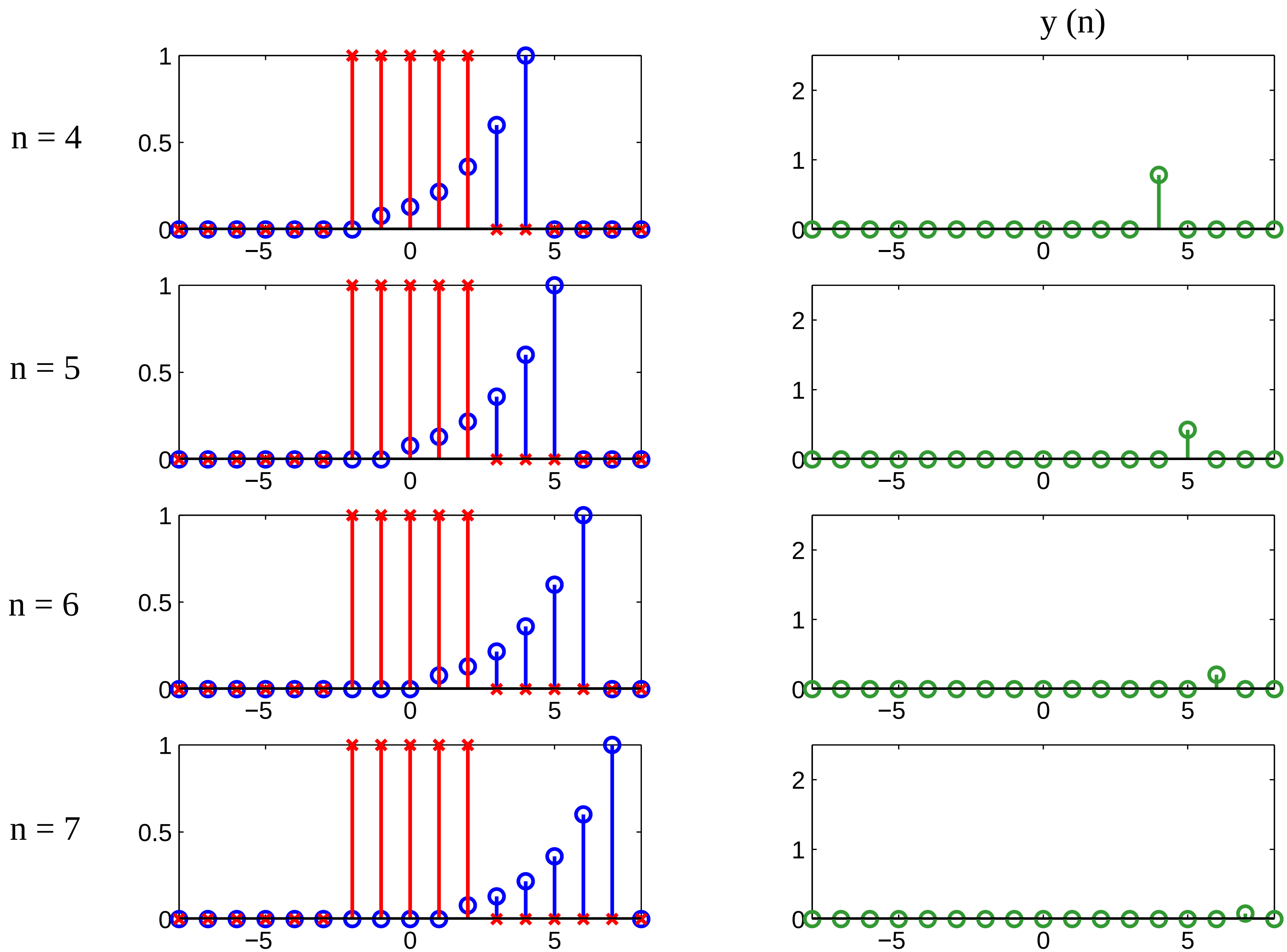


$h(n)$ é o mesmo do Exemplo 1.

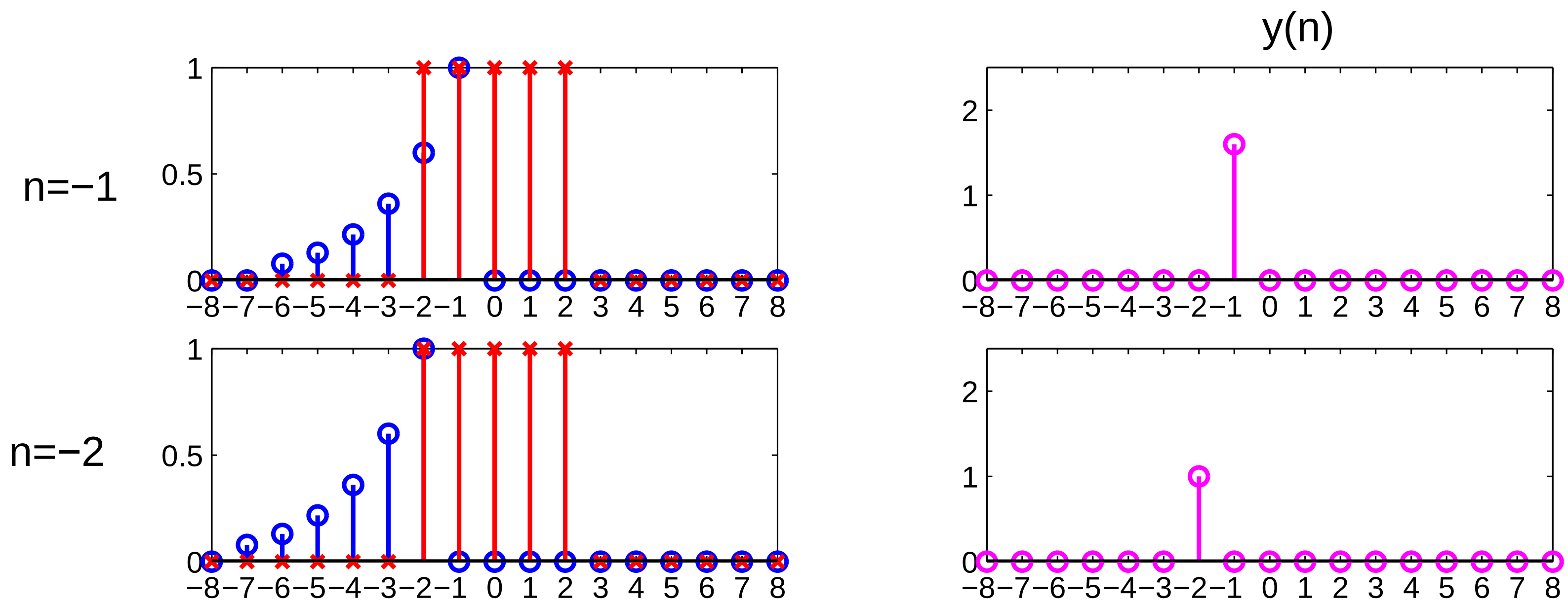
3. Exemplo 2: $y(n) = h(n) * s(n)$



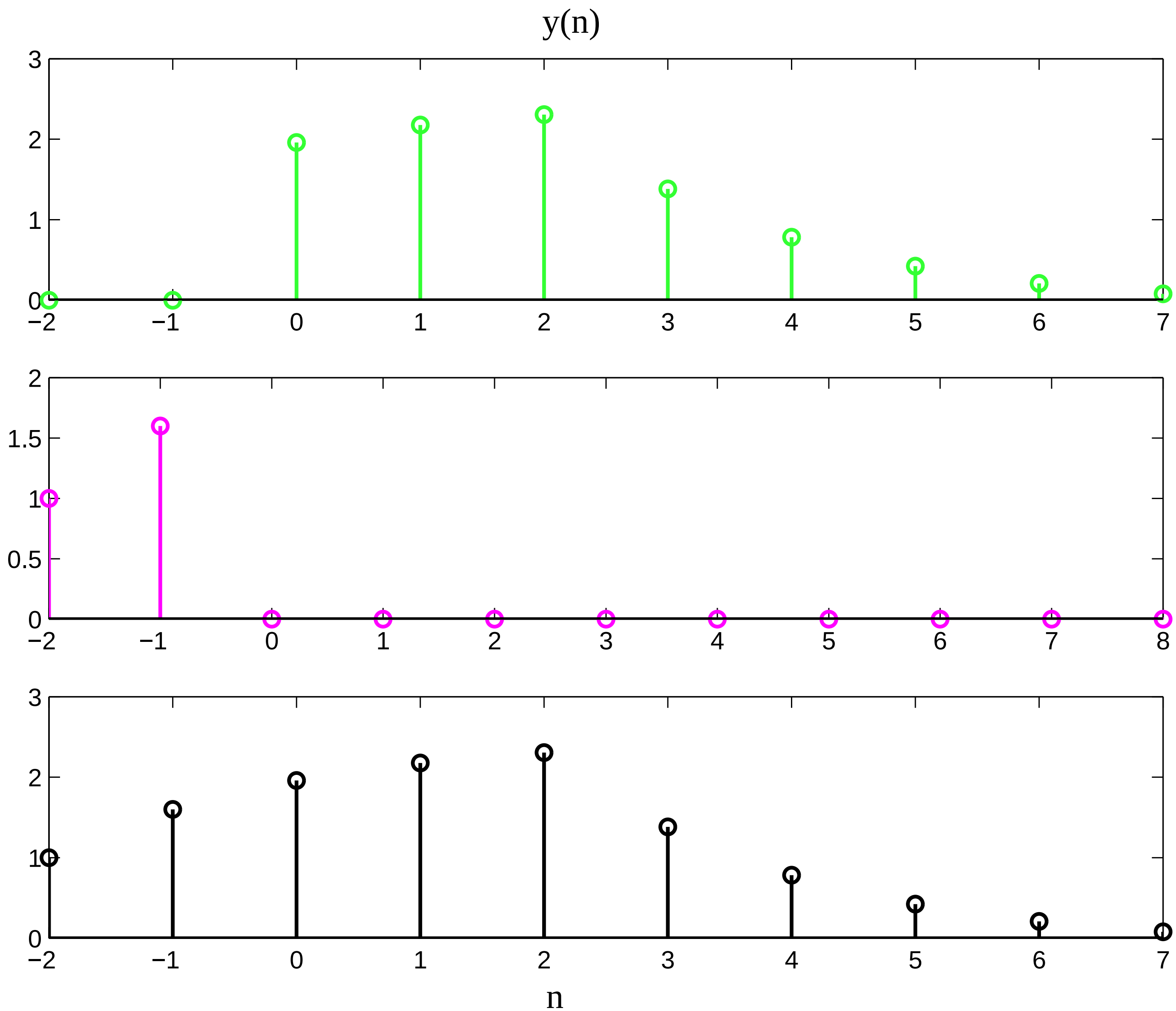
3. Exemplo 2: $y(n) = h(n) * s(n)$



3. Exemplo 2: $y(n) = h(n) * s(n)$



3. Exemplo 2: $y(n) = h(n) * s(n)$



4. Propriedades da Convolução

- Comutativa

$$y(n) = s(n) * h(n) = h(n) * s(n)$$

- Associativa

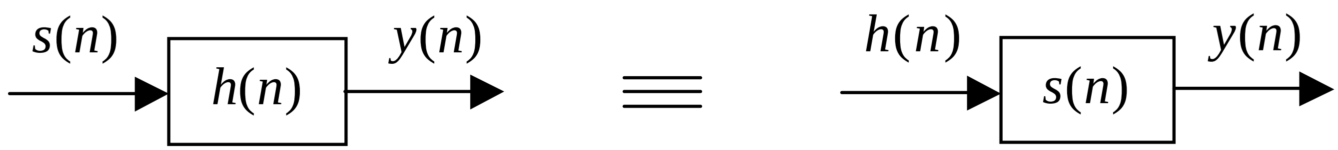
$$(s(n) * h_1(n)) * h_2(n) = s(n) * (h_1(n) * h_2(n))$$

- Distributiva

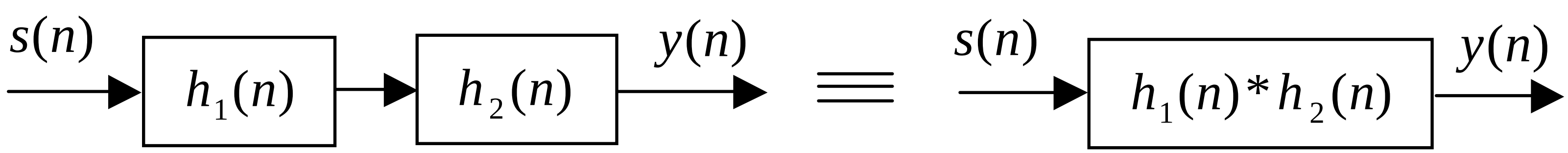
$$s(n) * (h_1(n) + h_2(n)) = s(n) * h_1(n) + s(n) * h_2(n)$$

4. Propriedades da Convolução

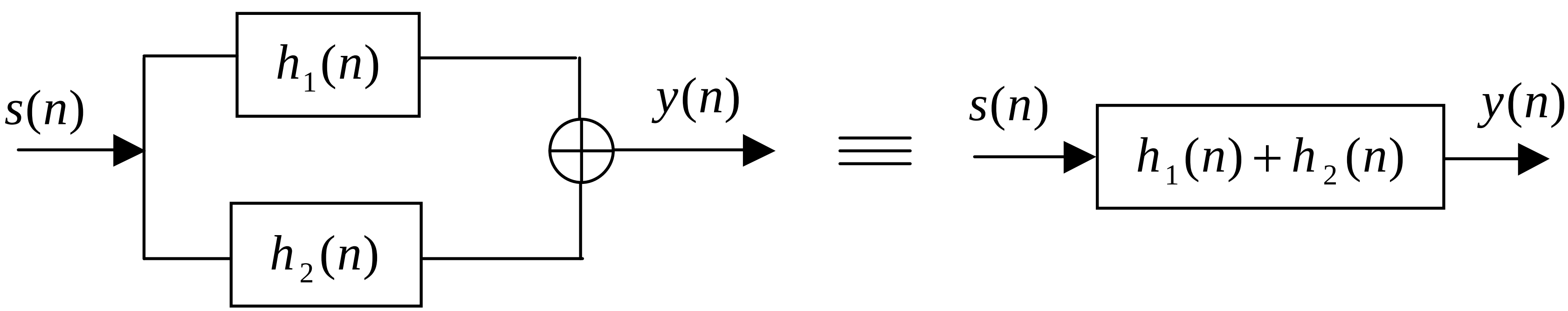
Comutativa



Associativa



Distributiva



5. Sistemas FIR e IIR causais

- Sistemas FIR (*Finite Impulse Response*)

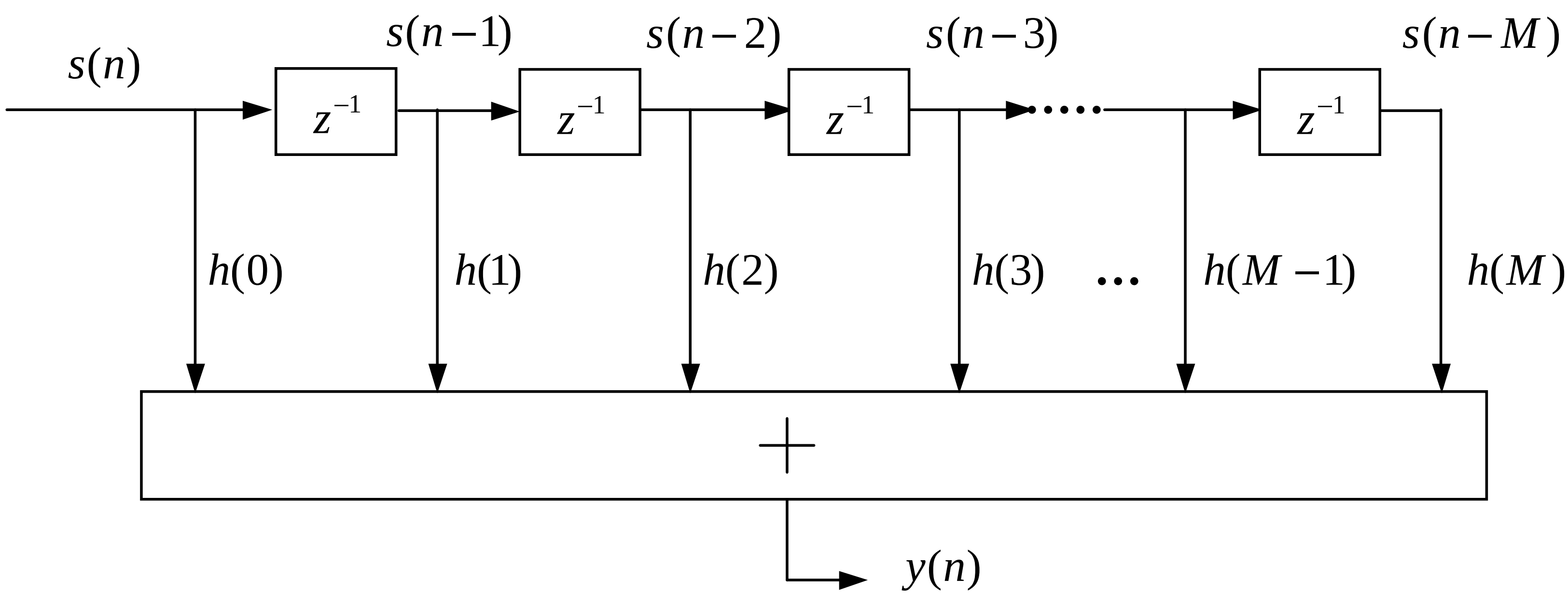
$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)s(n-k)$$

- Sistemas IIR (*Infinite Impulse Response*)

$$y(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)s(n-k)$$

5. Estrutura de implementação de um sistema FIR

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} h(k)s(n-k)$$



5. Sistemas descritos por equações de diferenças

- Equação de diferença linear com coeficientes constantes

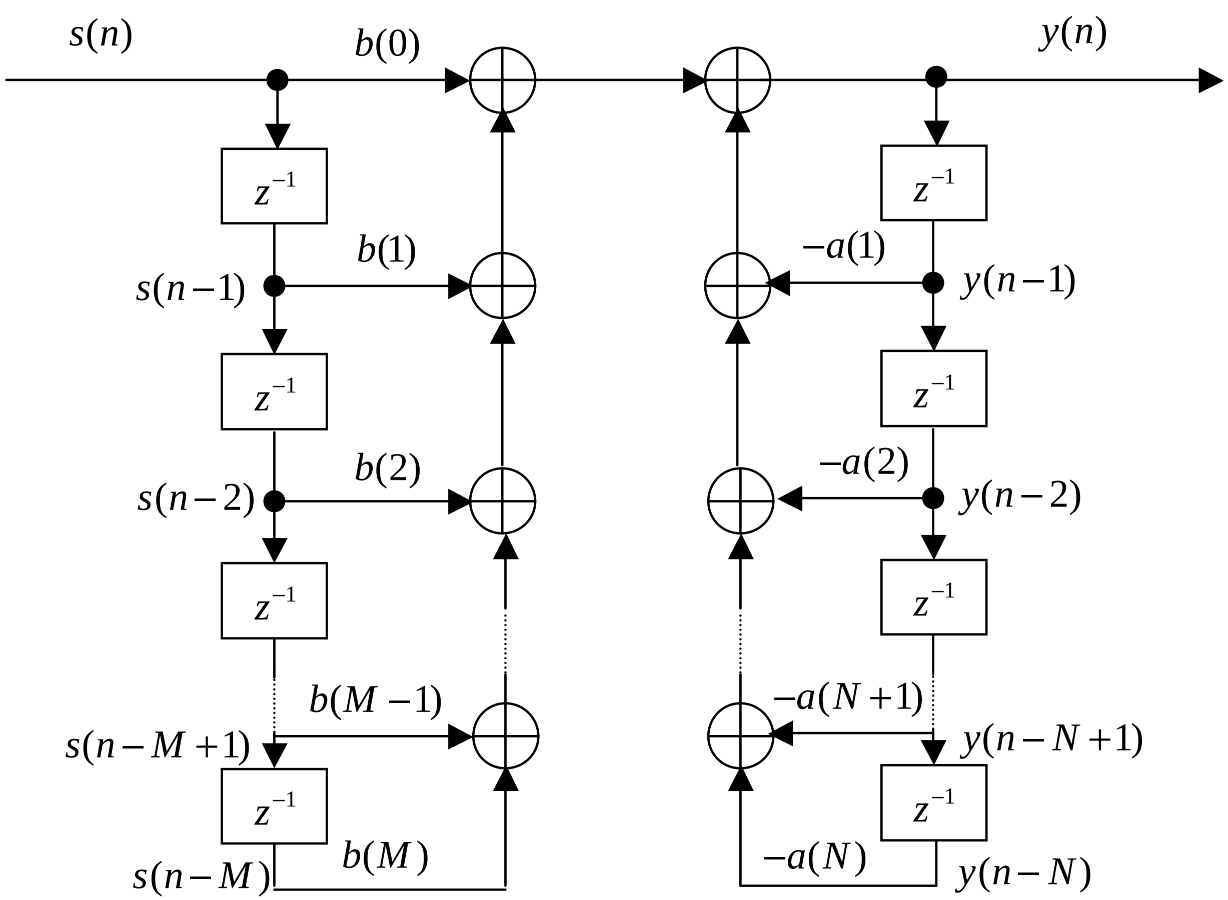
$$\sum_{k=0}^{N} a(k)y(n-k) = \sum_{\ell=0}^{M} b(\ell)s(n-\ell)$$

- Formulação recursiva

$$y(n) = \frac{1}{a(0)}\left(-\sum_{k=1}^{N} a(k)y(n-k) + \sum_{\ell=0}^{M} b(\ell)s(n-\ell)\right)$$

5. Estrutura de implementação de um sistema IIR

$$a(0) = 1: \quad y(n) = \sum_{\ell=0}^{M} b(\ell) s(n-\ell) - \sum_{k=1}^{N} a(k) y(n-k)$$



6. Resposta em freqüência de um SLIT

$$s(n)=e^{j\omega n} \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)=e^{j\omega n}H(e^{j\omega})$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)s(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\omega(n-k)}$$

$$= e^{j\omega n} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}}_{\text{Resposta em freqüência}} = e^{j\omega n}H(e^{j\omega})$$

6. Resposta em freqüência

- É 2π-periódica:

$$H\left(e^{j(\omega+2k\pi)}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \underbrace{e^{-j(\omega+2k\pi)n}}_{e^{-j\omega n}} = H(e^{j\omega})$$

- É uma função complexa de ω:

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})} \quad \text{(módulo)}$$

$$\theta(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} \quad \text{(fase)}$$

6. Sistema com resposta ao pulso unitário real

- O complexo conjugado de $H(e^{j\omega})$ é

$$H^*(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^*(k)e^{j\omega k}$$

- Se o $h(n)$ for real, então:

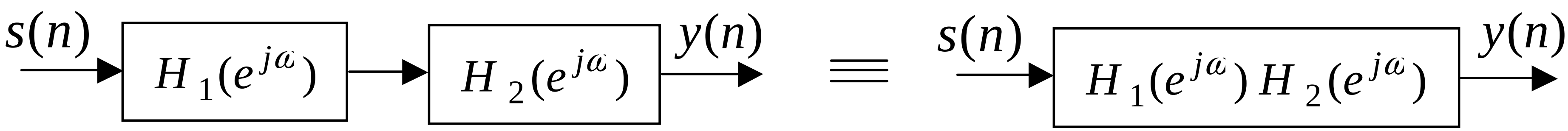
$$H^*(e^{j\omega}) = H(e^{-j\omega})$$

$$\theta(\omega) = -\theta(-\omega)$$ Fase: função ímpar

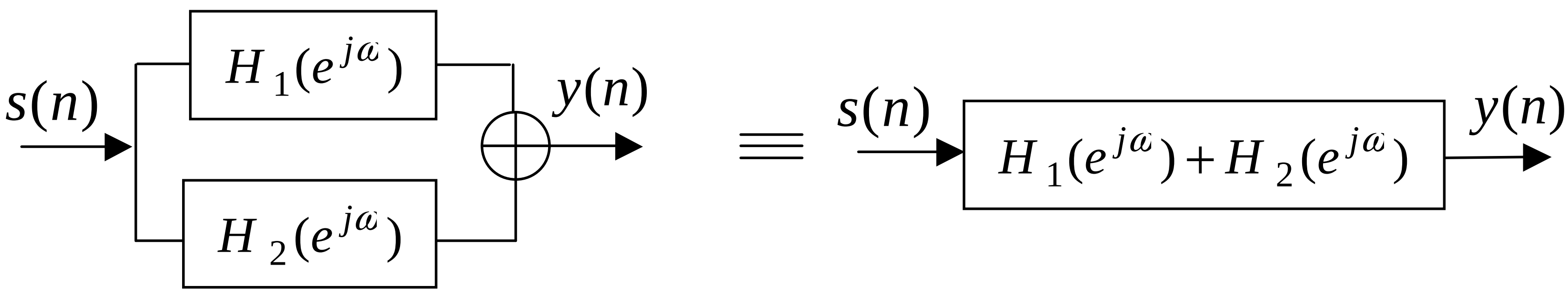
$$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|$$ Módulo: função par

6. Associação de sistemas

Associativa



Distributiva



6. Exemplo 1: Sistema de média móvel

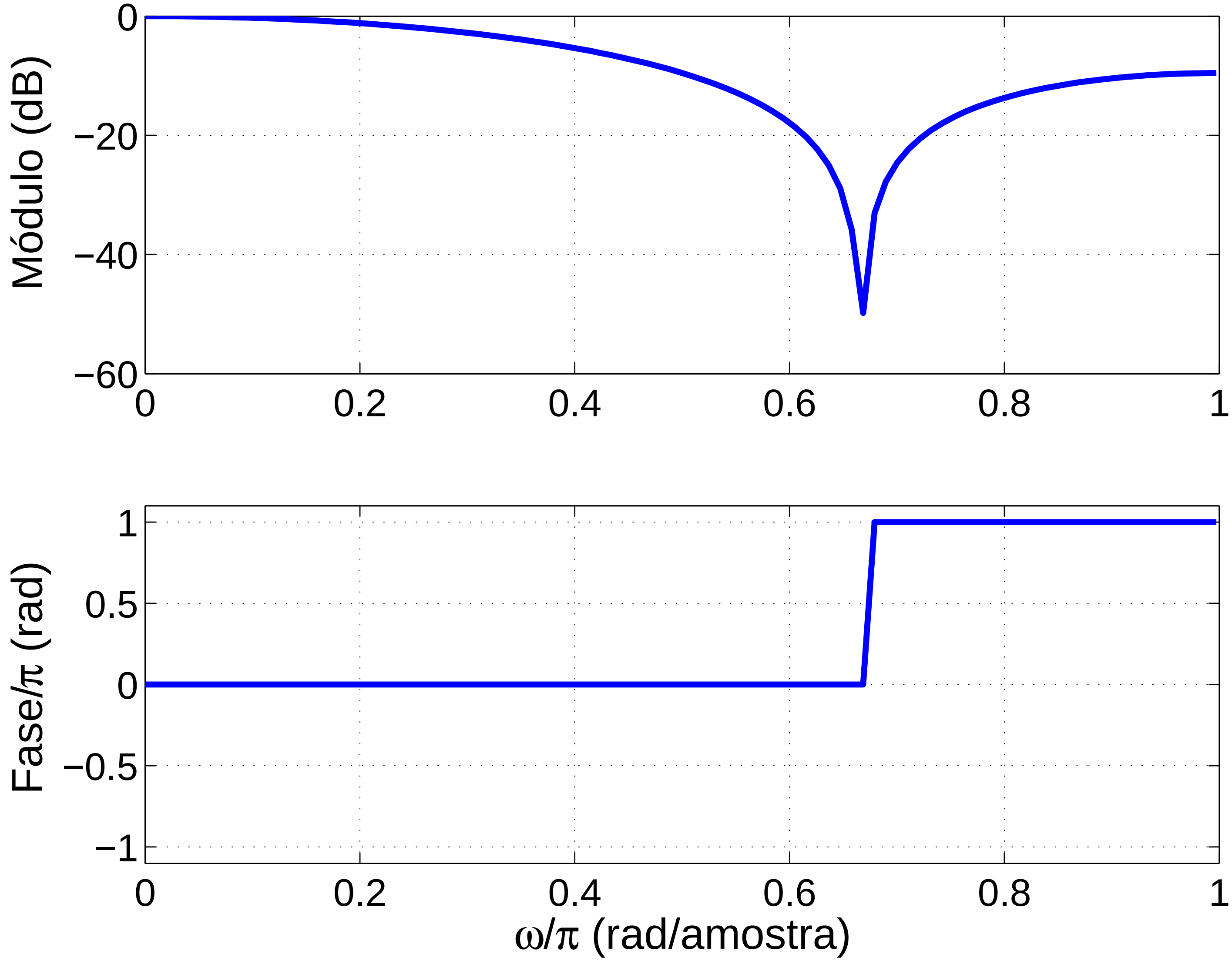
$$y(n) = \frac{1}{3}\Big[s(n-1) + s(n) + s(n+1)\Big]$$

- Resposta ao pulso unitário
$$h(n) = (1/3)\big[\delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1)\big]$$
- Resposta em freqüência

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-1}^{k=1} h(k)e^{-j\omega k} = \frac{1}{3}\Big[e^{-j\omega(-1)}+e^{-j\omega 0}+e^{-j\omega 1}\Big]$$

- Módulo: $|H(e^{j\omega})| = (1/3)|2\cos(\omega) + 1|$
- Fase: $\theta(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \omega \leq 2\pi/3 \\ \pi, & 2\pi/3 \leq \omega \leq \pi \end{cases}$

6. Resposta em freqüência: módulo e fase



6. Sistema descrito por equação de diferenças

$$y(n) = \sum_{\ell=0}^{M} b(\ell)s(n-\ell) - \sum_{k=1}^{N} a(k)y(n-k)$$

Entrada $s(n) = e^{j\omega n}$

Saída $y(n) = e^{j\omega n}H(e^{j\omega}) = s(n)H(e^{j\omega})$

Resposta em freqüência:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\displaystyle\sum_{\ell=0}^{M} b(\ell)e^{-j\omega\ell}}{1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a(k)e^{-j\omega k}}$$