Corrente Alternada

Vamos apresentar um breve resumo dos conceitos mais importantes relativos ao funcionamento de circuitos em corrente alternada.

Uma tensão alternada é uma diferença de potencial que varia no tempo. Uma tensão alternada que tem um grande número de aplicações práticas é a que varia harmonicamente no tempo (do tipo senoidal), e pode ser descrita como:

$$V(t) = V_P \cos(\omega t + \phi_0) \tag{1.1}$$

onde: $\mathbf{V_P}$ é a tensão máxima ou tensão de pico ou, ainda, amplitude, ω é a frequência angular e ϕ_0 é a fase da tensão alternada no instante **t=0**. A frequência angular, ω, é dada por:

$$\omega = 2\pi f \tag{1.2}$$

onde **f** é a frequência da oscilação e igual ao inverso do período, **T**.

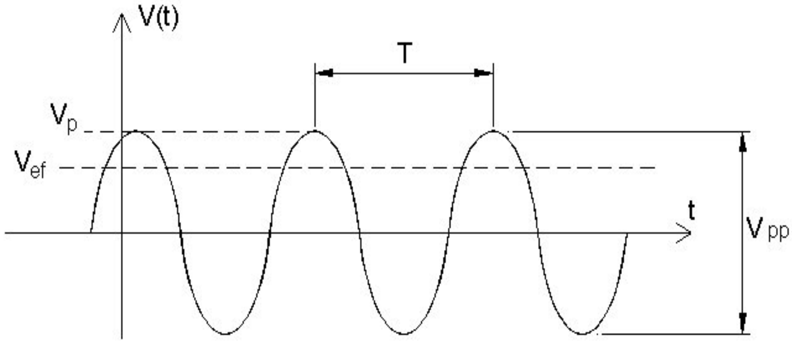

Figura 1.1: Tensão alternada senoidal em função do tempo.

A corrente alternada pode ser representada da mesma forma:

$$i(t) = i_P \cos(\omega t + \phi_1) \quad \textbf{(1.3)}$$

Vamos estudar o caso de um circuito de uma malha que consiste de um gerador de tensão alternada, uma resistência ôhmica, $\mathbf{R_1}$, conhecida e um elemento qualquer de circuito, que vamos chamar de elemento **X**:

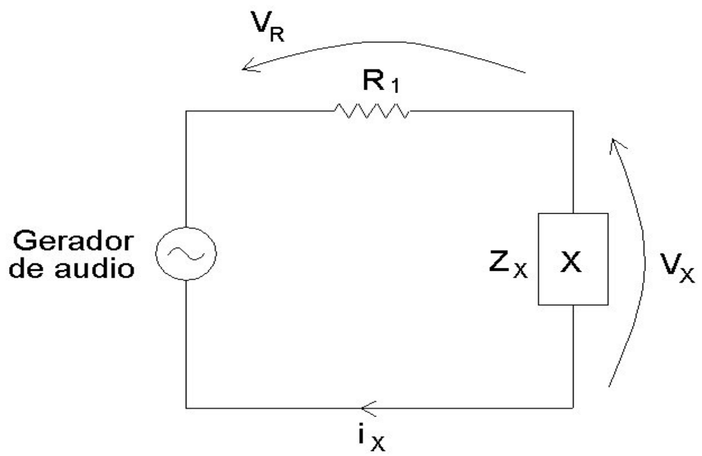

Figura 1.2: Circuito para estudo do elemento X.

Supondo que o elemento **X** seja um elemento resistivo ôhmico, a lei de Ohm, é válida :

$$V = Ri \quad \text{e} \quad (R = cte) \quad \textbf{(1.4)}$$

sendo **V** e **i** a tensão e a corrente aplicadas ao elemento estudado, respectivamente.

Portanto, no caso de tensão alternada, vamos ter a lei de Ohm escrita como:

$$V(t) = Ri(t) \quad \text{e} \quad (R = cte) \qquad \textbf{(1.5)}$$

como (considerando, por uma questão de simplicidade, a fase inicial ϕ_0, igual a zero):

$$V(t) = V_P \cos(\omega t) = Ri(t) \qquad \textbf{(1.6)}$$

então, obrigatoriamente, temos que :

$$i(t) = i_P \cos(\omega t) \quad \text{e} \quad R = \frac{V_P}{i_P} = cte \qquad \textbf{(1.7)}$$

neste caso, então, as fases iniciais da tensão e da corrente são obrigatoriamente iguais para que a lei de Ohm (**equação 1.5**) seja válida. E a resistência, **R**, é a razão entre a tensão de pico, ou máxima, aplicada ao resistor e a corrente de pico, ou máxima, que atravessa o resistor ôhmico estudado.

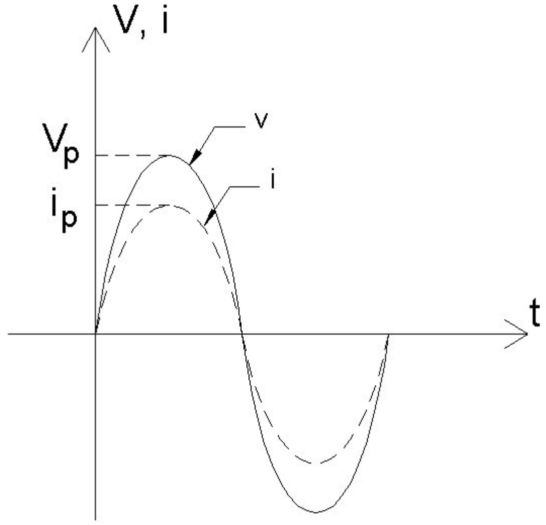

Figura 1.3: Tensão e corrente alternadas, em função do tempo, para o resistor.

Vamos ver agora o que ocorre no caso do elemento **X** ser um capacitor, submetido a uma tensão cossenoidal, do tipo:

$$V(t) = V_P \cos(\omega t) = \frac{q(t)}{C} \qquad \textbf{(1.8)}$$

onde **q(t)** é a carga do capacitor e ***C*** é uma constante de proporcionalidade chamada de capacitância. A carga pode ser escrita como a integral da corrente que passa pelo elemento:

$$q(t) = \int i(t)dt = \int i_P \cos(\omega t)dt = \left(\frac{i_P}{\omega}\right) sen(\omega t) \qquad \textbf{(1.9)}$$

A voltagem no capacitor, em função do tempo, que é a razão entre a carga e a capacitância, fica, portanto:

$$V(t) = \left(\frac{i_P}{\omega C}\right) sen(\omega t) \qquad \textbf{(1.10)}$$

essa expressão não é uma igualdade porque a tensão aplicada é **$V(t)=V_P \cos(\omega t)$** (***equação 1.8***). Então, para que a **expressão 1.10** se torne uma igualdade a corrente **$i(t)$** não pode ser simplesmente um cosseno com a fase do argumento igual a zero. Se **$i(t)$** for:

$$i(t) = i_P \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -i_P sen(\omega t) \qquad \textbf{(1.11)}$$

vamos ter:

$$V(t) = V_P \cos(\omega t) = \frac{1}{C}\int - i_P sen(\omega t) dt = \left(\frac{i_P}{\omega C}\right)\cos(\omega t) \qquad \textbf{(1.12)}$$

que é, de fato, uma igualdade se:

$$V_P = \frac{i_P}{\omega C} \qquad \textbf{(1.13)}$$

A razão entre as amplitudes de pico, ou máximas, da tensão aplicada e da corrente que atravessa o capacitor é chamada de reatância capacitiva, **X_C**:

$$X_C = \frac{V_P}{i_P} = \frac{1}{\omega C} \qquad \textbf{(1.14)}$$

Concluímos, então, que num capacitor submetido a uma tensão alternada, a corrente está adiantada de **$\pi/2$** em relação à tensão aplicada ao capacitor (**Atenção**: a defasagem de **$\pi/2$** é entre a corrente e a tensão diretamente sobre o capacitor e não quaisquer outras).

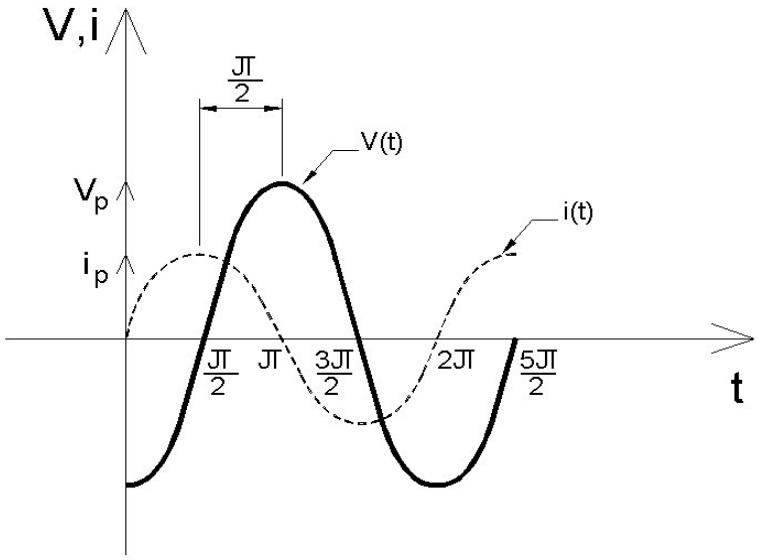

Figura 1.4: Tensão e corrente alternadas em função do tempo, para o capacitor.

No caso do elemento de circuito **X** ser um indutor submetido a uma tensão alternada cossenoidal, vamos ter:

$$V(t) = V_P \cos(\omega t) = L\frac{di}{dt} \tag{1.15}$$

Se a corrente for dada por:

$$i(t) = i_P \cos(\omega t) \tag{1.16}$$

e se quisermos obter a tensão sobre o indutor a partir da corrente que o atravessa e da sua indutância **L**, vamos derivar a corrente, segundo a **equação 1.15**:

$$V(t) = -Li_P sen(\omega t) \tag{1.17}$$

o que não é uma igualdade, porque **V(t)** é um cosseno. Portanto, também neste caso a fase inicial da corrente não pode ser igual à da tensão no indutor. Para que a **expressão 1.17** se torne uma igualdade a corrente tem que ser da forma:

$$i(t) = i_P \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = i_P sen(\omega t) \tag{1.18}$$

assim, quando derivarmos a corrente, vamos obter:

$$V(t) = L\frac{di}{dt} = i_P \omega L \cos(\omega t) \tag{1.19}$$

que, de fato, é uma igualdade, somente se:

$$V_P = \omega L i_P \tag{1.20}$$

A razão entre a tensão de pico, ou tensão máxima, aplicada ao indutor e a corrente de pico, ou corrente máxima, que o atravessa é chamada de reatância indutiva **$X_L = \omega L$**. Nota-se que nesse caso a corrente está atrasada de **$\pi/2$** em relação à tensão aplicada ao indutor. Como no caso do capacitor, a defasagem tem esse valor somente quando comparamos a corrente com a tensão aplicada ao indutor, sendo que a defasagem entre a corrente e quaisquer outras tensões existentes no circuito não tem necessariamente esse valor.

De fato, pode-se representar essa defasagem ou na corrente ou na tensão, contanto que ela seja do valor correto e com o sinal correto, veja a **figura 1.5** a seguir:

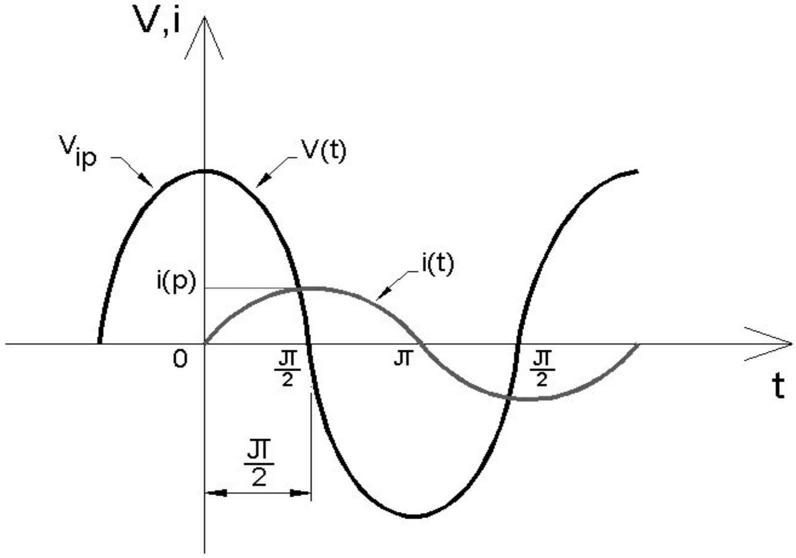

Figura 1.5: Tensão e corrente alternada, em função do tempo, para o indutor.

No caso de um resistor ôhmico não há defasagem entre tensão e corrente. Caso se tenha uma associação de dois resistores, por exemplo, em série, a tensão máxima ou de pico da associação é a soma das tensões máximas ou de pico de cada um:

$$V_{P(R_1+R_2)} = V_{P(R_1)} + V_{P(R_2)} \qquad \textbf{(1.21)}$$

Esse resultado decorre da aplicação direta da lei de Ohm e das leis de Kirchhoff e torna fácil determinar, para qualquer associação de resistores, os parâmetros dessa associação.

Entretanto, quando <u>há defasagem</u> entre tensão e corrente em determinados elementos, circuitos que contenham uma associação mista desses elementos ou deles com resistores, não vão poder ter os parâmetros determinados de maneira tão simples quanto para o caso de circuitos puramente resistivos. Por exemplo, no caso de um indutor (ou capacitor) em série com resistores, ou indutor e capacitor em série, a tensão de pico da associação não é soma das tensões de pico de cada elemento, porque elas não estão em fase. Para achar a tensão de pico da associação, teríamos que somar as tensões de cada um, instante a instante. Isso torna extremamente trabalhoso determinar parâmetros de circuitos que não sejam puramente resistivos.

Porém, esse tratamento fica analiticamente muito mais simples quando se representam as oscilações de corrente e tensão por meio de quantidades complexas. Neste caso pode-se tratar circuitos indutivos e/ou capacitivos e resistivos como no caso de circuitos puramente resistivos. Para relembrar algumas propriedades das quantidades complexas veja a apostila **CFE (parte 2)**, **seção 11.2**. Esse formalismo matemático usado em corrente alternada aplica-se igualmente bem a qualquer tipo de oscilação.

Impedância Real e Complexa

Continuamos, então, o estudo do comportamento de um elemento passivo qualquer de circuito, em corrente alternada, através do circuito simples da **figura 1.2**, proposto na seção anterior, que possui em série um resistor, o elemento desconhecido **X** e um gerador de tensão alternada:

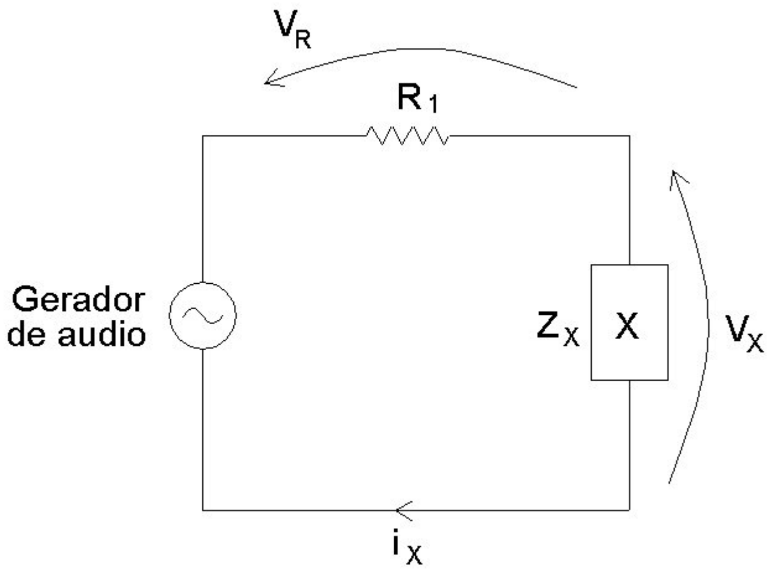

Figura 1.2: Circuito para o estudo do elemento X.

A caracterização completa do elemento **X**, em regime de corrente alternada estacionária, é obtida muito mais facilmente, quando se conhece a **impedância complexa, Z_x,** desse elemento em função da freqüência. Para definir essa grandeza precisamos introduzir a representação por complexos de tensões e correntes alternadas, que está disponível na **seção 11.3** da apostila **CFE** e nas referências aí indicadas.

Resumindo, uma tensão alternada **V(t)**:

$$V(t) = V_P \cos(\omega t + \phi_0) \qquad \textbf{(1.22)}$$

pode ser representada pela parte real da quantidade complexa:

$$\hat{V}(t) = V_P e^{j(\omega t + \phi_0)} \qquad j = \sqrt{-1} \qquad \textbf{(1.23)}$$

e uma corrente alternada **i(t):**

$$i(t) = i_P \cos(\omega t + \phi_1) \qquad \textbf{(1.24)}$$

pode ser escrita como a parte real de:

$$\hat{i}(t) = i_P e^{j(\omega t + \phi_1)} \qquad \textbf{(1.25)}$$

A impedância complexa do elemento **X** bipolar de circuito, $\mathbf{Z_X}$, é definida como a relação entre a tensão complexa e a corrente complexa que atravessa esse elemento:

$$\hat{Z}_X = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)} \qquad \textbf{(1.26)}$$

Por simplicidade, como ϕ_0 pode ser qualquer, a fase inicial da corrente pode ser colocada igual à zero, e, como qualquer número complexo pode ser expresso pela fórmula de Euler:

$$\hat{Z}_X = \frac{V_P e^{j(\omega t + \phi_0)}}{i_P e^{j\omega t}} = Z_0 e^{j(\phi_m)} \qquad \textbf{(1.27)}$$

então, para que a igualdade acima seja verdadeira, temos que ter obrigatoriamente:

$$Z_0 = \frac{V_P}{i_P} \quad \text{e} \quad \phi_0 = \phi_m \qquad \textbf{(1.28)}$$

onde **Z_0** é a impedância real do elemento **X** e ϕ_0 é a diferença de fase entre tensão e corrente nesse elemento, **X,** de circuito, sendo que **V_P** e **i_P** são os valores máximos ou valores de pico da tensão e da corrente, respectivamente, nesse elemento.

Resumindo, se num bipolo com impedância complexa **$Z_X = Z_0 e^{j\phi_0}$**, a corrente for **$i(t) = i_P \cos \omega t$**, a tensão nos terminais desse bipolo será:

$$V(t) = V_P \cos(\omega t + \phi_0) \quad \text{sendo} \quad V_P = Z_0 i_P \qquad \textbf{(1.29)}$$

ou seja, se a corrente é alternada, a tensão também é, mas com uma fase inicial diferindo da fase da corrente de um valor ϕ_0, e , com amplitude de pico, ou máxima, igual a **$Z_0 i_P$** (lembrando que **i_P** é a amplitude máxima, ou de pico da corrente).

Como **Z_X** é um número complexo, pode-se escrevê-lo na forma:

$$\hat{Z}_X = Z_0 e^{j\phi_0} = R + jX = Z_0 \cos\phi_0 + jZ_0 sen\phi_0 \qquad \textbf{(1.30)}$$

onde **R** é a parte real da impedância ou parte resistiva:

$$R = Z_0 \cos \phi_0 \qquad \textbf{(1.31)}$$

No circuito estudado (**figura 1.1**) quando o elemento **X** for um resistor ôhmico, teremos $\phi_0 = 0$ e a impedância é a resistência **R_X**. E **X** é a reatância que é a parte imaginária da impedância:

$$X = Z_0 sen \phi_0 \qquad \textbf{(1.32)}$$

Como já mencionado anteriormente, a grande vantagem da notação complexa é que a impedância complexa equivalente de um circuito qualquer pode ser obtida pelas mesmas regras simples das associações de resistores. A demonstração dessas fórmulas é baseada na definição de impedância complexa e nas leis de Kirchhoff e é análoga às demonstrações das associações de resistores.

Existe um artifício que simplifica muito a soma de tensões (ou correntes) alternadas arbitrárias, e, que, portanto, também simplifica as demonstrações acima, assim como as soluções de circuito de corrente alternada em geral. Ele se baseia no fato que, a soma de duas tensões alternadas arbitrárias como exemplificado na fórmula abaixo:

$$V(t) = V_{P1}\cos(\omega t + \phi_1) + V_{P2}\cos(\omega t + \phi_2) \qquad \textbf{(1.33)}$$

equivale a somar as componentes, no plano **xy**, de dois vetores de módulos $\mathbf{V_{P1}}$ e $\mathbf{V_{P2}}$, girando com velocidade angular ω e com ângulos iniciais, em relação ao eixo **y**, ϕ_1 e ϕ_2, respectivamente. Pode-se realizar a soma vetorial no instante **t=0**, porque a partir desse instante o "vetor soma", que é equivalente à tensão de pico da soma, $\mathbf{V_0}$, também gira com a mesma velocidade angular. Esses vetores girantes são chamados de fasores. A figura a seguir é um exemplo de como esses vetores funcionam para encontrar a tensão soma da ***equação 1.33***:

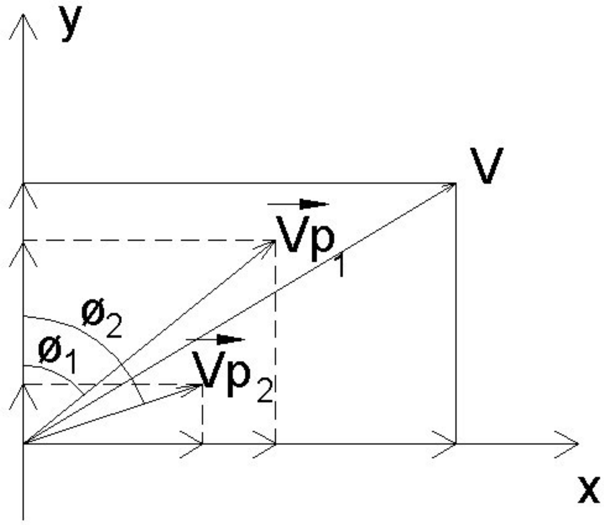

Figura 1.6: Diagrama de fasores para soma de tensões alternadas (equação 1.33).

Por esse diagrama fica evidente que, devido à defasagem, a amplitude da tensão soma, $\mathbf{V_0}$, não é igual à soma dos módulos das amplitudes das componentes, $|\mathbf{V_{P1}}|$ e $|\mathbf{V_{P2}}|$ e sim:

$$V_0^2 = V_{P1x}^2 + V_{P1y}^2 + V_{P2x}^2 + V_{P2y}^2 \qquad \textbf{(1.34)}$$

O método também funciona para circuitos em série com elementos resistivos e não resistivos, porque como a corrente é a mesma para todos os elementos, as tensões de pico em cada elemento são diretamente proporcionais às impedâncias reais desses elementos e as defasagens das tensões também são iguais às das impedâncias complexas (veja as **fórmulas 1.28**). Então, a resistência, **R**, e as reatâncias indutivas e/ou capacitivas podem ser representadas por fasores como mostrado na **figura 1.7** a seguir:

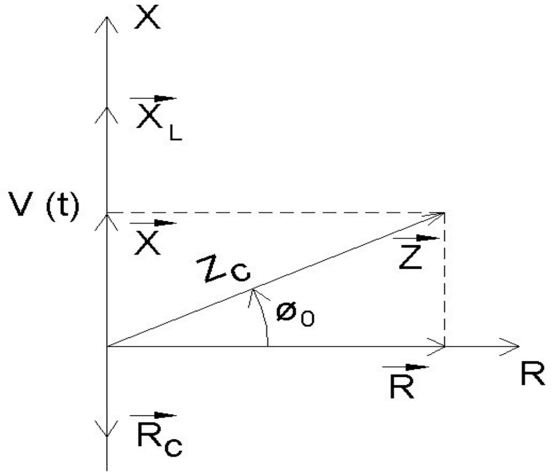

Figura 1.7: Diagrama de fasores representando impedâncias em série.

Da mesma forma, podemos ver que a impedância real $\mathbf{Z_0}$ é igual à soma dos quadrados das impedâncias reais de cada elemento:

$$Z_0^2 = R^2 + X_1^2 + X_2^2 + ... \qquad \textbf{(1.35)}$$

Representando as tensões num circuito que contenha capacitores, indutores e resistores, em série, a fase inicial da tensão no capacitor (puro) em relação à tensão no resistor (que tem a mesma fase da corrente no resistor ou da corrente no circuito, caso este seja um circuito em série) será de ($\mathbf{-\pi/2}$). Para o caso de indutor puro essa mesma fase (da tensão no indutor em relação à tensão no resistor) será de ($\mathbf{+\pi/2}$). No caso do indutor real, ou bobina, equivalente a uma indutância pura mais uma resistência, $\mathbf{R_B}$, podemos somar $\mathbf{R_B}$ à resistência **R** do circuito e encontrar a tensão utilizando fasores. Um exemplo é o de um circuito **RLC**, em série, em que a bobina tem uma resistência interna $\mathbf{R_B}$ que está incluída na resistência **R**, submetido a um gerador de tensão alternada senoidal.

A tensão soma pode ser encontrada pelo diagrama de fasores representado na **figura 1.8**, a seguir:

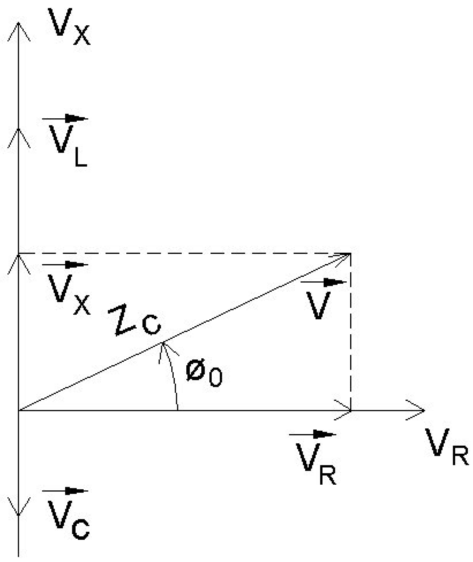

Figura 1.8: Diagrama de fasores para um circuito RLC série.

Potência Transferida a um Bipolo

A potência transferida de um circuito qualquer a uma impedância, também qualquer, a cada instante, é dada por:

$$P(t) = V(t) \bullet i(t) \qquad \textbf{(1.36)}$$

Como **V(t)** e **i(t)** são respectivamente:

$$V(t) = V_P \cos(\omega t + \phi_0) \quad \text{e} \quad i(t) = i_P \cos(\omega t) \qquad \textbf{(1.37)}$$

pode-se escrever a ***equação* 1.36** como:

$$P(t) = V_P i_P \cos(\omega t)\cos(\omega t + \phi_0) \qquad \textbf{(1.38)}$$

Desenvolvendo esses dois cossenos como:

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\cos(\omega t + \phi_0) = \frac{e^{j(\omega t + \phi_0)} + e^{-j(\omega t + \phi_0)}}{2} \qquad \textbf{(1.39)}$$

substituindo na ***equação* 1.38** e reagrupando os termos, obtém-se:

$$P(t)=\left(\frac{V_P i_P}{2}\right)\left(e^{j(2\omega t+\phi_0)}+e^{-j(2\omega t+\phi_0)}+e^{j\phi_0}+e^{-j\phi_0}\right) \qquad \textbf{(1.40)}$$

que é igual a:

$$P(t)=\frac{V_P i_P}{2}\cos(2\omega t+\phi_0)+\frac{V_P i_P}{2}\cos\phi_0 \qquad \textbf{(1.41)}$$

Esse é o valor instantâneo da potência, para encontrar o valor médio num período **T**, pela definição de valor médio em tempo, integra-se **P(t)** num período completo e divide-se por esse período:

$$P(t)=\frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_P i_P}{2}\cos\phi_0 dt+\frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_{Pi_P}}{2}\cos(2\omega t+\phi_0)dt \qquad \textbf{(1.42)}$$

a segunda integral é nula, mas a primeira não. Portanto a potência média num período é:

$$P(t)=\frac{1}{2}V_P i_P \cos\phi_0 \qquad \textbf{(1.43)}$$

Chama-se de valor eficaz da tensão, $\mathbf{V_{ef}}$, o valor $\mathbf{V_P/\sqrt{2}}$ e valor eficaz da corrente, $\mathbf{i_{ef}}$, o valor $\mathbf{i_P/\sqrt{2}}$. Utilizando esses valores a potência média fica:

$$P(t)=V_{ef} i_{ef} \cos\phi_0 \qquad \textbf{(1.44)}$$

O fator $\mathbf{\cos\phi_0}$ é chamado de fator de potência da impedância e suas implicações para o funcionamento dos elementos de circuito estudados nestes experimentos serão discutidas a seguir.

Para a medida de tensões e correntes alternadas utilizando voltímetros ou amperímetros analógicos ou digitais os valores obtidos são os valores eficazes tanto da tensão quanto da corrente. Uma discussão mais detalhada do funcionamento desses aparelhos em tensão e corrente alternada é apresentada na **seção 7.4** da apostila de **CFE** (**parte 1**).

Resistor

Como já foi visto, no caso do resistor ôhmico a defasagem entre tensão e corrente no resistor é nula e a impedância é real:

$$Z_0 = R = \frac{V_P}{i_P} \tag{1.45}$$

Em geral, resistores comuns têm comportamento ôhmico até um determinado valor de potência que é fornecido pelo fabricante. Para garantir o comportamento ôhmico e não chegar a danificar o componente esses valores devem ser respeitados. Além disso, deve-se ter sempre em mente, que componentes reais não se comportam exatamente de acordo com as definições, o que nesse caso quer dizer que resistores reais podem não ter um comportamento resistivo puro mas, dependendo das condições e características de construção do resistor, apresentar capacitâncias e/ou indutâncias parasitas. Esse tipo de comportamento está discutido com mais detalhes na apostila **CFE** (**parte 2**) **seção 12.4**.

A potência média dissipada num resistor sob corrente alternada será:

$$P(t) = V_{ef} i_{ef} \tag{1.46}$$

porque a defasagem entre tensão e corrente, num resistor, é igual a zero, e, portanto o fator de potência, $\cos\phi_0$, é igual a **1**.

Vamos reproduzir a **figura 1.3** para a tensão e corrente alternadas num resistor e incluir nesse gráfico o comportamento da potência instantânea e da potência média para esse elemento. É a **figura 1.9** que, por uma questão de facilitar a visualização está na próxima página.

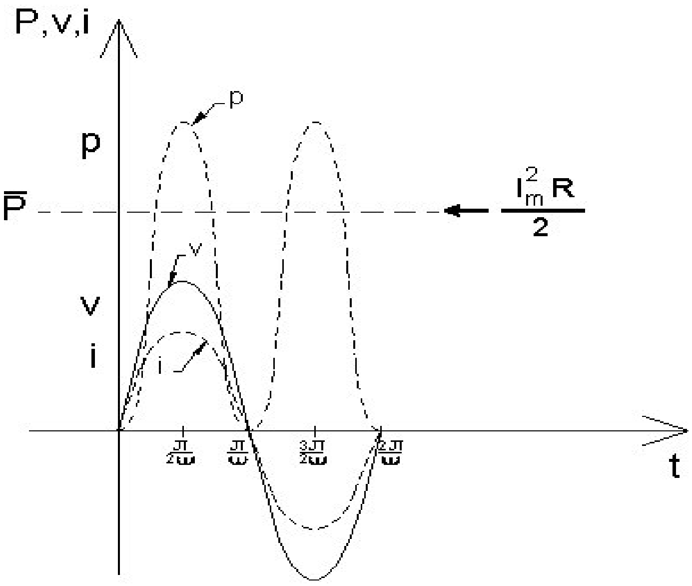

Figura 1.9: Comportamento da potência instantânea e da potência média dissipada num resistor.

Capacitor

Colocando agora um capacitor ideal no lugar do elemento **X** do circuito da **figura 1.1**:

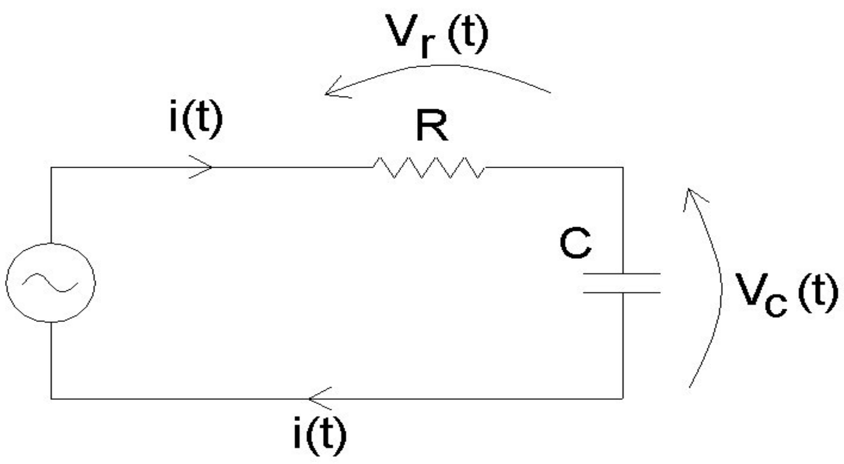

Figura 1.10: Circuito para o estudo do comportamento do capacitor.

A tensão medida sobre o capacitor será:

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int i(t)dt \qquad \textbf{(1.47)}$$

Como vamos utilizar o tratamento complexo, podemos escrever a corrente que passa no circuito como sendo a parte real de:

$$\hat{i}(t) = i_P e^{j\omega t} \qquad \textbf{(1.48)}$$

A tensão sobre o capacitor será, também, a parte real de:

$$\hat{V}(t)=\frac{1}{C}\int\hat{i}(t)dt=\frac{1}{j\omega C}i_P e^{j\omega t}=\frac{1}{j\omega C}\hat{i}(t) \qquad \textbf{(1.49)}$$

mas **1/j** pode ser escrito como:

$$\frac{1}{j}=\frac{j}{j\times j}=-j=-\left(\cos\frac{\pi}{2}+jsen\frac{\pi}{2}\right)=e^{-j\frac{\pi}{2}} \qquad \textbf{(1.50)}$$

ou seja, $\mathbf{V_C(t)}$, fica:

$$V_C(t)=\frac{1}{\omega C}e^{-j\frac{\pi}{2}}i(t) \qquad \textbf{(1.51)}$$

Como a relação entre $\mathbf{V_C(t)}$ e $\mathbf{i(t)}$ é a impedância complexa $\mathbf{Z_C}$, (o índice ***C*** denota o capacitor):

$$\hat{V}_C(t)=\hat{Z}_C\hat{i}(t) \quad \text{e} \quad \hat{Z}_C=Z_0 e^{-j\frac{\pi}{2}}=\hat{X}_C \qquad \textbf{(1.52)}$$

assim sendo a impedância real de um capacitor ou sua reatância capacitiva real $\mathbf{X_C}$ é:

$$Z_0=X_C=\frac{1}{\omega C} \qquad \textbf{(1.53)}$$

e a defasagem entre a tensão no capacitor e a corrente que o atravessa é :

$$\phi_0=-\frac{\pi}{2} \qquad \textbf{(1.54)}$$

o que significa que a tensão está atrasada de **$\pi/2$** em relação à corrente, que é o que se vê na **figura 1.4**.

Da mesma maneira que o resistor, um capacitor real pode ter desvios em relação ao comportamento ideal. Esse comportamento está bem discutido na apostila de **CFE** (**parte 2**) **seção 12.2**. A proposta é, portanto, verificar se o capacitor que está disponível pode ser considerado um capacitor ideal dentro dos intervalos de freqüência e tensão fornecidos pelo gerador de áudio freqüência, e, que sejam tolerados pelos instrumentos de medida.

Em relação à potência, para o caso de um capacitor ideal submetido à corrente alternada, a potência instantânea é:

$$P(t) = \frac{V_P i_P}{2}\cos\phi_0 + \frac{V_P i_P}{2}\cos(2\omega t + \phi_0) \qquad \textbf{(1.55)}$$

Mas, como a integral do segundo termo dessa equação, sobre um período é igual a zero (como já foi visto) e ϕ_0 é igual a **$\pi/2$** para um capacitor ideal, conclui-se que a **potência média dissipada por um capacitor ideal é nula**. O gráfico a seguir mostra a tensão, a corrente e a potência instantânea sobre um capacitor ideal:

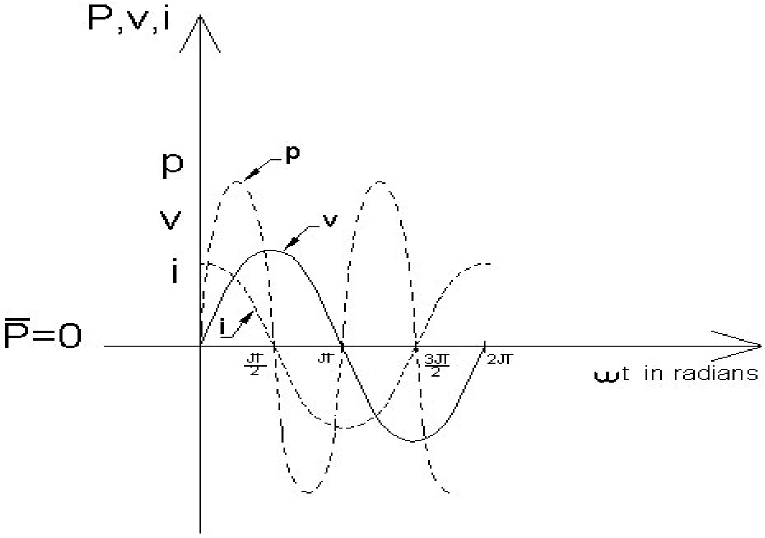

Figura 1.11: Comportamento da potência instantânea e da potência média para o caso de um capacitor ideal.

Indutor

Considerando que se coloque um indutor ideal no lugar do elemento **X**, no circuito da **figura 1.2**:

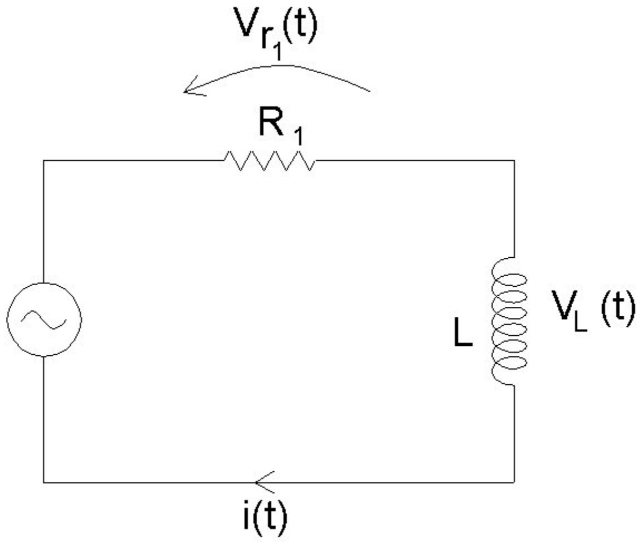

Figura 1.13: Circuito para o estudo do comportamento de um indutor.

A tensão no indutor, $\mathbf{V_L(t)}$, será dada por:

$$V_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{1.56}$$

Adotando a notação complexa:

$$\hat{V}_L(t) = L\frac{d\hat{i}(t)}{dt} \tag{1.57}$$

e considerando que a representação complexa da corrente no circuito seja:

$$\hat{i}(t) = i_P e^{j\omega t} \tag{1.58}$$

a tensão no indutor será a parte real de:

$$\hat{V}_L(t) = j\omega L i_P e^{j\omega t} = j\omega L \hat{i}(t) \qquad \textbf{(1.59)}$$

pode-se escrever **j** como:

$$j = \cos\frac{\pi}{2} + j sen\frac{\pi}{2} = e^{j\frac{\pi}{2}} \qquad \textbf{(1.60)}$$

Portanto, a tensão complexa no indutor ideal tem a forma:

$$\hat{V}_L(t) = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} \hat{i}(t) \qquad \textbf{(1.61)}$$

Como sabemos que a impedância complexa é a razão entre a tensão complexa e a corrente complexa no indutor ideal em estudo, concluímos que:

$$\hat{V}_L(t) = \hat{Z}_L \hat{i}(t) \quad \text{e} \quad \hat{Z}_L = \hat{X}_L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} \qquad \textbf{(1.62)}$$

portanto, a impedância real ou reatância, $\mathbf{X_L}$, desse indutor é :

$$Z_{0L} = X_L = \omega L \qquad \textbf{(1.63)}$$

a diferença de fase da tensão no indutor em relação à corrente, no mesmo, é:

$$\phi_0 = +\frac{\pi}{2} \qquad \textbf{(1.64)}$$

portanto, a tensão, no indutor, $\mathbf{V_L(t)}$, está adiantada de $\boldsymbol{\pi/2}$ em relação à corrente. Isso pode ser visto na **figura 1.5**.

Quanto à potência instantânea dissipada no indutor ideal, como já calculado é igual a:

$$P(t) = \frac{V_P i_P}{2}\cos\phi_0 + \frac{V_P i_P}{2}\cos(2\omega t + \phi_0) \qquad \textbf{(1.65)}$$

e, como é o caso do capacitor também, a **potência média dissipada num indutor ideal é nula**, porque a integral do segundo termo da equação acima é nula num período e **$\cos\phi_0$** é igual a zero, porque ϕ_0 para um indutor ideal é igual a **$\pi/2$.** Isso pode ser observado na **figura 1.14** a seguir.

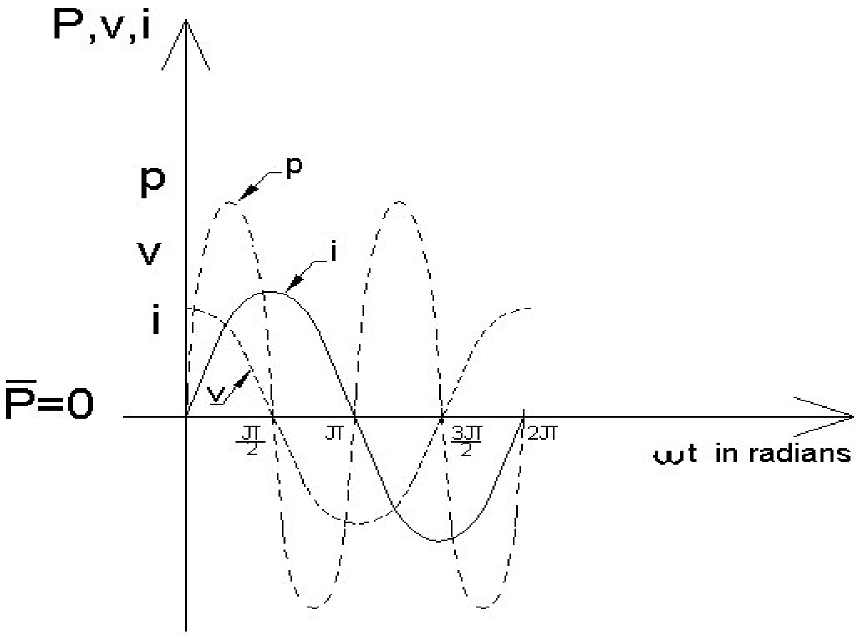

Figura 1.14: Tensão, corrente e potência dissipada num indutor ideal.

Porém, raramente, o modelo de um indutor ideal pode ser usado para bobinas, pois como elas são fios condutores muito longos enrolados, sua resistência elétrica é, em geral, significativa e não pode ser desprezada. Na **seção 12.3** da apostila de **CFE** é feita uma discussão de como essa característica e alguns outros efeitos podem inviabilizar a adoção do modelo de indutor ideal para uma bobina comum.

Para as condições do laboratório, quer dizer, para a bobina, circuito e intervalo de freqüência disponível, não é possível adotar o modelo de indutor ideal. Pelo menos a resistência da bobina deve ser levada em conta. Isso significa que o modelo adotado para a bobina, não é mais o de uma indutância pura, mas de uma indutância pura ligada, em série, a uma resistência ôhmica.

Portanto, o circuito experimental não é o da **figura 1.13,** mas o da **figura 1.15,** a seguir:

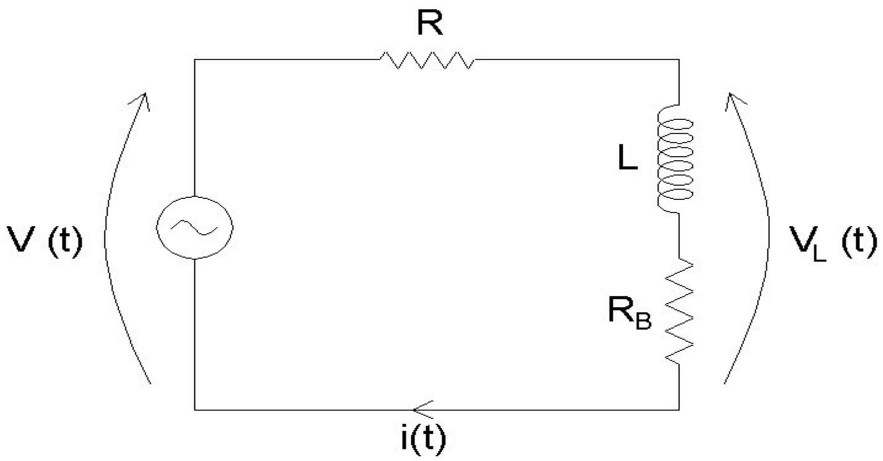

Figura 1.15: Circuito para o estudo do comportamento de uma bobina.

Para um circuito, em série, de uma resistência e de uma indutância pura, a impedância complexa equivalente é a soma das impedâncias complexas de cada elemento. A impedância da resistência da bobina é $\mathbf{R_B}$ e a impedância complexa do indutor puro é $\mathbf{X_L}$:

$$X_L = j\omega L \qquad \textbf{(1.66)}$$

Portanto a impedância complexa da associação é:

$$\hat{Z} = R_B + j\omega L = Z_0 e^{j\phi_0} \qquad \textbf{(1.67)}$$

A impedância real é o módulo de **Z** :

$$Z = \sqrt{\hat{Z}\hat{Z}^*} = \sqrt{R_B^2 + \omega^2 L^2} \qquad \textbf{(1.68)}$$

e a defasagem entre a tensão da associação em série $\mathbf{R_B}$ mais **L** e a corrente que a percorre, pode ser escrita a partir da ***equação* 1.66** como sendo:

$$tg\phi_0 = \frac{\omega L}{R_B} \qquad \textbf{(1.69)}$$

ou:

$$\phi_0 = arctg\frac{\omega L}{R_B} \qquad \textbf{(1.70)}$$

Nota-se que a essa defasagem não é mais **π/2,** mas um outro ângulo que depende da freqüência ω, da indutância **L** e da resistência do indutor $\mathbf{R_B}$**.**

Do ponto de vista da potência dissipada pela bobina é fácil demonstrar que a expressão para a potência instantânea é:

$$P(t) = V_B(t) i_B(t) \qquad \textbf{(1.71)}$$

$$P(t) = V_{LP} i_{LP} \cos(\omega t)\cos(\omega t + \phi) \qquad \textbf{(1.72)}$$

e a potência média é, pela definição de valor médio, a potência instantânea integrada num período e dividida pelo período. Refazendo o mesmo cálculo já feito anteriormente obtém-se:

$$P(t) = V_{Lef} i_{Lef} \cos\phi \qquad \textbf{(1.73)}$$

só que agora ϕ não é igual a $\pi/2$, porque o indutor não é puro. De acordo com o cálculo já feito para esse caso, ϕ é:

$$\phi = arctg \frac{\omega L}{R_B} \qquad \textbf{(1.74)}$$

portanto a **potência média não é nula** como no caso do indutor puro.

A **figura 1.16** a seguir mostra o comportamento da tensão, da corrente e da potência instantânea e média para o caso de uma bobina:

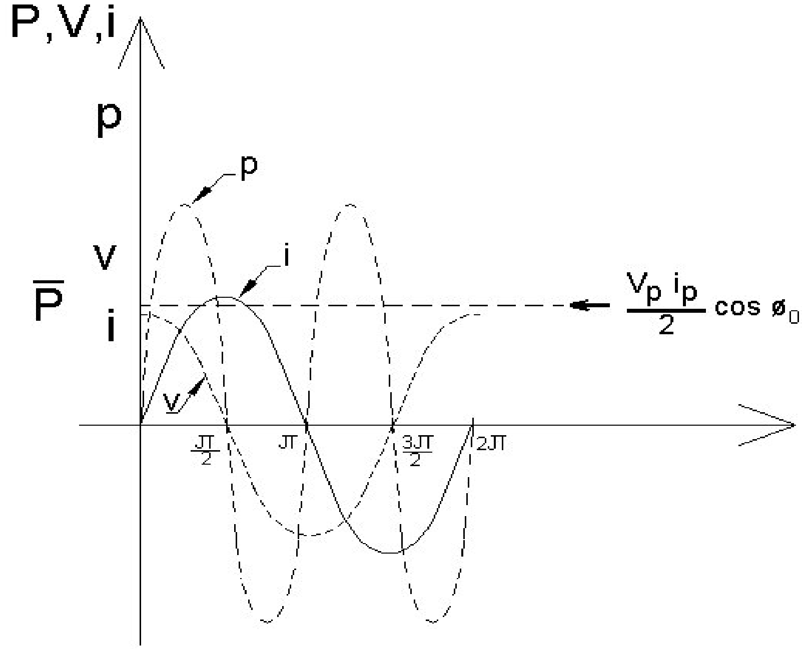

Figura 1.16: Comportamento da potência instantânea e da potência média para uma bobina.