

# Experiência II (aulas 03 e 04)

## Densidade de sólidos

---

1. Objetivos
2. Introdução
3. Procedimento experimental
4. Análise de dados
5. Referências
6. Apêndice: Propagação de incertezas

### 1. Objetivos

O objetivo desta experiência consiste em diferenciar o tipo de material plástico que compõe objetos sólidos pela determinação de sua densidade. A densidade de um sólido não pode ser obtida a partir de uma medida direta. É preciso medir a massa e o volume do objeto para em seguida calcular a sua densidade. Portanto, o valor da densidade e sua incerteza vão depender de outras duas medidas. Esse processo leva à **propagação de incertezas** que iremos estudar nesta aula. Também iremos discutir como combinar medidas com diferentes incertezas e a **compatibilidade** entre duas medidas ou entre uma medida e um valor esperado.

### 2. Introdução

A densidade de um sólido homogêneo é definida por

$$d = \frac{m}{V},$$

onde  $m$  é a massa do sólido e  $V$  é o seu volume. Para a identificação de um plástico, a incerteza na densidade é tão importante quanto o próprio valor medido. Por exemplo, se a densidade obtida de um plástico  $X$  é  $d_x = 1,15 \text{ g/cm}^3$  e a incerteza correspondente é  $\sigma_x = 0,20 \text{ g/cm}^3$ , o resultado é praticamente inútil para a identificação do plástico, pois a grande maioria dos plásticos têm densidades entre  $0,9 \text{ g/cm}^3$  e  $1,4 \text{ g/cm}^3$ . Se, por outro lado, a incerteza é  $\sigma_x = 0,05 \text{ g/cm}^3$ , então o número de possibilidades é bem menor e o plástico pode ser identificado com a ajuda de outros critérios mais simples, tais como transparência, consistência e coloração. Assim, podemos perceber a necessidade de uma teoria para a propagação das

incertezas das medidas primárias (geométricas e massa) para se obter a densidade e, em particular, o cálculo da incerteza no resultado final.

### 3. Procedimento Experimental

A parte experimental desta aula consiste em determinar as massas ( $m_i$ ) e os respectivos volumes ( $v_i$ ) de uma amostra de cilindros feitos do mesmo plástico. As massas são determinadas por meio de balanças e os volumes devem ser calculados a partir das dimensões geométricas de cada sólido aplicando aos mesmos um modelo tridimensional conveniente. Essas medições serão feitas com uma régua e um paquímetro, conforme o caso.

Cada equipe receberá um pote contendo peças feitas de um mesmo plástico para as quais deverão ser determinadas suas densidade a partir dos comprimentos e suas respectivas massas. Apesar das peças em um determinado pote serem feitas do mesmo plástico, diferentes potes contém peças feitas de plásticos diferentes, que deverão ser identificados no final da experiência.

#### **Situação 1:**

Meça primeiramente a massa das peças usando uma balança digital e suas dimensões com uma régua.

#### **Situação 2:**

Meça novamente as massas utilizando uma balança analítica (que tem menor divisão de 0,0001g) e utilize as dimensões dos cilindros obtidas com a régua para o cálculo do volume.

#### **Situação 3:**

Desta vez, utilize o valor da massa obtido com a balança digital e meça as dimensões dos cilindros com um paquímetro.

Como regra geral de procedimento em física experimental, deve-se anotar os dados da maneira mais clara e organizada possível. O significado de um determinado número pode ser perfeitamente claro no momento em que se faz a experiência, mas pode se tornar um pouco obscuro alguns dias após e totalmente confuso depois de algumas semanas. O melhor, neste caso, é fazer uma figura para cada objeto, indicando as grandezas relevantes (massa, comprimento, diâmetro, etc.) e posteriormente anotar em tabelas os valores medidos de cada grandeza. Também devem ser anotadas as características dos instrumentos utilizados, tais como marca, modelo, número de série, menor divisão e outros detalhes.

## 4. Análise de dados

Calcule o volume  $v_i$  de cada peça, sua respectiva incerteza  $\sigma_{v_i}$  e sua incerteza relativa ( $\sigma_{v_i}/v_i$ ) para cada uma das situações acima. Organize os resultados obtidos em cada situação em tabelas diferentes. Lembre-se de que as incertezas devem ser propagadas corretamente a partir das incertezas das grandezas primárias. Leia o Apêndice no final desta aula ou consulte o capítulo 8 da referência 1.

Novamente com o auxílio da teoria de propagação de erros, determine a densidade,  $d_i$ , de cada peça e sua incerteza,  $\sigma_{d_i}$ , considerando as três situações. Nesse caso, organize os valores de densidade que você obteve para cada tipo de material numa mesma tabela, a fim de compararmos os resultados obtidos por instrumentos de medidas diferentes. Qual situação propiciou o resultado mais preciso? Por quê? Os resultados são compatíveis, isto é, eles concordam entre si? Como podemos compará-los? Para serem considerados compatíveis é preciso que os valores numéricos das medidas sejam iguais? Que critério usar para definir a compatibilidade entre os resultados?

Utilizando uma tabela de densidade de plásticos (a ser fornecida pelo professor) identifique o material de cada equipe a partir da compatibilidade do valor obtido com as medidas com o valor esperado para cada tipo de plástico. Os valores de densidade que você obteve permitiram uma identificação de todos os tipos de materiais (sem ambigüidades)? Todas as três situações de medida realizadas permitem essa identificação? Discuta em detalhes.

## 5. Referências:

1. J. H. Vuolo et al, Física Experimental 1 para o Bacharelado em Física, Geofísica e Meteorologia, Instituto de Física da USP (2005).
2. J. H. Vuolo, Fundamentos da Teoria de Erros, São Paulo, Editora Edgard Blucher, 2ª edição (1996)
3. J. C. Sartorelli et al, Introdução às Medidas em Física, Notas de aula, Instituto de Física da USP, (2004).

## 6. Apêndice: Propagação de incertezas

Quando efetuamos uma operação matemática sobre uma medida que apresenta incerteza, o resultado a ser obtido apresentará uma incerteza final que dependerá da incerteza da grandeza primária. Caso desejemos determinar uma grandeza que depende de várias medidas, as incertezas de todas as medidas irão influir no resultado final. De que forma as incertezas das grandezas primárias irão influir na incerteza da grandeza a ser determinada?

Para exemplificarmos, consideremos o cálculo do volume de um cilindro que vocês utilizaram nesta aula. Como sabemos, o volume de um cilindro é dado pela fórmula:

$$V = \pi R^2 H,$$

onde  $R$  e  $H$  são o raio e a altura do cilindro, respectivamente. Fica claro, que a incerteza no volume do cilindro depende tanto da incerteza do raio quanto da incerteza da altura do mesmo. O raio e a altura influirão da mesma maneira na incerteza do volume?

A resposta é não, pois o volume do cilindro varia com o raio  $R$  de uma maneira diferente do que varia com a altura  $H$ . Dessa forma, a influência do raio e da altura será diferente no resultado final.

Pode-se mostrar que a incerteza  $\sigma_w$  de uma grandeza hipotética  $w = w(x, y, z, \dots)$ , que depende das variáveis  $x, y, z, \dots$ , é dada pela fórmula:

$$\sigma_w^2 = \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \sigma_z^2 + \dots,$$

onde os termos dentro dos parênteses são derivadas parciais da função  $w = w(x, y, z, \dots)$  com relação as variáveis  $x, y, z, \dots$ . A soma quadrática pode ser justificada pelo fato de que não seria razoável somá-las simplesmente, porque isto implicaria dizer que cada vez que o efeito da grandeza  $x$  estivesse no seu extremo, as demais também deveriam estar. Faria menos sentido ainda combiná-las com uma subtração, uma vez que quando combinamos várias grandezas primárias com incertezas, o resultado final deve ter uma incerteza maior e não menor.

Ainda no exemplo do cálculo do volume do cilindro, a incerteza no cálculo volume  $\sigma_V$  é dada pela expressão:

$$\sigma_V = \sqrt{\left( \frac{\partial V}{\partial R} \right)^2 \sigma_R^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial H} \right)^2 \sigma_H^2} = \sqrt{2\pi R H \sigma_R^2 + \pi R^2 \sigma_H^2}$$

onde as expressões dentro dos parênteses são os resultados das derivadas parciais de  $V$  com relação à  $R$  e  $H$ , respectivamente.

Dividindo os dois membros da equação acima pelo volume  $V$ , podemos mostrar que:

$$\frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{\left(2\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_H}{H}\right)^2},$$

isto é, a incerteza no cálculo do volume pode ser expressada em termos das incertezas relativas do raio e volume  $\sigma_R/R$  e  $\sigma_H/H$ , respectivamente. Muitas vezes é mais vantajoso trabalharmos com as incertezas relativas, como fizemos acima, pois simplifica os cálculos e deixa clara a influência da incerteza de cada uma das medidas no valor da incerteza da medida final.