

# 4

## CIRCUITOS TRIFÁSICOS

### 4.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo inicia-se com algumas definições importantes, que serão utilizadas ao longo do texto. Em seguida são apresentados métodos de cálculo para a análise de circuitos trifásicos alimentando cargas trifásicas equilibradas, ligadas através das duas formas possíveis, em estrela e em triângulo. Em continuação, apresenta-se o tópico de potência em sistemas trifásicos, quando são definidos os conceitos de potência ativa, reativa e aparente.

Define-se como “sistema de tensões trifásico e simétrico” (a 3 fases) um sistema de tensões do tipo:

$$\begin{aligned}e_1 &= E_M \cos \omega t = \Re[e^{j\omega t}] \\e_2 &= E_M \cos(\omega t - 2\pi/3) = \Re[E_M e^{-j2\pi/3} e^{j\omega t}] \\e_3 &= E_M \cos(\omega t - 4\pi/3) = E_M \cos(\omega t + 2\pi/3) = \Re[E_M e^{j2\pi/3} e^{j\omega t}]\end{aligned}$$

E, pelos fasores, tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{E}_1 &= E + j0 = E \underline{0^\circ} \\ \dot{E}_2 &= E[\cos(-2\pi/3) + j \operatorname{sen}(-2\pi/3)] = E\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = E \underline{-120^\circ} \\ \dot{E}_3 &= E[\cos(+2\pi/3) + j \operatorname{sen}(+2\pi/3)] = E\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = E \underline{120^\circ}\end{aligned}\tag{4.1}$$

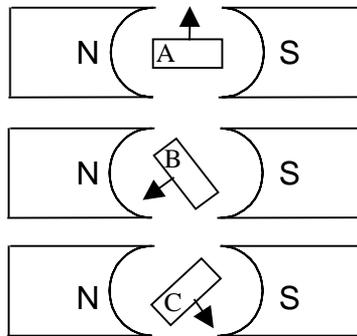
em que  $E = E_M/\sqrt{2}$  representa o valor eficaz da tensão.

Para entendimento de como um sistema trifásico é gerado, parte-se de um gerador monofásico. Nos terminais de uma bobina que gira com velocidade angular constante, no interior de um campo magnético uniforme, surge uma tensão senoidal cuja expressão é

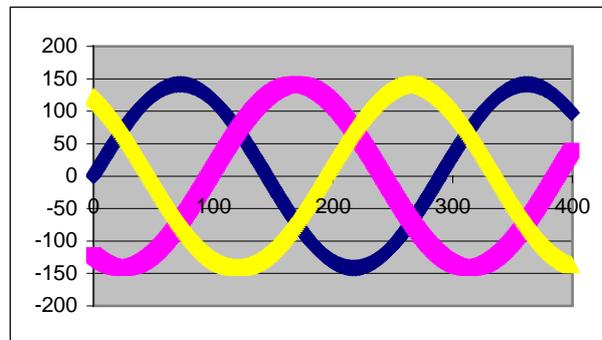
$$e = E_M \cos(\omega t + \theta),$$

em que  $\theta$  representa o ângulo inicial da bobina. Ou melhor, adotando-se a origem dos tempos coincidente com a direção do vetor indução,  $\theta$  representa o ângulo formado pela direção da bobina com a origem dos tempos no instante  $t=0$ .

Assim, é óbvio que, se sobre o mesmo eixo forem dispostas três bobinas deslocadas entre si de  $2\pi/3$  rad e girar o conjunto com velocidade angular constante no sentido horário, no interior de um campo magnético uniforme, nos terminais das bobinas aparecerá um sistema de tensões de mesmo valor máximo e defasadas entre si de  $2\pi/3$  rad, conforme Figura. 4.1.



(a) - Bobinas do gerador



(b) - Valores instantâneos das tensões

Figura 4.1. Obtenção de um sistema trifásico de tensões

Define-se, para um sistema polifásico simétrico, “*seqüência de fase*” como sendo a ordem pela qual as tensões das fases passam pelo seu valor máximo. Por exemplo, no sistema trifásico da Figura. 4.1, a seqüência de fase é *A-B-C*, uma vez que as tensões passam consecutivamente pelo valor máximo na ordem *A-B-C*. Evidentemente, uma alteração cíclica não altera a seqüência de fase, isto é, a seqüência *A-B-C* é a mesma que *B-C-A* e que *C-A-B*. À seqüência *A-B-C* é dado o nome “*seqüência direta*” ou “*seqüência*

positiva”, e à seqüência  $A-C-B$ , que coincide com  $C-B-A$  e  $B-A-C$ , dá-se o nome de “seqüência inversa” ou “seqüência negativa”.

### Exemplo 4.1

Um sistema trifásico simétrico tem seqüência de fase negativa,  $B-A-C$ , e  $\dot{V}_C = 220/40^\circ V$ . Determinar as tensões  $\dot{V}_A$  e  $\dot{V}_B$ .

**Solução:** Sendo a seqüência de fase  $B-A-C$ , a primeira tensão a passar pelo valor máximo será  $v_B$ , a qual será seguida, na ordem, por  $v_A$  e  $v_C$ . Portanto, deverá ser:

$$v_B = V_M \cos(\omega t + \theta) , \quad v_A = V_M \cos(\omega t + \theta - 2\pi/3) , \quad v_C = V_M \cos(\omega t + \theta - 4\pi/3)$$

em que  $\theta$  representa o ângulo inicial ou a rotação de fase em relação à origem. No instante  $t=0$ , tem-se:

$$v_B = V_M \cos \theta , \quad v_A = V_M \cos(\theta - 2\pi/3) , \quad v_C = V_M \cos(\theta - 4\pi/3)$$

Sendo  $V = V_M/\sqrt{2}$ , fasorialmente tem-se:

$$\dot{V}_B = V/\underline{\theta} , \quad \dot{V}_A = V/\underline{\theta - 2\pi/3} , \quad \dot{V}_C = V/\underline{\theta - 4\pi/3}$$

Por outro lado, sendo dado  $\dot{V}_C = 220/40^\circ V$ , resulta

$$V = 220 V \quad ; \quad \theta + 120^\circ = 40^\circ \text{ ou } \theta = -80^\circ ,$$

e portanto  $\dot{V}_B = 220/80^\circ V$  ,  $\dot{V}_A = 220/200^\circ V$  ,  $\dot{V}_C = 220/40^\circ V$

Ao definir os sistemas trifásicos, observa-se que, entre as grandezas que os caracterizam, há uma rotação de fase de  $\pm 120^\circ$ ; portanto é bastante evidente pensar num operador que, aplicado a um fasor, perfaça tal rotação de fase. Assim, define-se o operador  $\alpha$ , que é um número complexo de módulo unitário e argumento  $120^\circ$ , de modo que, quando aplicado a um fasor qualquer, transforma-o em outro de mesmo módulo e adiantado de  $120^\circ$ . Em outras palavras,

$$\alpha = 1/120^\circ = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4.2)$$

No tocante à potenciação, o operador  $\alpha$  possui as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\alpha^1 &= \alpha = 1/\underline{120^\circ} \\ \alpha^2 &= \alpha \cdot \alpha = 1/\underline{120^\circ} \cdot 1/\underline{120^\circ} = 1/\underline{-120^\circ} \\ \alpha^3 &= \alpha^2 \cdot \alpha = 1/\underline{-120^\circ} \cdot 1/\underline{120^\circ} = 1/\underline{0^\circ} \\ \alpha^4 &= \alpha^3 \cdot \alpha = 1/\underline{0^\circ} \cdot 1/\underline{120^\circ} = 1/\underline{120^\circ}\end{aligned}$$

Além dessas, o operador  $\alpha$  possui ainda a propriedade:

$$1 + \alpha + \alpha^2 = 1/\underline{0^\circ} + 1/\underline{120^\circ} + 1/\underline{-120^\circ} = 0, \quad (4.3)$$

que é muito importante e será amplamente utilizada neste texto.

## 4.2 SISTEMAS TRIFÁSICOS SIMÉTRICOS E EQUILBRADOS COM CARGA EQUILBRADA – LIGAÇÕES

### 4.2.1 LIGAÇÕES EM ESTRELA

Supondo que sejam alimentadas, a partir dos terminais das três bobinas do item precedente, três impedâncias quaisquer,  $\bar{Z} = Z/\underline{\varphi} = R + jX$ , porém iguais entre si (carga equilibrada). É evidente que os três circuitos assim constituídos (Figura. 4.2) formam três circuitos monofásicos, nos quais circularão as correntes:

$$\begin{aligned}i_A &= \frac{\dot{E}_{AN_A}}{\bar{Z}} = \frac{E + 0j}{Z/\underline{\varphi}} = \frac{E}{Z} \underline{-\varphi} \\ i_B &= \frac{\dot{E}_{BN_B}}{\bar{Z}} = \frac{E/\underline{-120^\circ}}{Z/\underline{\varphi}} = \frac{E}{Z} \underline{-120^\circ - \varphi} \\ i_C &= \frac{\dot{E}_{CN_C}}{\bar{Z}} = \frac{E/\underline{+120^\circ}}{Z/\underline{\varphi}} = \frac{E}{Z} \underline{+120^\circ - \varphi}\end{aligned}$$

Isto é, nos três circuitos circularão correntes de mesmo valor eficaz e defasadas entre si de  $2\pi/3 \text{ rad}$  (ou  $120^\circ$ ).

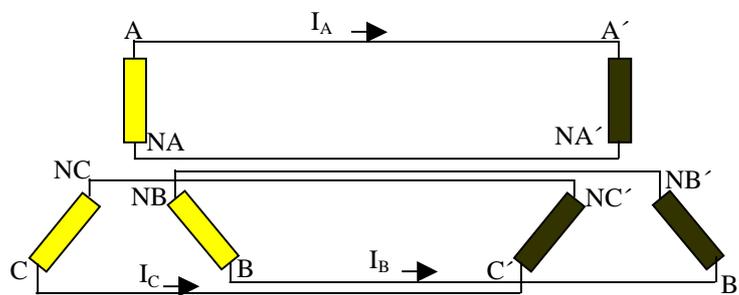
Observa-se que os três circuitos são eletricamente independentes, e portanto pode-se interligar os pontos  $N_A$ ,  $N_B$  e  $N_C$ , designados por  $N$ , sem que isso venha a causar qualquer alteração nos mesmos. Por outro lado, observa-se que os pontos  $N'_A$ ,  $N'_B$  e  $N'_C$

estão ao mesmo potencial que o ponto  $N$ ; logo, podem ser interligados designando-os por  $N'$ .

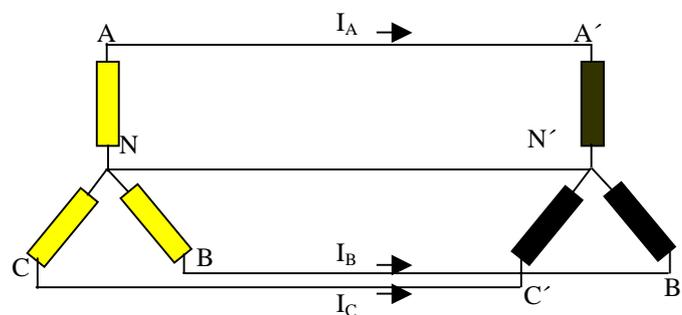
A corrente que circula pelo condutor  $NN'$  é dada por

$$\dot{I}_{NN'} = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0,$$

pois as três correntes aferentes ao nó  $N'$  têm o mesmo valor eficaz e estão defasadas entre si de  $2\pi/3 \text{ rad}$ . Deve-se salientar a mesma conclusão poderia ser obtida, observando que os pontos  $N$  e  $N'$  estão no mesmo potencial.



(a) - Três circuitos monofásicos



(b) - Circuito trifásico

Figura 4.2. Sistema trifásico com gerador e carga ligados em estrela

O condutor que interliga os pontos  $N$  e  $N'$  recebe o nome de *fio neutro* ou *quarto fio*. Evidentemente, sendo nula a corrente que o percorre, poderia ser retirado do circuito.

Observa-se aqui uma das grandes vantagens dos sistemas trifásicos. Para a transmissão da mesma potência, são utilizados 3 ou 4 fios, enquanto seriam necessários 6 fios se fossem utilizados 3 circuitos monofásicos (conforme observa-se da Figura. 4.2).

Ao esquema de ligação assim obtido é dado o nome de circuito trifásico simétrico com gerador ligado em "estrela" (Y) e carga "equilibrada em estrela" (Y), dando-se o nome de "centro-estrela" ao ponto  $N$  ou  $N'$ .

Definem-se:

- (1) Tensão de fase: tensão medida entre o centro-estrela e qualquer um dos terminais do gerador ou da carga;
- (2) Tensão de linha: tensão medida entre dois terminais (nenhum deles sendo o "centro-estrela") do gerador ou da carga. Evidentemente, define-se a tensão de linha como sendo a tensão medida entre os condutores que ligam o gerador à carga;
- (3) Corrente de fase: corrente que percorre cada uma das bobinas do gerador ou, o que é o mesmo, corrente que percorre cada uma das impedâncias da carga;
- (4) Corrente de linha: corrente que percorre os condutores que interligam o gerador à carga (exclui-se o neutro).

Salienta-se que as tensões e correntes de linha e de fase num sistema trifásico simétrico e equilibrado têm, em todas as fases, valores eficazes iguais, estando defasadas entre si de  $2\pi/3$  rad. Em vista deste fato, é evidente que a determinação desses valores num circuito trifásico com gerador em Y e carga em Y, resume-se à sua determinação para o caso de um circuito monofásico constituído por uma das bobinas ligada a uma das impedâncias por um condutor de linha, lembrando ainda que a intensidade de corrente no fio neutro é nula.

Em tudo o que se segue, valores de fase são indicados com um índice F e os de linha com índice L ou sem índice algum.

De acordo com as definições apresentadas, tem-se a Tabela. 4.1, que apresenta todos os valores de linha e de fase para o circuito da Figura. 4.1.

Tabela 4.1. Grandezas de fase e linha (em módulo) num trifásico simétrico e equilibrado ligado em estrela

Valores de fase				Valores de linha			
Gerador		Carga		Gerador		Carga	
Corrente	Tensão	Corrente	Tensão	Corrente	Tensão	Corrente	Tensão
$I_{AN}$	$V_{AN}$	$I_{A'N'}$	$V_{A'N'}$	$I_A$	$V_{AB}$	$I_A$	$V_{A'B'}$
$I_{BN}$	$V_{BN}$	$I_{B'N'}$	$V_{B'N'}$	$I_B$	$V_{BC}$	$I_B$	$V_{B'C'}$
$I_{CN}$	$V_{CN}$	$I_{C'N'}$	$V_{C'N'}$	$I_C$	$V_{CA}$	$I_C$	$V_{C'A'}$

Passa-se a determinar as relações existentes entre os valores de fase e de linha, iniciando por observar que, para a ligação estrela, as correntes de linha e de fase são iguais, isto é,

$$\dot{I}_{AN} = \dot{I}_A, \quad \dot{I}_{BN} = \dot{I}_B, \quad \dot{I}_{CN} = \dot{I}_C$$

Para a determinação da relação entre as tensões, adota-se um trifásico com seqüência de fase direta, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} = \dot{V}_{AN} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

As tensões de linha são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{V}_{AB} &= \dot{V}_{AN} - \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{BC} &= \dot{V}_{BN} - \dot{V}_{CN} \\ \dot{V}_{CA} &= \dot{V}_{CN} - \dot{V}_{AN} \end{aligned}$$

Utilizando matrizes, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AB} \\ \dot{V}_{BC} \\ \dot{V}_{CA} \end{bmatrix} = \dot{V}_{AN} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} - \dot{V}_{AN} \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix} = \dot{V}_{AN} \begin{bmatrix} 1 - \alpha^2 \\ \alpha^2 - \alpha \\ \alpha - 1 \end{bmatrix}$$

Salienta-se porém que

$$1 - \alpha^2 = 1 - \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j \right) = \sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j \right) = \sqrt{3} \underline{/30^\circ}$$

$$\alpha^2 - \alpha = \alpha^2(1 - \alpha^2) = \alpha^2 \sqrt{3} \underline{/30^\circ}$$

$$\alpha^2 - 1 = \alpha(1 - \alpha^2) = \alpha \sqrt{3} \underline{/30^\circ}$$

Portanto

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AB} \\ \dot{V}_{BC} \\ \dot{V}_{CA} \end{bmatrix} = \sqrt{3} \underline{/30^\circ} \dot{V}_{AN} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \sqrt{3} \underline{/30^\circ} \\ \dot{V}_{BN} \sqrt{3} \underline{/30^\circ} \\ \dot{V}_{CN} \sqrt{3} \underline{/30^\circ} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Da Equação. (4.4), observa-se que, para um sistema trifásico simétrico e equilibrado, na ligação estrela, com seqüência de fase direta, passa-se de uma das tensões de fase à de linha correspondente multiplicando-se o fasor que a representa pelo número complexo  $\sqrt{3} \underline{/30^\circ}$ .

#### Exemplo 4.2

Uma carga equilibrada ligada em estrela é alimentada por um sistema trifásico simétrico e equilibrado com seqüência de fase direta. Sabendo-se que  $\dot{V}_{BN} = 220 \underline{/58^\circ} V$ , pede-se determinar:

- (a) as tensões de fase na carga;
- (b) as tensões de linha na carga.

#### Solução:

- (a) Tensões de fase na carga

Sendo o trifásico simétrico, sabe-se que os módulos de todas as tensões de fase são iguais entre si. Logo,

$$V_{AN} = V_{BN} = V_{CN} = 220 V$$

Por outro lado, sendo a seqüência de fase direta, sabe-se que, partindo da fase  $B$ , deverão passar pelo máximo, ordenadamente, as fases  $C$  e  $A$ . Logo, o fasor  $\dot{V}_{BN}$  está adiantado de  $120^\circ$  sobre o fasor  $\dot{V}_{CN}$  e este está adiantado de  $120^\circ$  sobre  $\dot{V}_{AN}$ . Portanto, com relação às fases, tem-se:

fase de  $\dot{V}_{CN} = \text{fase de } \dot{V}_{BN} - 120^\circ = 58^\circ - 120^\circ = -62^\circ$

fase de  $\dot{V}_{AN} = \text{fase de } \dot{V}_{CN} - 120^\circ = -62^\circ - 120^\circ = -182^\circ = 178^\circ$

Finalmente, resulta:

$$\dot{V}_{BN} = 220 \angle 58^\circ \text{ V} , \quad \dot{V}_{CN} = 220 \angle -62^\circ \text{ V} , \quad \dot{V}_{AN} = 220 \angle 178^\circ \text{ V}$$

Usando matrizes, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \\ \dot{V}_{AN} \end{bmatrix} = \dot{V}_{BN} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = 220 \angle 58^\circ \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \angle 58^\circ \\ 220 \angle -62^\circ \\ 220 \angle 178^\circ \end{bmatrix} \text{ V}$$

(b) Tensões de linha na carga

De (4.4), resulta:

$$\dot{V}_{AB} = 220 \angle 178^\circ \sqrt{3} \angle 30^\circ = 380 \angle 208^\circ \text{ V} = 380 \angle -152^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{BC} = 220 \angle 58^\circ \sqrt{3} \angle 30^\circ = 380 \angle 88^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{CA} = 220 \angle -62^\circ \sqrt{3} \angle 30^\circ = 380 \angle -32^\circ \text{ V}$$

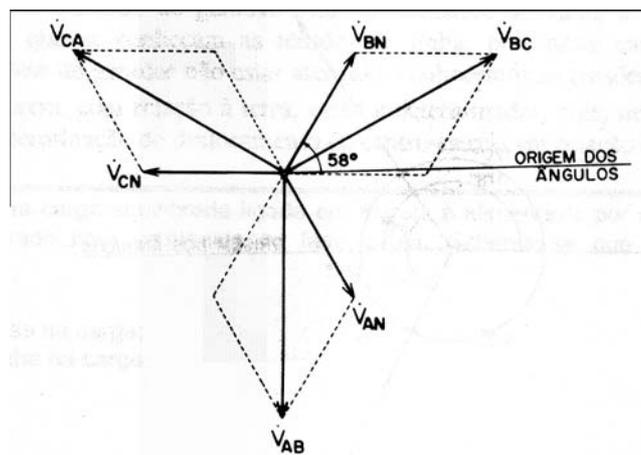


Figura 4.3. Diagrama de fasores para o Ex. 4.2

**Exemplo 4.3**

Resolver o exemplo 4.2 admitindo-se seqüência de fase inversa.

**Solução:**

(a) Cálculo das tensões de fase na carga

Como no exemplo precedente, os módulos das tensões de fase são todos iguais e valem 220 V.

Para a determinação da fase de  $\dot{V}_{CN}$  e  $\dot{V}_{AN}$  salienta-se que, em sendo a seqüência de fase inversa (B-A-C) o fasor  $\dot{V}_{AN}$  está atrasado de  $120^\circ$  em relação ao fasor  $\dot{V}_{BN}$ , e o fasor  $\dot{V}_{CN}$  está atrasado  $120^\circ$  em relação ao  $\dot{V}_{AN}$ . Logo,

$$\dot{V}_{BN} = 220 \underline{/58^\circ} \text{ V}$$

$$\dot{V}_{AN} = 220 \underline{/58^\circ - 120^\circ} = 220 \underline{/ -62^\circ} \text{ V}$$

$$\dot{V}_{CN} = 220 \underline{/ -62^\circ - 120^\circ} = 220 \underline{/ -182^\circ} = 220 \underline{/178^\circ} \text{ V}$$

(b) Cálculo das tensões de linha na carga

De (2.2), resulta:

$$\dot{V}_{AB} = 220 \underline{/ -62^\circ} \sqrt{3} \underline{/ -30^\circ} = 380 \underline{/ -92^\circ} \text{ V}$$

$$\dot{V}_{BC} = 220 \underline{/58^\circ} \sqrt{3} \underline{/ -30^\circ} = 380 \underline{/28^\circ} \text{ V}$$

$$\dot{V}_{CA} = 220 \underline{/178^\circ} \sqrt{3} \underline{/ -30^\circ} = 380 \underline{/148^\circ} \text{ V}$$

Para a resolução de circuitos trifásicos, pode-se proceder do mesmo modo que para os monofásicos, isto é, pode-se utilizar análise de malha ou nodal ou, ainda, qualquer dos métodos aplicáveis à resolução dos circuitos monofásicos. Porém, como será visto a seguir, o cálculo do circuito fica bastante simplificado levando-se em conta as simetrias existentes nos trifásicos simétricos com carga equilibrada.

Exemplificando, suponha que se queira resolver o circuito da Figura. 4.4, no qual conhecem-se as tensões de fase do gerador (seqüência direta) e as impedâncias da linha e da carga,  $\bar{Z}'$  e  $\bar{Z}$ , respectivamente. Pretende-se determinar as correntes nas três fases. São conhecidos:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} = E / \underline{\theta} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \bar{Z} = Z / \underline{\varphi}_1 \quad \text{e} \quad \bar{Z}' = Z' / \underline{\varphi}_2$$

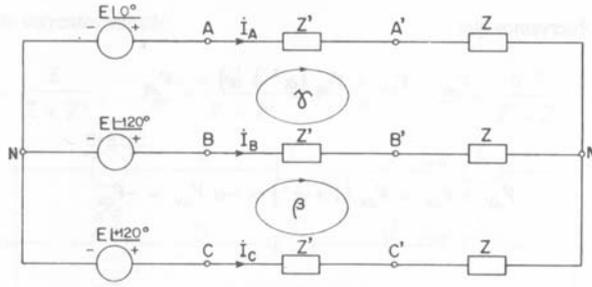


Figura 4.4. Circuito trifásico em estrela

Pode-se resolver o circuito, observando que, num sistema trifásico simétrico e equilibrado com carga equilibrada, os pontos  $N$  e  $N'$  estão ao mesmo potencial, ou seja

$$\dot{V}_{AN} = \dot{V}_{AN'}$$

Logo, pode-se interligá-los por um condutor sem alterar o circuito, dado que nesse condutor não circulará corrente. Nessas condições, o circuito da Figura. 10 transforma-se no da Figura. 4.5, no qual têm-se três malhas independententes:

$$NAA'N'N, NBB'N'N \text{ e } NCC'N'N$$

Salienta-se que as impedâncias das três malhas são iguais e valem  $(\bar{Z} + \bar{Z}')$ , e as f.e.m. das malhas valem  $\dot{E}$ ,  $\alpha^2 \dot{E}$ ,  $\alpha \dot{E}$ .

Portanto as três correntes valerão

$$\dot{i}_{AA'} = \frac{\dot{E}}{\bar{Z} + \bar{Z}'}, \quad \dot{i}_{BB'} = \frac{\alpha^2 \dot{E}}{\bar{Z} + \bar{Z}'} = \alpha^2 \dot{i}_{AA'}, \quad \dot{i}_{CC'} = \frac{\alpha \dot{E}}{\bar{Z} + \bar{Z}'} = \alpha \dot{i}_{AA'}$$

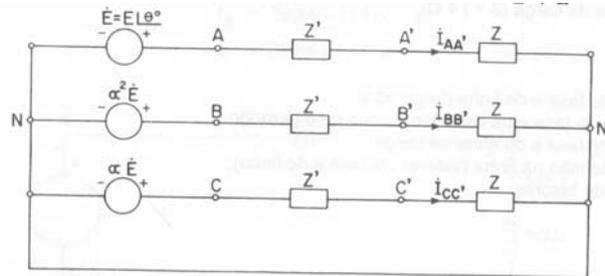


Figura 4.5. Circuito trifásico em estrela com neutro

Deve-se notar que tudo se passa como se fosse resolvido o circuito monofásico da Figura 4.6, no qual interligam-se os pontos  $N$  e  $N'$  por um fio de impedância nula.



Figura 4.6. Circuito monofásico equivalente

#### Exemplo 4.4

Um alternador trifásico alimenta por meio de uma linha equilibrada uma carga trifásica equilibrada. São conhecidos:

- (1) a tensão de linha do alternador (380 V) e a frequência (60 Hz);
- (2) o tipo de ligação do alternador (Y);
- (3) o número de fios da linha (3);
- (4) a resistência ( $0,2 \Omega$ ) e a reatância indutiva ( $0,5 \Omega$ ) de cada fio da linha;
- (5) a impedância da carga ( $3 + j 4 \Omega$ ).

Pedem-se:

- (a) as tensões de fase e de linha no gerador;
- (b) as correntes de fase e de linha fornecidas pelo gerador;
- (c) as tensões de fase e de linha na carga;

(d) a queda de tensão na linha (valores de fase e de linha);

**Solução:**

(a) Tensões de fase e de linha no gerador

Admitindo-se seqüência de fase  $A-B-C$ , e adotando  $V_{AN}$  com fase inicial nula, resulta

$$\dot{V}_{AN} = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{BN} = 220 \angle -120^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{CN} = 220 \angle 120^\circ \text{ V}$$

e portanto

$$\dot{V}_{AB} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \dot{V}_{AN} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \cdot 220 \angle 0^\circ = 380 \angle 30^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{BC} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \dot{V}_{BN} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \cdot 220 \angle -120^\circ = 380 \angle -90^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{CA} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \dot{V}_{CN} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \cdot 220 \angle 120^\circ = 380 \angle 150^\circ \text{ V}$$

(b) Determinação da intensidade de corrente

O circuito a ser utilizado para a determinação da corrente é o da Figura. 4.7.b, no qual tem-se

$$\dot{V}_{AN} = I_A [R + R_C + j(X + X_C)]$$

isto é,

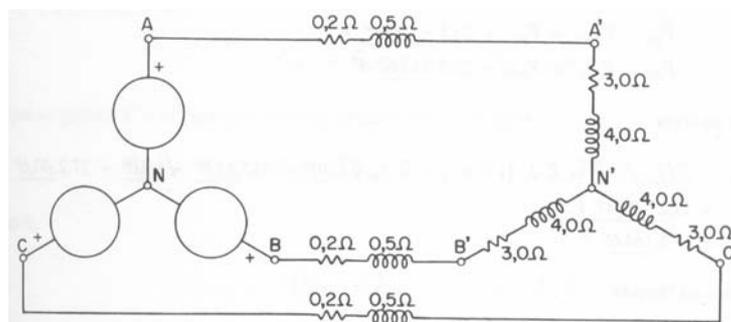
$$I_A = \frac{\dot{V}_{AN}}{R + R_C + j(X + X_C)} = \frac{220 + j0}{3,2 + j4,5} = \frac{220 \angle 0^\circ}{5,52 \angle 54,6^\circ} = 39,84 \angle -54,6^\circ \text{ A}$$

Logo,

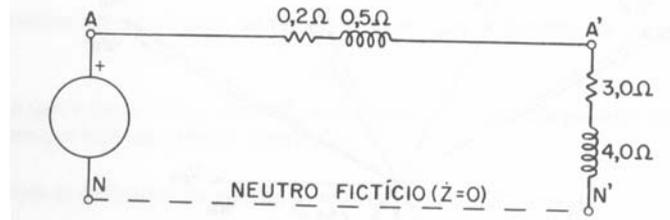
$$I_A = 39,84 \angle -54,6^\circ \text{ A}$$

$$I_B = 39,84 \angle -174,6^\circ \text{ A}$$

$$I_C = 39,84 \angle 65,4^\circ \text{ A}$$



(a) Circuito trifásico



(b) Circuito monofásico equivalente

Figura 4.7. Determinação do circuito monofásico equivalente.

(c) Tensão na carga

(i) valores de fase:

$$\dot{V}_{A'N'} = \bar{Z}_C \dot{I}_A = 5 \angle 53,1^\circ \cdot 39,84 \angle -54,6^\circ = 199,2 \angle -1,5^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{B'N'} = 199,2 \angle -121,5^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{C'N'} = 199,2 \angle -118,5^\circ \text{ V}$$

(ii) valores de linha:

$$\dot{V}_{A'B'} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \dot{V}_{A'N'} = \sqrt{3} \cdot 199,2 \angle 28,5^\circ = 345 \angle 28,5^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{B'C'} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \dot{V}_{B'N'} = \sqrt{3} \cdot 199,2 \angle -91,5^\circ = 345 \angle -91,5^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{C'A'} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \dot{V}_{C'N'} = \sqrt{3} \cdot 199,2 \angle 148,5^\circ = 345 \angle 148,5^\circ \text{ V}$$

(d) Queda de tensão na linha

(i) valores de fase:

$$\dot{V}_{AN} - \dot{V}_{A'N'} = \dot{V}_{AA'} = \bar{Z} \dot{I}_A = 0,54 \angle 68,2^\circ \cdot 39,84 \angle -54,6^\circ = 21,5 \angle 13,6^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{BN} - \dot{V}_{B'N'} = \dot{V}_{BB'} = 21,5 \angle -106,4^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{CN} - \dot{V}_{C'N'} = \dot{V}_{CC'} = 21,5 \angle 133,6^\circ \text{ V}$$

(ii) valores de linha:

$$\dot{V}_{AB} - \dot{V}_{A'B'} = \bar{Z} (\dot{I}_A - \dot{I}_B) = \bar{Z} \dot{I}_A (1 - \alpha^2) = \bar{Z} \dot{I}_A \sqrt{3} \angle 30^\circ = 21,5 \angle 13,6^\circ \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ = 37,2 \angle 43,6^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{BC} - \dot{V}_{B'C'} = 37,2 \angle -76,4^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{CA} - \dot{V}_{C'A'} = 37,2 \angle 163,6^\circ \text{ V}$$

### 4.2.2 LIGAÇÕES EM TRIÂNGULO

Suponha as três bobinas do item anterior, porém ligadas a três impedâncias  $\bar{Z}$  iguais entre si, conforme indicado na Figura. 4.8. Notar que as malhas  $AA'N'_AN_A$ ,  $BB'N'_BN_B$  e  $CC'N'_CN_C$  são eletricamente independentes; logo, pode-se interligar os pontos  $C$  e  $N_B$  sem alterar em nada o circuito. Por outro lado, os pontos  $C'$  e  $N'_B$  estão ao mesmo potencial; logo, podem ser interligados, e pode-se substituir os condutores  $C-C'$  e  $N_B-N'_B$  por um único condutor. Os pontos comuns  $CN_B$  e  $C'N'_B$  serão designados por  $C$  e  $C'$ , respectivamente. Após realizar a interligação desses pontos, observa-se que a malha  $AA'N'_AN_A$  é eletricamente independente do restante do circuito; portanto, por raciocínio análogo, pode-se interligar os pontos  $AN_C$  e  $A'N'_C$ , designados por  $A$  e  $A'$ , respectivamente. Finalmente, observa-se que os pontos  $B$  e  $N_A$  estão ao mesmo potencial, pois

$$\dot{V}_{BN_A} = \dot{V}_{BN_B} + \dot{V}_{CN_C} + \dot{V}_{AN_A} = 0 \quad (4.5)$$

e que os pontos  $B'$  e  $N'_A$  também estão ao mesmo potencial, pois

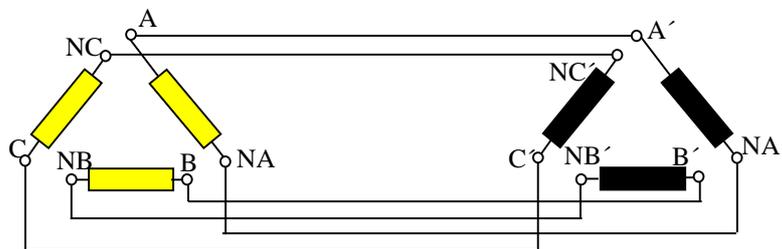
$$\dot{V}_{B'N'_A} = \dot{V}_{B'N'_B} + \dot{V}_{C'N'_C} + \dot{V}_{A'N'_A} = \dot{I}_{B'N'_B} \bar{Z} + \dot{I}_{C'N'_C} \bar{Z} + \dot{I}_{A'N'_A} \bar{Z}$$

isto é,

$$\dot{V}_{B'N'_A} = \bar{Z} (\dot{I}_{B'N'_B} + \dot{I}_{C'N'_C} + \dot{I}_{A'N'_A}) = \bar{Z} \cdot 0 = 0$$

Portanto, pode-se interligar os pontos  $BN_A$  e  $B'N'_A$  obtendo os pontos  $B$  e  $B'$ , respectivamente.

Assim, tem-se o circuito da Figura. 4.8.b, no qual o gerador e a carga estão ligados em triângulo.



(a) - Três circuitos monofásicos



(b) - Circuito trifásico com gerador e carga em triângulo

Figura 4.8. Representação da ligação triângulo

Salienta-se que a Equação. (4.5) é condição necessária para que seja possível ligar um gerador em triângulo sem que haja corrente de circulação.

De acordo com as definições anteriores, as tensões de fase são:

no gerador:

$$\dot{V}_{AN_A} = \dot{V}_{AB} \quad , \quad \dot{V}_{BN_B} = \dot{V}_{BC} \quad , \quad \dot{V}_{CN_C} = \dot{V}_{CA}$$

na carga:

$$\dot{V}_{A'N'_A} = \dot{V}_{A'B'} \quad , \quad \dot{V}_{B'N'_B} = \dot{V}_{B'C'} \quad , \quad \dot{V}_{C'N'_C} = \dot{V}_{C'A'}$$

As tensões de linha no gerador e na carga são:

$$\dot{V}_{AB} \quad , \quad \dot{V}_{BC} \quad , \quad \dot{V}_{CA} \quad \text{e} \quad \dot{V}_{A'B'} \quad , \quad \dot{V}_{B'C'} \quad , \quad \dot{V}_{C'A'}$$

As correntes de fase são:

no gerador:

$$\dot{I}_{AN_A} = \dot{I}_{BA} \quad , \quad \dot{I}_{BN_B} = \dot{I}_{CB} \quad , \quad \dot{I}_{CN_C} = \dot{I}_{AC}$$

na carga:

$$\dot{I}_{A'N'_A} = \dot{I}_{A'B'} \quad , \quad \dot{I}_{B'N'_B} = \dot{I}_{B'C'} \quad , \quad \dot{I}_{C'N'_C} = \dot{I}_{C'A'}$$

As correntes de linha são:

$$\dot{I}_{AA} \quad , \quad \dot{I}_{BB} \quad \text{e} \quad \dot{I}_{CC}$$

Na ligação triângulo, quanto às tensões é evidente que há igualdade entre as de fase e as de linha. Para a determinação da relação entre as correntes de linha e de fase, adota-se

inicialmente um sistema trifásico simétrico e equilibrado com seqüência de fase direta, ou seja,

$$\begin{aligned}\dot{I}_{A'B'} &= I_F / \underline{\theta} \\ \dot{I}_{B'C'} &= I_F / \underline{\theta - 120^\circ} \\ \dot{I}_{C'A'} &= I_F / \underline{\theta + 120^\circ}\end{aligned}$$

ou, com matrizes,

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{A'B'} \\ \dot{I}_{B'C'} \\ \dot{I}_{C'A'} \end{bmatrix} = \dot{I}_{A'B'} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Aplicando aos nós  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  da Figura. 4.8.b a 1ª lei de Kirchhoff, obtém-se:

$$\begin{aligned}\dot{I}_{AA'} &= \dot{I}_{A'B'} - \dot{I}_{C'A'} \\ \dot{I}_{BB'} &= \dot{I}_{B'C'} - \dot{I}_{A'B'} \\ \dot{I}_{CC'} &= \dot{I}_{C'A'} - \dot{I}_{B'C'}\end{aligned}$$

Matricialmente, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{AA'} \\ \dot{I}_{BB'} \\ \dot{I}_{CC'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{A'B'} \\ \dot{I}_{B'C'} \\ \dot{I}_{C'A'} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{I}_{C'A'} \\ \dot{I}_{A'B'} \\ \dot{I}_{B'C'} \end{bmatrix} = \dot{I}_{A'B'} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} - \dot{I}_{A'B'} \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha^2 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{AA'} \\ \dot{I}_{BB'} \\ \dot{I}_{CC'} \end{bmatrix} = \dot{I}_{A'B'} \begin{bmatrix} 1 - \alpha \\ \alpha^2 - 1 \\ \alpha - \alpha^2 \end{bmatrix}$$

Porém, como visto anteriormente,

$$1 - \alpha = \sqrt{3} / \underline{-30^\circ}, \quad \alpha^2 - 1 = \alpha^2 \sqrt{3} / \underline{-30^\circ}, \quad \alpha - \alpha^2 = \alpha \sqrt{3} / \underline{-30^\circ}$$

logo será

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{AA'} \\ \dot{I}_{BB'} \\ \dot{I}_{CC'} \end{bmatrix} = \sqrt{3} \underline{/ -30^\circ} \dot{I}_{A'B'} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Ou seja, num circuito trifásico simétrico e equilibrado, seqüência direta, com carga equilibrada ligada em triângulo, obtém-se as correntes de linha multiplicando as correspondentes de fase pelo número complexo  $\sqrt{3} \underline{/ -30^\circ}$ .

Pode-se demonstrar que, analogamente a quanto foi feito, sendo a seqüência de fase inversa, as correntes de linha estarão adiantadas de  $30^\circ$  sobre as correspondentes de fase, isto é, para a seqüência de fase inversa, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{AA'} &= \dot{I}_{A'B'} \sqrt{3} \underline{/ 30^\circ} \\ \dot{I}_{BB'} &= \dot{I}_{B'C'} \sqrt{3} \underline{/ 30^\circ} \\ \dot{I}_{CC'} &= \dot{I}_{C'A'} \sqrt{3} \underline{/ 30^\circ} \end{aligned} \quad (4.7)$$

No caso da determinação das correntes de fase conhecendo-se as de linha, surge uma indeterminação. De fato, supondo-se uma seqüência de fase direta, os valores

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{A'B'} \\ \dot{I}_{B'C'} \\ \dot{I}_{C'A'} \end{bmatrix} = \frac{\dot{I}_{AA'}}{\sqrt{3} \underline{/ -30^\circ}} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

representam uma terna de fasores de correntes de fase que satisfazem aos dados de linha.

Conforme já foi dito, os sistemas trifásicos podem ser resolvidos utilizando-se qualquer dos métodos de resolução de circuitos, porém, devido às simetrias existentes nos trifásicos, empregam-se soluções particulares que muito simplificam a resolução.

Suponha ter que resolver um circuito trifásico simétrico e equilibrado em que tem-se um gerador fictício ligado em triângulo que alimenta por meio de uma linha de impedância  $\bar{Z}'$  uma carga com impedância de fase  $\bar{Z}$ , ligada em triângulo (Figura. 4.9).

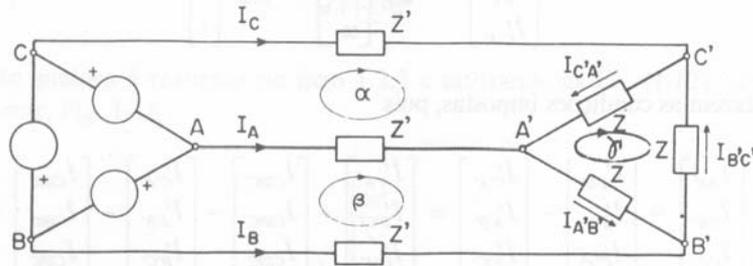


Figura 4.9. Circuito trifásico em triângulo

Resolvendo-se o sistema por correntes fictícias de malhas, resultam as equações:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{CA} &= (2\bar{Z}' + \bar{Z}) \alpha - \bar{Z}'\beta - \bar{Z}\gamma \\ \dot{V}_{AB} &= -\bar{Z}'\alpha + (2\bar{Z}' + \bar{Z}) \beta - \bar{Z}\gamma \\ 0 &= -\bar{Z}\alpha - \bar{Z}\beta + 3\bar{Z}\gamma \end{aligned}$$

das quais poderemos determinar os valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .

Como a resolução do sistema acima é por demais trabalhosa, procura-se um novo caminho, a partir da aplicação da lei de Ohm à malha  $AA'B'BA$  e das simetrias do sistema, para determinar o valor da corrente  $\dot{I}_{A'B'}$ . Adotando-se seqüência de fase direta, resulta

$$\begin{aligned} \dot{I}_{A'B'} &= I_F \angle 0^\circ, \quad \dot{I}_{B'C'} = I_F \angle -120^\circ, \quad \dot{I}_{C'A'} = I_F \angle 120^\circ \\ \dot{V}_{AB} &= \dot{I}_A \bar{Z}' + \dot{I}_{A'B'} \bar{Z}' - \dot{I}_B \bar{Z}' = (\dot{I}_A - \dot{I}_B) \bar{Z}' + \dot{I}_{A'B'} \bar{Z}' \end{aligned}$$

sendo

$$\dot{I}_A - \dot{I}_B = \sqrt{3} I_F \angle -30^\circ - \alpha^2 \sqrt{3} I_F \angle -30^\circ = \sqrt{3} I_F \angle -30^\circ (1 - \alpha^2) = \sqrt{3} I_F \angle -30^\circ \sqrt{3} \angle 30^\circ = 3 I_F$$

ou  $\dot{I}_A - \dot{I}_B = 3 I_F$ ; logo

$$\dot{V}_{AB} = (3\bar{Z}' + \bar{Z}) I_F \tag{4.8}$$

Adotando-se  $\dot{V}_{AB} = V / \varphi$ , resulta

$$\begin{aligned} V \cos \varphi &= I_F (3 R' + R) \\ V \sin \varphi &= I_F (3 X' + X) \end{aligned}$$

e portanto

$$I_F = \frac{V}{\sqrt{(3R' + R)^2 + (3X' + X)^2}} = \frac{V}{|3\bar{Z}' + \bar{Z}|}$$

$$\varphi = \text{arc tg } \frac{3X' + X}{3R' + R}$$

Assim, tem-se

$$\dot{I}_{A'B'} = \frac{V}{|3\bar{Z}' + \bar{Z}|} \angle 0^\circ, \quad \dot{I}_{B'C'} = \frac{V}{|3\bar{Z}' + \bar{Z}|} \angle -120^\circ, \quad \dot{I}_{C'A'} = \frac{V}{|3\bar{Z}' + \bar{Z}|} \angle 120^\circ$$

A Equação. (4.8) mostra que o problema proposto transforma-se no da determinação da corrente que circula numa malha cuja f.e.m. vale  $\dot{V}_{AB}$  e cuja impedância é  $3\bar{Z}' + \bar{Z}$ .

Chega-se ao mesmo resultado muito mais facilmente substituindo a carga ligada em triângulo por outra que lhe seja equivalente, ligada em estrela (Figura. 4.10). De fato, lembrando a transformação triângulo-estrela, deveremos substituir a carga em triângulo cuja impedância de fase vale  $\bar{Z}$ , por carga em estrela cuja impedância de fase vale  $\bar{Z}/3$ . Substituindo-se o gerador em triângulo por outro em estrela, de modo que a tensão de linha seja a mesma, recai-se no caso já estudado de ligação em estrela, resultando

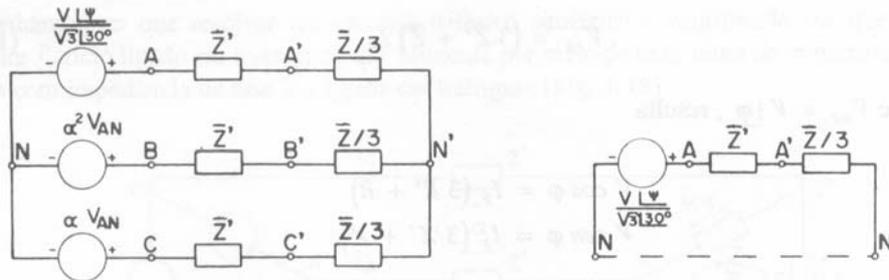
$$\dot{V}_{AN'} = \dot{V}_{AN} = \dot{I}_{AA'} \left( \bar{Z}' + \frac{\bar{Z}}{3} \right)$$

logo,

$$\dot{I}_{AA'} = \frac{3\dot{V}_{AN}}{3\bar{Z}' + \bar{Z}}$$

Finalmente, a corrente de fase, na carga em triângulo, é dada por

$$\dot{I}_{A'B'} = \frac{\dot{I}_{AA'}}{\sqrt{3} \angle -30^\circ} = \frac{3\dot{V}_{AN}}{(3\bar{Z}' + \bar{Z})\sqrt{3} \angle -30^\circ} = \frac{\dot{V}_{AN} \sqrt{3} \angle 30^\circ}{3\bar{Z}' + \bar{Z}} = \frac{\dot{V}_{AB}}{3\bar{Z}' + \bar{Z}}$$



(a) Circuito trifásico em estrela

(b) Circuito monofásico equivalente

Figura 4.10. Substituição do circuito em triângulo por equivalente ligado em estrela

**Exemplo 4.5**

Um gerador trifásico alimenta por meio de uma linha uma carga trifásica equilibrada. São conhecidos:

- (1) o tipo de ligação do gerador ( $\Delta$ ) e da carga ( $\Delta$ );
- (2) a tensão de linha do gerador (220 V), a frequência (60 Hz), e a seqüência de fase (direta);
- (3) a impedância de cada um dos ramos da carga,  $(3 + j4) \Omega$ ;
- (4) a resistência  $0,2 \Omega$  e a reatância indutiva  $0,15 \Omega$  de cada fio da linha,

Pedem-se:

- (a) as tensões de fase e de linha no gerador;
- (b) as correntes de linha;
- (c) as correntes de fase na carga;
- (d) as tensões de fase e de linha na carga;

**Solução:**

- (a) Tensões de fase e de linha no gerador

As tensões de fase coincidem com as de linha e valem, para a seqüência A-B-C,

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AB} \\ \dot{V}_{BC} \\ \dot{V}_{CA} \end{bmatrix} = 220 \underline{0^\circ} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} V$$

- (b) Determinação das correntes de linha

Substituindo a carga em triângulo por outra equivalente em estrela, tem-se o circuito da Figura. 4.11, obtendo:

$$\dot{i}_{AA'} = \frac{\dot{V}_{AN}}{\bar{Z}' + \bar{Z}/3} = \frac{(220 \angle 0^\circ) / (\sqrt{3} \angle 30^\circ)}{1,2 + j 1,48}$$

Logo,

$$\dot{i}_{AA'} = \frac{127 \angle -30^\circ}{1,9 \angle 51^\circ} = 66,6 \angle -81^\circ \text{ A}$$

e então

$$\dot{i}_{BB'} = 66,6 \angle -201^\circ \text{ A} , \quad \dot{i}_{CC'} = 66,6 \angle 39^\circ \text{ A}$$

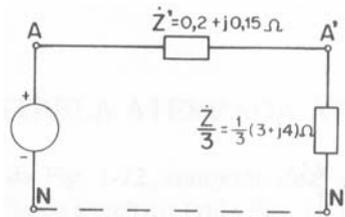


Figura 4.11. Circuito equivalente para o Ex. 4.5

(c) Determinação das correntes de fase na carga

Na carga em triângulo, tem-se:

$$\dot{i}_{A'B'} = \frac{\dot{i}_{AA'}}{\sqrt{3} \angle -30^\circ} = \frac{66,6 \angle -81^\circ}{\sqrt{3} \angle -30^\circ} = 38,5 \angle -51^\circ \text{ A}$$

$$\dot{i}_{B'C'} = 38,5 \angle -171^\circ \text{ A}$$

$$\dot{i}_{C'A'} = 38,5 \angle 69^\circ \text{ A}$$

(d) Determinação das tensões na carga

Da Figura. 4.11, obtém-se:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{A'N'} &= \dot{I}_{AA'} \frac{\bar{Z}}{3} = \frac{66,6/-81^\circ \cdot 5/\underline{53,1^\circ}}{3} = 111/\underline{-27,9^\circ} \text{ V} \\ \dot{V}_{B'N'} &= 111/\underline{-147,9^\circ} \text{ V} \\ \dot{V}_{C'N'} &= 111/\underline{92,1^\circ} \text{ V}\end{aligned}$$

As tensões de fase e de linha na carga são iguais, e valem:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{A'B'} &= \dot{V}_{A'N'} \sqrt{3}/30^\circ = 111/\underline{-27,9^\circ} \cdot \sqrt{3}/30^\circ = 192/\underline{2,1^\circ} \text{ V} \\ \dot{V}_{B'C'} &= 192/\underline{-117,9^\circ} \text{ V} \\ \dot{V}_{C'A'} &= 192/\underline{122,1^\circ} \text{ V}\end{aligned}$$

### 4.3 POTÊNCIA EM SISTEMAS TRIFÁSICOS

Seja uma carga trifásica na qual os valores instantâneos das tensões e correntes de fase são:

$$\begin{aligned}v_A &= V_{A_M} \cos(\omega t + \theta_A) & i_A &= I_{A_M} \cos(\omega t + \delta_A) \\ v_B &= V_{B_M} \cos(\omega t + \theta_B) & i_B &= I_{B_M} \cos(\omega t + \delta_B) \\ v_C &= V_{C_M} \cos(\omega t + \theta_C) & i_C &= I_{C_M} \cos(\omega t + \delta_C)\end{aligned}$$

A potência instantânea em cada fase é dada por

$$\begin{aligned}p_A &= v_A i_A = V_{F_A} I_{F_A} \cos(\theta_A - \delta_A) + V_{F_A} I_{F_A} \cos(2\omega t + \theta_A + \delta_A) \\ p_B &= v_B i_B = V_{F_B} I_{F_B} \cos(\theta_B - \delta_B) + V_{F_B} I_{F_B} \cos(2\omega t + \theta_B + \delta_B) \\ p_C &= v_C i_C = V_{F_C} I_{F_C} \cos(\theta_C - \delta_C) + V_{F_C} I_{F_C} \cos(2\omega t + \theta_C + \delta_C)\end{aligned} \quad (4.9)$$

em que  $V_{F_A}$ ,  $V_{F_B}$  e  $V_{F_C}$  são os valores eficazes das tensões de fase e  $I_{F_A}$ ,  $I_{F_B}$  e  $I_{F_C}$  são os valores eficazes das correntes de fase. Fazendo-se

$$\begin{aligned}\theta_A - \delta_A &= \varphi_A \\ \theta_B - \delta_B &= \varphi_B \\ \theta_C - \delta_C &= \varphi_C\end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned}
 p_A &= V_{F_A} I_{F_A} \cos \varphi_A + V_{F_A} I_{F_A} \cos(2\omega t + \theta_A - \varphi_A) \\
 p_B &= V_{F_B} I_{F_B} \cos \varphi_B + V_{F_B} I_{F_B} \cos(2\omega t + \theta_B - \varphi_B) \\
 p_C &= V_{F_C} I_{F_C} \cos \varphi_C + V_{F_C} I_{F_C} \cos(2\omega t + \theta_C - \varphi_C)
 \end{aligned}$$

A potência total é dada por

$$p = p_A + p_B + p_C$$

Portanto, o valor médio da potência será

$$P = P_A + P_B + P_C = V_{F_A} I_{F_A} \cos \varphi_A + V_{F_B} I_{F_B} \cos \varphi_B + V_{F_C} I_{F_C} \cos \varphi_C$$

A potência complexa será

$$\bar{S} = \bar{S}_A + \bar{S}_B + \bar{S}_C = \dot{V}_{F_A} \dot{I}_{F_A}^* + \dot{V}_{F_B} \dot{I}_{F_B}^* + \dot{V}_{F_C} \dot{I}_{F_C}^*$$

Tratando-se de trifásico simétrico, com seqüência direta, tem-se

$$\begin{aligned}
 V_{F_A} &= V_{F_B} = V_{F_C} = V_F \\
 \theta_B &= \theta_A - 2\pi/3 \\
 \theta_C &= \theta_A + 2\pi/3
 \end{aligned}$$

e, sendo a carga equilibrada,

$$\begin{aligned}
 \varphi_A &= \varphi_B = \varphi_C = \varphi \\
 I_{F_A} &= I_{F_B} = I_{F_C} = I_F
 \end{aligned}$$

Substituindo esses valores na Equação. (4.9) resulta

$$\begin{aligned}
 p_A &= V_F I_F \cos \varphi + V_F I_F \cos(2\omega t + \theta_A - \varphi) \\
 p_B &= V_F I_F \cos \varphi + V_F I_F \cos(2\omega t + \theta_A - 4\pi/3 - \varphi) \\
 p_C &= V_F I_F \cos \varphi + V_F I_F \cos(2\omega t + \theta_A + 4\pi/3 - \varphi)
 \end{aligned}$$

e portanto, a potência instantânea total é dada por

$$p = p_A + p_B + p_C = 3V_F I_F \cos \varphi = P \quad (4.10)$$

isto é, nos trifásicos simétricos e equilibrados a potência instantânea coincide com a potência média.

A potência complexa será dada por

$$\bar{S} = \dot{V}_{FA} I_{FA}^* + \alpha^2 \dot{V}_{FA} (\alpha^2 I_{FA})^* + \alpha \dot{V}_{FA} (\alpha I_{FA})^*$$

mas, sendo

$$\alpha^* = \alpha^2 \quad \text{e} \quad (\alpha^2)^* = \alpha$$

resulta

$$\bar{S} = \dot{V}_{FA} I_{FA}^* + \dot{V}_{FA} I_{FA}^* + \dot{V}_{FA} I_{FA}^* = 3 \dot{V}_{FA} I_{FA}^*$$

Desenvolvendo, obtém-se

$$\bar{S} = 3 V_F \angle \theta_A \cdot I_F \angle -\delta_A = 3 V_F I_F \angle \theta_A - \delta_A = 3 V_F I_F \angle \varphi$$

então

$$\bar{S} = 3 V_F I_F \cos \varphi + j 3 V_F I_F \sin \varphi \quad (4.11)$$

Da Equação. (4.11), nota-se que

$$\begin{aligned} S &= 3 V_F I_F \\ P &= 3 V_F I_F \cos \varphi \\ Q &= 3 V_F I_F \sin \varphi \end{aligned} \quad (4.12)$$

Uma vez que, usualmente, nos sistemas trifásicos não se dispõe dos valores de tensão e corrente de fase, é oportuno transformar as Equação. (4.12) de modo a ter a potência complexa em função dos valores de tensão de linha,  $V_L$ , e da corrente de linha,  $I_L$ . Para tanto, suponha inicialmente a carga ligada em estrela; tem-se

$$V_F = \frac{V_L}{\sqrt{3}} \quad , \quad I_F = I_L$$

Logo,

$$\bar{S} = 3 \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \cos \varphi + j 3 \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \sin \varphi = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi + j \sqrt{3} V_L I_L \sin \varphi$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 S &= \sqrt{3} V_L I_L \\
 P &= \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi \\
 Q &= \sqrt{3} V_L I_L \sen \varphi
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

Admitindo-se a carga ligada em triângulo, tem-se

$$V_F = V_L \quad , \quad I_F = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$$

Logo,

$$\bar{S} = 3 V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos \varphi + j 3 V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \sen \varphi = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi + j \sqrt{3} V_L I_L \sen \varphi$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 S &= \sqrt{3} V_L I_L \\
 P &= \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi \\
 Q &= \sqrt{3} V_L I_L \sen \varphi
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

As Equações. (4.13) e (4.14) mostram que a expressão geral da potência complexa para trifásicos simétricos com carga equilibrada é função exclusivamente dos valores da tensão de linha, da corrente de linha, e da defasagem, para uma mesma fase, entre a tensão de fase e a corrente de fase. Define-se *fator de potência de uma carga trifásica equilibrada* como sendo o cosseno do ângulo de defasagem entre a tensão e a corrente numa mesma fase. Em se tratando de carga desequilibrada, o fator de potência é definido pela relação  $P/S$  ou  $P/\sqrt{P^2 + Q^2}$ . Em conclusão, pode-se afirmar que:

- Num sistema trifásico simétrico e equilibrado, com carga equilibrada, a potência aparente fornecida à carga é dada pelo produto da tensão de linha pela corrente de linha e por  $\sqrt{3}$ .
- Num sistema trifásico simétrico e equilibrado, com carga equilibrada, a potência ativa fornecida à carga é dada pelo produto da tensão de linha pela corrente de linha, pelo fator de potência e por  $\sqrt{3}$ .
- Num sistema trifásico simétrico e equilibrado, com carga equilibrada, a potência reativa fornecida à carga é dada pelo produto da tensão de linha pela corrente de linha, pelo seno do ângulo de defasagem entre a tensão e a corrente na fase e por  $\sqrt{3}$ .

Isto é, num trifásico simétrico e equilibrado com carga equilibrada, qualquer que seja o tipo de ligação, são válidas as equações

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{3} V_L I_L \\ P &= \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi \\ Q &= \sqrt{3} V_L I_L \sin \varphi \\ \bar{S} &= P + j Q = 3 \dot{V}_{F_A} I_{F_A}^* \end{aligned} \quad (4.15)$$

### Exemplo 4.6

Uma carga trifásica equilibrada tem fator de potência 0,8 indutivo. Quando alimentada por um sistema trifásico simétrico, com seqüência de fase direta e com  $\dot{V}_{AB} = 220 \angle 25^\circ \text{ V}$ , absorve 15200 W. Pede-se determinar o fasor da corrente de linha.

**Solução:**

(a) Determinação do módulo da corrente ( $I$ )

Tem-se

$$I = \frac{P}{\sqrt{3} V \cos \varphi} = \frac{15200}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 0,8} \cong 50 \text{ A}$$

(b) Determinação do ângulo de fase da corrente de linha

Admitindo inicialmente a carga ligada em triângulo, as tensões de linha coincidem com as de fase:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AB} \\ \dot{V}_{BC} \\ \dot{V}_{CA} \end{bmatrix} = 220 \angle \theta \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = 220 \angle 25^\circ \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \text{ V}$$

As correntes de fase estão defasadas das tensões correspondentes de  $\varphi = \arccos(\text{fator de potência})$

Salienta-se que, para cargas indutivas, a corrente está atrasada e, para capacitivas, adiantada. Logo, neste caso,

$$\varphi = \theta - \delta = \text{arc cos}(0,8) = 37^\circ$$

e portanto

$$\begin{aligned} \dot{I}_{AB} &= I_{FA} / \underline{\delta} = \frac{I_L}{\sqrt{3}} / \underline{\theta - \varphi} = \frac{50}{\sqrt{3}} / \underline{25^\circ - 37^\circ} = \frac{50}{\sqrt{3}} / \underline{-12^\circ} \text{ A} \\ \dot{I}_{BC} &= \frac{50}{\sqrt{3}} / \underline{-132^\circ} \text{ A} \\ \dot{I}_{CA} &= \frac{50}{\sqrt{3}} / \underline{108^\circ} \text{ A} \end{aligned}$$

Sendo a seqüência de fase direta, as correntes de linha serão obtidas pela aplicação de (4.6), resultando:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = \sqrt{3} / \underline{-30^\circ} \begin{bmatrix} \dot{I}_{AB} \\ \dot{I}_{BC} \\ \dot{I}_{CA} \end{bmatrix} = 50 / \underline{-42^\circ} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \text{ A}$$

Admitindo-se a carga ligada em estrela, as tensões de linha e de fase serão dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AB} \\ \dot{V}_{BC} \\ \dot{V}_{CA} \end{bmatrix} = V / \underline{\theta} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = 220 / \underline{25^\circ} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \text{ V}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} = \frac{V / \underline{\theta}}{\sqrt{3} / \underline{30^\circ}} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = 127 / \underline{-5^\circ} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \text{ V}$$

A corrente  $\dot{I}_{AN} = \dot{I}_A$  deverá estar atrasada  $37^\circ$  em relação a  $\dot{V}_{AN}$ . Logo,

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{AN} \\ \dot{I}_{BN} \\ \dot{I}_{CN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = 50 / \underline{-5^\circ - 37^\circ} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = 50 / \underline{-42^\circ} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \text{ A}$$

Observa-se que, quer a carga esteja em triângulo, quer esteja em estrela, a defasagem entre a tensão de linha e a corrente na mesma linha, sendo a seqüência de fase direta, é  $\varphi + 30^\circ$  (Figura. 4.12). Ou seja, sendo  $\varphi = 37^\circ$  :

- defasagem entre  $\dot{V}_{AB}$  e  $\dot{I}_A$  :  $\theta_{AB} - \delta_A = 25^\circ - (-42^\circ) = 67^\circ = \varphi + 30^\circ$
- defasagem entre  $\dot{V}_{BC}$  e  $\dot{I}_B$  :  $\theta_{BC} - \delta_B = -95^\circ - (-162^\circ) = 67^\circ = \varphi + 30^\circ$
- defasagem entre  $\dot{V}_{CA}$  e  $\dot{I}_C$  :  $\theta_{CA} - \delta_C = 145^\circ - (78^\circ) = 67^\circ = \varphi + 30^\circ$

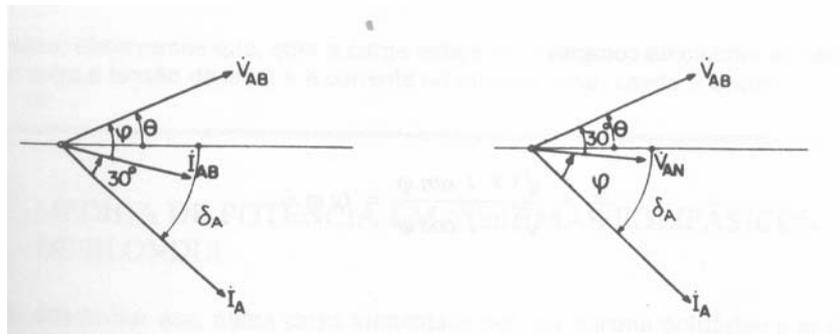


Figura 4.12. Defasagem entre tensão e corrente

#### Exemplo 4.7

Um sistema trifásico simétrico alimenta carga equilibrada, formada por três impedâncias iguais, que absorve 50 MW e 20 MVAR quando alimentada por tensão de 200 kV. Sendo a seqüência de fase inversa e a tensão  $\dot{V}_{AB} = 220 \angle 12^\circ$  kV, pede-se determinar a corrente de linha.

#### Solução:

(a) Determinação da potência absorvida quando a tensão é 220 kV

Admitindo a carga ligada em estrela, tem-se

$$P = \sqrt{3} V I \cos \varphi \quad \text{e} \quad I = \frac{V/\sqrt{3}}{Z}$$

logo,

$$P = \frac{V^2}{Z} \cos \varphi$$

Sendo a impedância da carga constante, qualquer que seja o valor da tensão, resulta imediatamente que

$$\frac{P'}{P} = \frac{V'^2}{V^2}$$

isto é,

$$P' = \left(\frac{V'}{V}\right)^2 P = \left(\frac{220}{200}\right)^2 \cdot 50 = 60,5 \text{ MW}$$

Analogamente,

$$Q' = \left(\frac{V'}{V}\right)^2 Q = \left(\frac{220}{200}\right)^2 \cdot 20 = 24,2 \text{ MVar}$$

(b) Determinação do módulo da corrente

Tem-se

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sqrt{3} V I \sin \varphi}{\sqrt{3} V I \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi$$

Logo,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{24,2}{60,5} = 0,4$$

e portanto

$$|\varphi| = 21,8^\circ \Rightarrow \cos \varphi = 0,928$$

Então

$$I = \frac{60,5 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 0,928} = 171,8 \text{ A}$$

(c) Determinação do ângulo de fase da corrente

Sendo a seqüência de fase inversa, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AB} \\ \dot{V}_{BC} \\ \dot{V}_{CA} \end{bmatrix} = V \underline{\underline{\theta}} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} = 220 \underline{\underline{12^\circ}} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} \text{ kV}$$

Considerando a carga ligada em estrela, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} = \frac{V \underline{\underline{\theta}}}{\sqrt{3} \underline{\underline{-30^\circ}}} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} = 127 \underline{\underline{42^\circ}} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} \text{ kV}$$

Como a potência reativa fornecida à carga é positiva, conclui-se que o fator de potência é 0,928 indutivo, isto é, a corrente de fase está atrasada de  $21,8^\circ$  em relação à tensão correspondente ( $\varphi = \theta - \delta = 21,8^\circ$ ). Logo,

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = 171,8 \underline{\underline{20,2^\circ}} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} \text{ A}$$

Neste caso, observa-se que, quer a carga esteja em triângulo, quer esteja em estrela, a rotação de fase entre a tensão de linha e a corrente na mesma linha, sendo a seqüência de fase inversa, é  $\varphi - 30^\circ$ .

#### Exemplo 4.8

Um gerador de 220 V (tensão de linha), 60 Hz, trifásico simétrico, alimenta as seguintes cargas equilibradas:

- (1) Iluminação: 25 kW, fator de potência unitário.
- (2) Compressor: motor de indução de 100 cv com rendimento de 92 % e fator de potência 0,85 indutivo.
- (3) Máquinas diversas: motores de indução, totalizando 46,7 kW, com fator de potência 0,75 indutivo.

Pede-se:

- (a) A potência total fornecida pelo gerador.
- (b) O fator de potência global.
- (c) O banco de capacitores a ser instalado para que o fator de potência global da instalação seja 0,95 indutivo.
- (d) A corrente antes e após a inserção do banco de capacitores.

**Solução:**

(a) Potência fornecida pelo gerador

- Tensões

Assume-se seqüência de fase direta e a tensão de fase  $\dot{V}_{AN}$  com fase inicial nula, isto é

$$\begin{aligned}\dot{V}_{AN} &= \frac{220}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \text{ V}, & \dot{V}_{BN} &= \frac{220}{\sqrt{3}} \angle -120^\circ \text{ V}, & \dot{V}_{CN} &= \frac{220}{\sqrt{3}} \angle 120^\circ \text{ V}, \\ \dot{V}_{AB} &= 220 \angle 30^\circ \text{ V}, & \dot{V}_{BC} &= 220 \angle -90^\circ \text{ V}, & \dot{V}_{CA} &= 220 \angle 150^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

- Potência total

Tem-se:

$$\begin{aligned}\bar{S}_{ilum} &= (25,0 + 0j) \text{ kVA}, \\ \bar{S}_{comp} &= \frac{100,0 \cdot 0,736}{0,92} (1 + \tan(\cos^{-1} 0,85)j) = (80 + 49,58j) \text{ kVA}, \\ \bar{S}_{maq.} &= 46,7 + 46,7 \cdot \tan(\cos^{-1} 0,75)j = (46,7 + 41,18j) \text{ kVA}, \\ \bar{S}_{tot.} &= 151,7 + 90,76j = 176,777 \angle 30,89^\circ \text{ kVA}\end{aligned}$$

Observa-se que a potência aparente não é a soma das potências aparentes das cargas. A potência ativa total, por sua vez, é igual à soma das potências ativas das cargas, o mesmo ocorrendo com a potência reativa, ou seja, as potências ativa e reativa se conservam.

(b) Fator de potência

Pode-se definir o fator de potência, além dos modos já apresentados, pela relação entre as potências, ativa e aparente, absorvidas pela carga, isto é

$$\cos \varphi = \frac{151,7}{176,777} = \cos(30,89^\circ) = 0,8581$$

(c) Banco de capacitores para corrigir o fator de potência

Ao ligar, em paralelo com a carga, um banco de capacitores, a potência ativa absorvida pela carga, como é evidente, permanece inalterada, variando somente as potências reativa e aparente. Assim, sendo  $\bar{S}_{banco} = 0 + j Q_{banco}$  a potência complexa absorvida pelo banco, tem-se:

$$\bar{S}_{tot} + \bar{S}_{banco} = P_{tot} + j(Q_{tot} + Q_{banco}) = S / \underline{\psi}$$

Desejando que o fator de potência seja 0,95, resulta imediatamente

$$\tan \psi = \frac{Q_{tot} + Q_{banco}}{P_{tot}} = \tan(\arccos 0,95) = 0,3287$$

ou seja

$$Q_{banco} = P_{tot} \cdot 0,3287 - Q_{tot} = 151,7 \cdot 0,3287 - 90,76 = -40,896 \text{ kVAR}$$

e a potência complexa do paralelo entre conjunto de cargas e o banco de capacitores passará a ser

$$\bar{S} = \bar{S}_{tot} + \bar{S}_{banco} = 151,7 + (90,76 - 40,896)j = 151,7 + 49,864j = 159,685 \angle 18,19^\circ \text{ kVA}$$

(d) Corrente sem e com banco de capacitores

A corrente antes da inserção do banco de capacitores é dada por

$$|I| = \frac{S_{tot}}{\sqrt{3} V} = \frac{176777}{\sqrt{3} \cdot 220} = 463,92 \text{ A}$$

e, lembrando a hipótese básica de geração e carga ligada em estrela, resulta

$$i_A = i_{AN} = I \frac{\dot{V}_{AN}}{|\dot{V}_{AN}| \angle \arccos(P/S)} = 463,92 \cdot \frac{\frac{220}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{\frac{220}{\sqrt{3}} \angle 30,89^\circ} = 463,92 \angle -30,89^\circ \text{ A}$$

e

$$i_B = i_{BN} = 463,92 \angle -150,89^\circ \text{ A}, \quad i_C = i_{CN} = 463,92 \angle 89,11^\circ \text{ A}$$

Por se tratar de trifásico simétrico e equilibrado procede-se, como método alternativo, ao cálculo da corrente, após a inserção do banco de capacitores, a partir da potência de fase, isto é

$$i'_A = i'_{AN} = \frac{\bar{S}^*}{3 \cdot \dot{V}_{AN}} = \frac{159685 \angle -18,19^\circ}{3 \cdot 127 \angle 0^\circ} = 419,06 \angle -18,19^\circ \text{ A}$$

e

$$i'_B = i'_{BN} = 419,06 \angle -138,19^\circ \text{ A} \quad \text{e} \quad i'_C = i'_{CN} = 419,06 \angle 101,81^\circ \text{ A}$$

