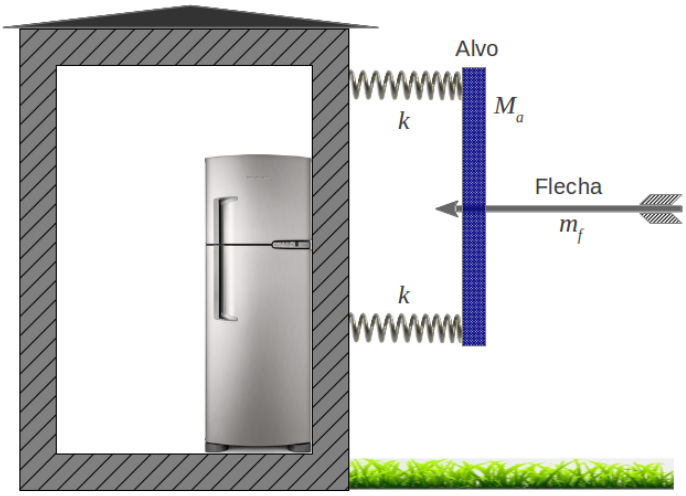
Prova 3 - Física 1 para o Instituto Oceanográfico (4300111)

Prof. José Roberto B. Oliveira - IFUSP - 2013

Permitido o uso de calculadora. Use $\pi = 3,14$. Não esquecer das unidades nas respostas. Bastam 3 algarismos significativos nos cálculos.



1. Uma flecha de massa $m_f = 20$ g atinge o centro de um alvo de massa $M_a = 1,98$ kg, previamente em repouso e em equilíbrio, no instante $t = 0$ s. O alvo é suportado por duas molas iguais de constante elástica k, simetricamente dispostas, presas à parede de uma casa de campo, conforme a figura (cuja finalidade é evitar que o alvo se quebre com o impacto). A velocidade inicial da flecha é $v_f = 60$ m/s. Após atingi-lo, a flecha fica solidamente presa ao alvo.

***a*)** [3,0] Sabendo que o sistema foi projetado para que, nas condições indicadas, o alvo se desloque horizontalmente no máximo 10 cm com relação à sua posição inicial, determine: a constante elástica das molas (k), o período T_0 e a amplitude de oscilação inicial do sistema, e o instante t_1 em que o deslocamento do alvo atinge o valor máximo para a esquerda. Suponha que a massa das molas seja desprezível, bem como a energia dissipada por atrito com o ar em um período de oscilação. Suponha também que o processo de colisão da flecha com o alvo seja praticamente instantâneo em comparação com o período da oscilação.

***b*)** [2,0] Determine a posição x (na direção horizontal, com relação ao ponto de equilíbrio) e a velocidade v_x do alvo para o instante $t_2 = \frac{T_0}{12}$.

***c*)** [2,0] Observa-se que após 15s a amplitude da oscilação diminui 10%, por efeito do atrito viscoso com o ar (supor proporcional à velocidade). Especifique o regime de amortecimento do sistema e estime o valor da constante de amortecimento γ. Calcule a redução da amplitude em um período de oscilação, e a fração da energia que é dissipada por atrito em um período (isto é, verifique a hipótese do item a).

***d*)** [1,5] Dentro da casa de campo há uma geladeira, encostada à parede vizinha ao alvo, cujo motor opera a 1800 rotações por minuto. Observa-se que, após passado um tempo suficientemente longo, a amplitude das oscilações do alvo atinge um valor constante de 0,1 mm. Estime a amplitude F_0 da força transmitida ao sistema pela vibração da parede, devido ao funcionamento da geladeira.

***e*)** [1,0] Qual seria a amplitude desta oscilação, mantendo-se supostamente constante a amplitude da força, caso a frequência do motor fosse igual à frequência natural de oscilação do alvo?

***f*)** [0,5] Para amortecer mais rapidamente a oscilação transiente do alvo após o impacto com a flecha, projeta-se um pistão com óleo a ser acoplado no sistema. Qual seria o melhor valor do fator de amortecimento γ a ser alcançado para esta finalidade?

Formulário

Equação diferencial do Oscilador Harmônico Simples:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

Solução geral:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega t).$$

Equação diferencial do Oscilador Harmônico Amortecido:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Soluções gerais:

i) Para $\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$ (sub-amortecido):

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\sin(\omega t) + Be^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t);\ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - (\tfrac{\gamma}{2})^2}\ .$$

ii) Para $\omega_0 = \frac{\gamma}{2}$ (amortecimento crítico):

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\gamma}{2}t}\ .$$

iii) Para $\omega_0 < \frac{\gamma}{2}$ (super-amortecido):

$$x(t) = Ae^{-(\frac{\gamma}{2}+\beta)t} + Be^{-(\frac{\gamma}{2}-\beta)t};\ \beta = \sqrt{(\tfrac{\gamma}{2})^2 - \omega_0^2}.$$

Equação diferencial do Oscilador Harmônico Amortecido Forçado, sob ação de uma força externa harmônica, $F(t) = F_0\cos(\omega t)$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

Solução geral:

$x(t) = x_h(t) + x_e(t)$; onde $x_h(t)$ é a solução da eq. diferencial homogênea ($F_0 = 0$), e $x_e(t)$ é a solução estacionária:

$$x_e(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega));\ A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2}};\ \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right).$$