

Prof. José Roberto B. Oliveira - IFUSP - 2013

2. Um pelicano gordo de $m = 14$ kg pousa na ponta de uma prancha de salto fixa na beirada de uma piscina. A ponta da prancha deflete e começa a oscilar com amplitude $A_0 = 3,68$ cm, e período de $T = 0,628$ s estando o pelicano rigidamente agarrado a ela. Após passados $t_1 = 20$ s, a amplitude de oscilação de reduz para $A(t_1) = 1$ cm. Sendo a deflexão x máxima da prancha (na direção vertical) muito inferior ao seu comprimento (horizontal), é razoável admitir que as oscilações sejam aproximadamente harmônicas (amortecidas). Considere a massa da prancha desprezível com relação à do pelicano.
- (a) Assumindo que o amortecimento do movimento oscilatório por atrito com o ar seja do tipo viscoso, proporcional à velocidade, determine aproximadamente o fator de amortecimento γ e a frequência angular natural ω_0 de oscilação do sistema “prancha+pelicano”.
- (b) Calcule a constante elástica efetiva da prancha $k_{ef} = |\Delta F/\Delta x|$. Estime, após passado um tempo grande, de quanto a ponta da prancha estará deslocada, na direção vertical, com relação à sua posição inicial horizontal (antes do pouso do pelicano): Δx_{eq} .
- (c) Estime a velocidade do pelicano no momento que ele se agarrou à prancha.
- (d) O coração do pelicano bate a $f_p = 180$ pulsações por minuto. Devido a isto, desenvolve-se uma oscilação forçada da prancha com amplitude $A_e(\omega_p) = 0,2$ cm em regime estacionário. Modelando-se o processo como uma força externa harmônica de amplitude F_0 constante, determine a amplitude da oscilação quando a pulsação do coração do pelicano, mais descansado, se reduzir para 90 pulsações por minuto.
- (e) Com que frequência o pelicano, sempre agarrado à prancha, deve bater suas asas para que a amplitude de oscilação da prancha seja máxima? Supondo que a ordem de grandeza da força de empuxo das asas seja igual ao peso do pelicano, estime a amplitude de oscilação da prancha (sempre mantendo o modelo de força harmônica), e que o fator de amortecimento seja o mesmo (embora, com as asas batendo, este fator deva ser alterado).
- (f) Qual deve ser a fase entre o batimento das asas e a oscilação da prancha no caso do item (e)?
-

FORMULÁRIO

Equação diferencial do Oscilador Harmônico Simples:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

Solução geral:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t).$$

Equação diferencial do Oscilador Harmônico Amortecido:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Soluções gerais:

i) Para $\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$ (sub-amortecido):

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\omega t) + Be^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t); \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}.$$

ii) Para $\omega_0 = \frac{\gamma}{2}$ (amortecimento crítico):

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\gamma}{2}t}.$$

iii) Para $\omega_0 < \frac{\gamma}{2}$ (super-amortecido):

$$x(t) = Ae^{-(\frac{\gamma}{2} + \beta)t} + Be^{-(\frac{\gamma}{2} - \beta)t}; \beta = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}.$$

Equação diferencial do Oscilador Harmônico Amortecido Forçado, sob ação de uma força externa harmônica, $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

Solução geral:

$x(t) = x_h(t) + x_e(t)$; onde $x_h(t)$ é a solução da eq. diferencial homogênea ($F_0 = 0$), e $x_e(t)$ é a solução estacionária:

$$x_e(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)); A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}; \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$