Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental

Prof. Zwinglio Guimarães

2º semestre de 2016

Tópico 2 – 2ª aula – 24/08/2016

A função densidade de probabilidade (revisão)

- A função densidade de probabilidade rege a probabilidade de se obter um dado experimental no intervalo $[x_a, x_b]$:

$$P(x \in [x_a, x_b]\,) = \int_{x_a}^{x_b} f(x)dx$$

onde $f(x)$ é a função densidade de probabilidade.

- $f(x)$ tem dimensão $[u.\,x]^{-1}$ **(a probabilidade é adimensional)**
- Se $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade, então:

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Principais parâmetros de uma função densidade de probabilidade (revisão)

- **O valor médio (verdadeiro), x_0, que é obtido por:**

$$x_0 = \langle\, x \,\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

- **E o desvio-padrão (verdadeiro), σ, que é obtido por:**

$$\sigma^2 = \langle\, (x - x_0)^2 \,\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0)^2\, f(x)\, dx$$

➢ **Consideração prática:** $\langle\, (x - x_0)^2 \,\rangle = \langle\, x^2 \,\rangle - x_0^2$

Exemplo 1

- **Função densidade de probabilidade do erro devido ao arredondamento de amplitude *L***

$$f(x) = \begin{cases} A & \text{se} \quad |x| \leq \frac{L}{2} \\ \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- $A = {}^{1}\!/_{L}$
- $x_0 = 0$
- $\sigma = {}^{L}\!/_{\sqrt{12}}$
- $P(x \in [x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]) = {}^{\sqrt{3}}\!/_{3} \cong 0{,}577$

Exemplo 2

- **Função densidade de probabilidade do intervalo de tempo entre dois eventos aleatórios independentes**

$$f(x) = \begin{cases} A\, e^{\left(\frac{-x}{L}\right)} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- $A = {}^{1}/_{L}$
- $x_0 = L$
- $\sigma = L$

Exercício

- **Calcular** $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\sigma}$ **e** $\boldsymbol{P(x \in [x_0 - \sigma, x_0 + \sigma])}$ ***para:***

$$f(x) = \begin{cases} A\,(L^n - |x|^n) & \text{se} \quad |x| \leq L \\ \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- n=1 (triangular): $A = \frac{1}{L^2}$ $\quad \sigma = \frac{L}{\sqrt{6}}$ $\quad P \cong 0{,}650$
- n=2 (parabólica): $A = \frac{3}{4\,L^3}$ $\quad \sigma = \frac{L}{\sqrt{5}}$ $\quad P \cong 0{,}626$
- n=3 (cúbica): $A = \frac{2}{3\,L^4}$ $\quad \sigma = \frac{L\sqrt{2}}{3}$ $\quad P \cong 0{,}612$
- n=4 (4º grau): $A = \frac{5}{8\,L^5}$ $\quad \sigma = \frac{L\sqrt{5}}{\sqrt{21}}$ $\quad P \cong 0{,}603$

Outros parâmetros de uma função densidade de probabilidade

- **Moda, $\boldsymbol{x_{mp}}$**: valor de x em que $f(x)$ é máximo

- **Mediana, $\boldsymbol{x_M}$**: valor de x tal que a probabilidade de se obter um dado com $x \leq x_M$ é igual ao de $x \geq x_M$. Ou seja:

$$\int_{-\infty}^{x_M} f(x)dx = \int_{x_M}^{+\infty} f(x)dx = 0.5$$

Momentos de uma função densidade de probabilidade

O **momento de ordem n, $\boldsymbol{\mu_n}$,** é dado por:

$$\mu_n = \langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, f(x) \, dx$$

O **momento central de ordem n, $\boldsymbol{\mu_n^0}$** é dado por:

$$\mu_n^0 = \langle (x - x_0)^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0)^n \, f(x) \, dx$$

Outros parâmetros úteis para caracterizar funções densidade de probabilidade: Momentos centrais normalizados

- Obliquidade ou Assimetria ("***skewness***"):

$$S = \frac{\mu_3^0}{\sigma^3} = \frac{\langle\, (x - x_0)^3 \,\rangle}{\sigma^3}$$

- Curtose ("***kurtosis***"):

$$K = \frac{\mu_4^0}{\sigma^4} = \frac{\langle\, (x - x_0)^4 \,\rangle}{\sigma^4}$$

No caso de variáveis discretas

$$\int \phi(x) f(x) dx \longrightarrow \sum_i \phi(X_i)\ F(X_i)$$

onde $F(X)$ é a função de probabilidade de obter em uma medição o valor X.

- No caso de comparações com histogramas as expressões para variáveis discretas são usadas juntamente com a aproximação

$$F(X) \cong f(x)\Delta x$$

onde Δx é a largura de cada canal do histograma.

A função densidade de probabilidade gaussiana

- A função densidade de probabilidade gaussiana é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2}$$

"...lei em que todos creem. Os experimentais pensam que é um teorema matemático e os matemáticos, que é um fato experimental.“

(citado em J.-P. Benzécri, *Histoire et Prehistoire de l'Analyse des Données*. Paris, Bordas, 1982)